American Invitational Mathematics Examination Tests from the First to the Latest

历届美国数学邀请赛试题集

佩 捷 主编

$\sum_1^5 kx_k = a$

$\sum_1^5 k^3x_k = a^2$

$\sum_1^5 k^5x_k = a^3$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

American Invitational Mathematics Examination Tests from the First to the Latest

历届美国数学邀请赛试题集

佩 捷 主编

$$\sum_{1}^{5} k^5 x_k = a^3$$

$$\sum_{1}^{5} k^3 x_k = a^2$$

$$\sum_{1}^{5} k x_k = a$$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书汇集了第1届至第29届美国数学邀请赛试题及解答。本书广泛搜集了每道试题的多种解法,且注重了初等数学与高等数学的联系,更有出自数学名家之手的推广与加强。本书可归结出以下四个特点,即收集全、解法多、观点高、结论强。

本书适合于数学竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

历届美国数学邀请赛试题集/佩捷主编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2013. 10

ISBN 978-7-5603-4245-0

Ⅰ. ①历… Ⅱ. ①佩… Ⅲ. ①中学数学课-竞赛题 Ⅳ. ①G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第238365号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘家琳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 25.75 总字数480千字
版　　次 2013年10月第1版 2013年10月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-4245-0
定　　价 48.00元

目　录 | Contents

第 1 届美国数学邀请赛

1983 年

❶设 x,y 和 z 都大于 1，w 是正数，且有 $\log_x w=24$，$\log_y w=40$，$\log_{xyz} w=12$. 求 $\log_z w$.

解法 1　由 $\log_x w=24$，$\log_y w=40$，$\log_{xyz} w=12$，知 $0<x\neq 1$，$0<y\neq 1$，$0<xyz\neq 1$，$0<w\neq 1$，$z>0$，且 $\log_w x=\frac{1}{24}$，$\log_w y=\frac{1}{40}$，于是

$$\log_w xyz=\log_w x+\log_w y+\log_w z=\frac{1}{12}$$

所以
$$\log_w z=\frac{1}{12}-\frac{1}{24}-\frac{1}{40}=\frac{1}{60}$$

从而得
$$\log_z w=60$$

解法 2　根据题意，得

$$x^{24}=w,y^{40}=w,(xyz)^{12}=w$$

$$z^{12}=\frac{w}{x^{12}y^{12}}=\frac{w}{w^{\frac{1}{2}}w^{\frac{3}{10}}}=w^{\frac{1}{5}}$$

由此得
$$w=z^{60},\log_z w=60$$

❷设 $f(x)=|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$，其中 $0<p<15$. 决定在区间 $p\leqslant x\leqslant 15$ 上 $f(x)$ 的最小值.

解　因为 $0<p\leqslant x\leqslant 15$，所以 $|x-p|=x-p$，$|x-15|=15-x$，$|x-(p+15)|=p+15-x$.

由上可知 $f(x)=(x-p)+(15-x)+(p+15-x)=30-x$，若要使 $f(x)$ 最小，那么只需使 x 最大即可. 所以当 $x=15$ 时

$$f(x)_{\min}=15$$

❸方程 $x^2+18x+30=2\sqrt{x^2+18x+45}$ 的实根之积是多少？

解法 1　将原方程改写成

$$x^2+18x+45-2\sqrt{x^2+18x+45}-15=0$$

即
$$(\sqrt{x^2+18x+45}+3)(\sqrt{x^2+18x+45}-5)=0$$

解得

$$\sqrt{x^2+18x+45}=-3 \quad (舍去)$$
$$\sqrt{x^2+18x+45}=5$$

所以 $x^2+18x+45=25$，整理得 $x^2+18x+20=0$，其判别式为正.
所以两实根之积是 20.

解法 2 令 $t^2=x^2+18x+45$，则

$$t^2-15=2\sqrt{t^2}=2t \quad (因为\ t\geqslant 0)$$
$$t^2-2t-15=0$$
$$(t-5)(t+3)=0$$

因为 $t\geqslant 0$，所以 $t=5$.（$t=-3$ 舍去）从而有

$$x^2+18x+45=5^2$$

即
$$x^2+18x+20=0$$

所以两实根之积是 20.

解法 3 将原方程改写成

$$x^2+18x+45-2\sqrt{x^2+18x+45}+1=16$$

即

$$(\sqrt{x^2+18x+45}-1)^2=16$$
$$\sqrt{x^2+18x+45}-1=\pm 4$$

当 $\sqrt{x^2+18x+45}-1=-4$ 时，得

$$\sqrt{x^2+18x+45}=-3 \quad (矛盾，故舍去)$$

当 $\sqrt{x^2+18x+45}-1=4$ 时，以下同解法 1.

4 一金工车间的切割工具呈有缺口的圆形，如图 1.1 所示，圆的半径是 $\sqrt{50}$ cm，AB 长为 6 cm，BC 长为 2 cm，$\angle ABC$ 为直角. 求点 B 到圆心的距离（以 cm 为单位）的平方.

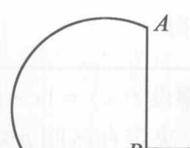

图 1.1

解法 1 联结 A，C 两点，过圆心 O 向 AC 作垂线交于点 D（如图1.2），则

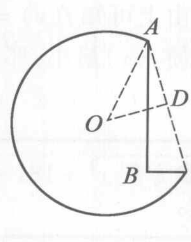

图 1.2

$$AD=DC,AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2\sqrt{10}$$
$$OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=2\sqrt{10}$$

所以
$$\tan\angle OAD=2$$

而 $\tan\angle BAC=\frac{1}{3}$，于是

$$\tan\angle OAB=\tan(\angle OAD-\angle BAC)=1,\angle OAB=\frac{\pi}{4}$$

所以 $$OB^2=OA^2+AB^2-2\cdot OA\cdot AB\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=26$$

解法2 如图1.3,连AC,OB.过点O,B分别作直线AC的垂线,且分别交AC于点E,D,又过点B作$BF\perp OE$.

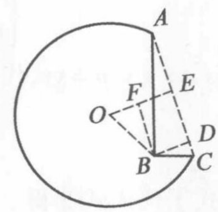

图1.3

因为$\triangle BCD\backsim\triangle ABC$,所以

$$\frac{BD}{AB}=\frac{BC}{AC}=\frac{CD}{BC}$$

所以 $$BD=\frac{6\times 2}{2\sqrt{10}}=\frac{3}{5}\sqrt{10},CD=\frac{BC^2}{AC}=\frac{1}{5}\sqrt{10}$$

而

$$BF=DE=CE-CD=\frac{4}{5}\sqrt{10}$$

$$OF=OE-EF=OE-BD=\frac{7}{5}\sqrt{10}$$

因此 $$OB^2=OF^2+BF^2=26$$

解法3 如图1.4,设$BD=x$,则

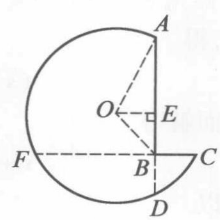

图1.4

$$AD=6+x,AE=ED=\frac{1}{2}(6+x)$$

$$BE=ED-BD=\frac{1}{2}(6-x)$$

根据$AB\cdot BD=FB\cdot BC$,得$FB=3x$.

因为

$$OE=\frac{1}{2}FC-2=\frac{1}{2}(FB+BC)-2=\frac{1}{2}(3x-2)$$

$$OA^2=OE^2+AE^2$$

所以 $$50=\left(\frac{3x-2}{2}\right)^2+\left(\frac{6+x}{2}\right)^2$$

由此解得

$$x=4$$

于是,在$\mathrm{Rt}\triangle OEB$中

$$OB^2=OE^2+BE^2=\left(\frac{3x-2}{2}\right)^2+\left(\frac{6-x}{2}\right)^2=26$$

5 设两复数x和y的平方和为7,它们的立方和为10,$x+y$能取到的最大实数值是多少?

解法1 根据题意,得

$$\begin{cases}x^2+y^2=7\\x^3+y^3=10\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(x+y)^2-2xy=7\\(x+y)^3-3xy(x+y)=10\end{cases}$$

令 $s=x+y,p=xy$,代入上式得

$$\begin{cases}s^2-2p=7 & ①\\s^3-3ps=10 & ②\end{cases}$$

将式①代入式②得

$$s^3-21s+20=0$$

即

$$(s-1)(s-4)(s+5)=0$$

所以

$$s_{\max}=(x+y)_{\max}=4$$

解法2 由 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ 及 $x^2+y^2=7$,得

$$xy=\frac{(x+y)^2-7}{2}$$

由 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\left[7-\frac{(x+y)^2-7}{2}\right]=10$,得

$$(x+y)^3-21(x+y)+20=0$$

从而解得

$$x+y=1,x+y=-5,x+y=4$$

所以

$$(x+y)_{\max}=4$$

6 设 $a_n=6^n+8^n$,决定 a_{83} 除以 49 的余数.

解 根据题意,有

$$\begin{aligned}a_n&=(7-1)^n+(7+1)^n\\&=[7^n-C_n^1 7^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}7-1]+\\&\quad[7^n+C_n^1 7^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}7+1]\\&=2\times[7^n+C_n^2 7^{n-2}+\cdots+C_n^{n-3}7^3+C_n^{n-1}7]\\&=2\times 49[7^{n-2}+C_n^2 7^{n-4}+\cdots+C_n^{n-3}7]+14n\end{aligned}$$

于是 $a_{83}=49K+14\times 83=49K+1\ 162$ (K 是整数)

因为 1 162 除以 49 的余数是 35,所以 a_{83} 除以 49 的余数是 35.

7 某个国王的二十五位骑士围坐在他们的圆桌旁，他们中间的三位被选派去杀一条恶龙（设三次挑选都是等可能的），令 P 是被挑到的三位骑士中至少有两位是邻座的概率．若把 P 写成一个既约分数，其分子与分母之和是多少？

解法1　根据题意，总的基本事件数为 C_n^3，又根据在三位骑士中至少有两位是邻座的条件，于是，一种情况是，三位骑士依次相邻，那么有 n 种选法；另一种情况是，两位骑士是邻座，此时第三位骑士就不选在已经邻座的两位骑士的两旁，也就是说，第三位骑士只能在 $(n-4)$ 位中任选一位，这样有 $n(n-4)$ 种选法．因此，满足条件的基本事件数为 $n+n(n-4)$．所以

$$P_n=\frac{n+n(n-4)}{C_n^3}=\frac{6(n-3)}{(n-1)(n-2)}$$

则

$$P_{25}=\frac{11}{46}$$

即分子与分母之和是57．

解法2　25位中取三位的取法总数为 C_{25}^3．取相邻两位的取法共有25种，再取另外一位共有23种．取出三位的总取法为 25×23．但其中有25种是重复的（相邻三位都取了两次），则所求的概率为

$$P_{25}=\frac{25\times23-25}{C_{25}^3}=\frac{11}{46}$$

所以分子与分母之和是57．

解法3　从围坐中选一人，有 C_{25}^1 种选法，并始终约定被选中的人的右边（或左边）那个人也随同而去．如此，已选得相邻两人，再在余下的人中选一人即可．为避免重复，在与已选两人不相邻的21人中选一人，有 C_{21}^1 种选法，然后加上已选两人之右邻（或左邻）的一人的一种，计得 (C_{21}^1+1) 种选法，故满足条件的选法有 $C_{25}^1(C_{21}^1+1)$ 种．于是

$$P_{25}=\frac{C_{25}^1(C_{21}^1+1)}{C_{25}^3}=\frac{11}{46}$$

所以分子与分母之和是57．

8 整数 $n=\binom{200}{100}$（即 C_{200}^{100}）的两位数质因子的最大值是多少？

解法1 设 p 为 $n=C_{200}^{100}=\frac{200!}{100!\ 100!}$ 中最大的两位数质因子，则 $0<p<100$，而且分母 $100!\ 100!\ =(100!)^2$ 中含有 p^2. 因此分子 $200!$ 中至少含有 p^3，即 $3p<200$.

所以 $p<\frac{200}{3}<67$，从而得 $p=61$.

解法2 由

$$n=C_{200}^{100}=\frac{200\times199\times\cdots\times101}{100!}=\frac{101\times103\times\cdots\times199}{50!}\times2^{50}$$

在分子小于200的奇因子中，如果其含有最大的两位数质因子 p，那么它除含有 p 外，只能再含3的一个因数.

因为 $183=3\times61$，所以 $p=61$.

9 对 $0<x<\pi$. 求 $f(x)=\frac{9x^2\sin^2x+4}{x\sin x}$ 的最小值.

解法1 因为 $0<x<\pi$，所以 $x\sin x>0$. 于是

$$f(x)=9x\sin x+\frac{4}{x\sin x}\geqslant2\sqrt{36}=12$$

所以，当 $9x\sin x=\frac{4}{x\sin x}$，即 $x^2\sin^2x=\frac{4}{9}$ 时，有

$$f(x)_{\min}=12$$

解法2 因为 $0<x<\pi$，所以 $x\sin x>0$. 又 $9x^2\sin^2x>0$，则

$$f(x)=\frac{9x^2\sin^2x+4}{x\sin x}\geqslant\frac{2\sqrt{(9x^2\sin^2x)\cdot4}}{x\sin x}=\frac{12x\sin x}{x\sin x}=12$$

所以，当 $9x^2\sin^2x=4$，即 $x^2\sin^2x=\frac{4}{9}$ 时，有

$$f(x)_{\min}=12$$

解法3 令 $f(x)=y, x\sin x=u$，则有

$$9u^2-yu+4=0$$

由 u 是实数，得 $(-y)^2-4\times9\times4\geqslant0$，即 $y^2\geqslant144$. 于是

$$y\leqslant-12,\ y\geqslant12$$

因为 $0<x<\pi$，所以

$$x\sin x>0,\ y>0$$

故 $y\leqslant-12$ 舍去.

当 $y\geqslant12$ 时，由

$$y=\frac{9x^2\sin^2x+4}{x\sin x}=12$$

得 $x\sin x=\frac{2}{3}$，即 $x\sin x=\frac{2}{3}$时，有

$$y_{\min}=f(x)_{\min}=12$$

10 数 1 447，1 005 和 1 231 有某些共同点，即每一个都是以 1 开头的四位数，且每个数恰好有两个数字相等. 这样的数共有多少个？

解法1 事实上，满足条件的四位数有如下六类

$$11\times\Delta,1\times1\Delta,1\times\Delta1$$
$$1\Delta\Delta\times,1\times\Delta\Delta,1\Delta\times\Delta$$

而对于每一类有 9×8 个四位数，所以满足条件的这样的四位数共有 $6\times9\times8=432$(个).

解法2 根据题意，每一个都是以 1 开头的四位数，它们的后三位数可分两种情况考虑：

(1)后三位数中有一个 1，则有 3 种放法. 剩下的两位中的一个有 9 个数字可放，另一个有 8 个数字可放，所以共有 $3\times9\times8$ 种.

(2)后三位数中没有 1，但要有两个相同的数，有 3 种方法，即图 1.5 的三种情况，除了 1 以外的 9 个数都可以这样放. 最后剩下的一个数字有 8 种不同的数字可以放. 所以共有 $3\times9\times8$ 种. 故总数为 $2\times3\times9\times8=432$(个).

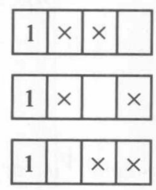

图 1.5

解法3 (1)四位数中含有两个 1 的情况：

在四位数中含有两个 1，其中一个 1 在千位数上的共有三类. 而对于每一类的四位数中，剩下的两个数位上的数字的取法共有 $2\times C_9^2$ 种，因此，符合情况(1)的四位数有 $3\times2\times C_9^2$ 个.

(2)四位数中含有两个相同数字(除两个 1 以外)的情况：

由于四位数中，千位数字是 1，且有两个数字相同的共有三类. 而对于每一类的这样四位数，剩下的三个数位上的数字的取法有 $C_9^1\times C_8^1$ 种，因此，符合情况(2)的四位数有 $3\times C_9^1\times C_8^1$ 个.

综上所述，满足条件的四位数共有

$$3\times2\times C_9^2+3\times C_9^1\times C_8^1=432(个)$$

11 一个以边长 S 的正方形为底的物体，如图 1.6 所示. 其最上方的一条边平行于底面，且长度为 $2S$，其他边的长度均为 S，若 $S=6\sqrt{2}$，此物体的体积是多少？

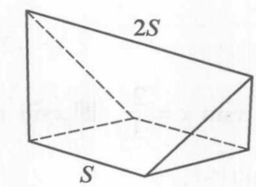

图 1.6

解法 1 如图 1.7 所示，因为原来以边长为 S 的正方形的四个顶点分别为 AC, BC, AD 和 BD 的中点，所以四面体 $ABCD$ 是正四面体. 且原正方形将正四面体 $ABCD$ 分成体积相等的两部分.

因为正四面体的棱为 $2S$，所以

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{底}\,h=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(2S)^2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}(2S)=\frac{2}{3}\sqrt{2}S^3$$

因此，所求物体的体积是

$$V=\frac{1}{2}V_{ABCD}=\frac{\sqrt{2}}{3}\times(6\sqrt{2})^3=288$$

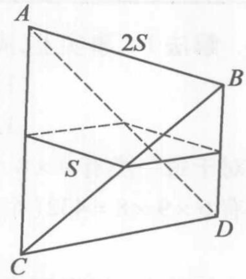

图 1.7

解法 2 如图 1.8 所示，$ABCD$ 是边长为 S 的正方形，EF 平行底面 $ABCD$，且 $EA=ED=FB=FC=S$. 根据对称性，EF 在底面的正射影 $E'F'/\!/AB$，EF 的中点 O 在底面的正射影为正方形 $ABCD$ 的中心 O'. 所以

$$OO'=\sqrt{\frac{3}{4}S^2-\frac{1}{4}S^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}S,\ OG=\frac{\sqrt{3}}{2}S$$

$$V_{O-ABCD}=\frac{1}{3}S^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}S=\frac{\sqrt{2}}{6}S^3$$

$$V_{O-EAD}+V_{O-FBC}=2V_{O-EAD}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}S^2\cdot DE\cdot\sin\angle OEK$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}S^2\cdot S\cdot\sin\angle E'KE$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}S^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{6}S^3$$

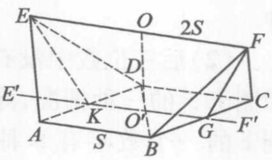

图 1.8

所以

$$V=\left(\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)S^3=\frac{\sqrt{2}}{3}\times36\times6\times2\sqrt{2}=288$$

解法 3 由拟柱体的体积公式，得

$$V=\frac{1}{6}h(S+4S_0+S')$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}S\cdot\left(S^2+4\cdot\frac{3}{4}S^2\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}S^3$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}(6\sqrt{2})^3=288$$

12 如图 1.9，一圆的直径 AB 是一个二位整数（十进制），把它的十进制表示的两个数字交换次序恰巧是垂直弦 CD 的长度，交点 H 到圆心 O 的距离为一正有理数，试决定 AB 的长度.

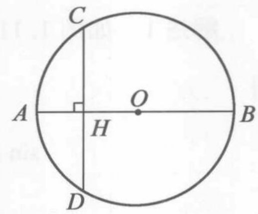

图 1.9

解 设 $AB=10x+y$，则 $CD=10y+x$. 又设 $OH=a$，则有

$$\left(\frac{10x+y}{2}\right)^2=\left(\frac{10y+x}{2}\right)^2+a^2$$

$$(2a)^2=(10x+y)^2-(10y+x)^2$$

即

$$99(x+y)(x-y)=(2a)^2$$

所以，$2a$ 是 3×11 的倍数. 设

$$2a=3\cdot 11\cdot k\quad (k\in\mathbf{N})$$

于是有

$$99(x+y)(x-y)=9\cdot 11^2\cdot k^2$$

$$(x+y)(x-y)=11\cdot k^2 \qquad (*)$$

若 $k=1$，则

$$\begin{cases}x+y=11\\x-y=1\end{cases}$$

所以，$x=6$，$y=5$. 因此直径 AB 的长度为 65.

若 $k=2$，则方程（$*$）的解和题设矛盾.

13 对 $\{1,2,\cdots,n\}$ 及其每一非空子集，定义一个唯一确定的“交替和”如下：按照递减的次序重新排列该子集，然后从最大的数开始交替地减或加后继的数（例如，$\{1,2,4,6,9\}$ 的“交替和”是 $9-6+4-2+1=6$，$\{5\}$ 的“交替和”就是 5）. 对 $n=7$，求所有这种“交替和”的总和.

解 把 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的所有子集（包括本身及空集）分成甲、乙两类. 凡子集中含有元素 n 的归甲类，而不含 n 的归乙类. 这样，若甲类中有集合 $\{n,a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，则乙类中就有集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，反之亦然，即 $\{n,a_1,a_2,\cdots,a_k\}\longleftrightarrow\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，而该两集合的“交替和”之和为 n，因此所有“交替和”的总和，就是甲类中集合的个数乘以 n，即

$$n\cdot(\mathrm{C}_{n-1}^0+\mathrm{C}_{n-1}^1+\cdots+\mathrm{C}_{n-1}^{n-1})=n\cdot 2^{n-1}$$

当 $n=7$ 时，得所有这种“交替和”的总和是 448.

14 在图 1.10 中有半径分别为 6 和 8 的圆，其圆心距为 12. 过两圆的一个交点 P 引一直线，使弦 QP 和 PR 长度相等，求 QP 的长度的平方.

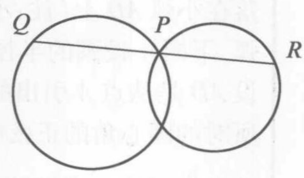

图 1.10

解法1　如图1.11所示，由 $\cos\angle PO_1O_2=\dfrac{12^2+8^2-6^2}{2\times12\times8}=\dfrac{43}{48}$，得

$$\sin\angle PO_1O_2=\frac{\sqrt{5\times7\times13}}{48}$$

$$d^2=8^2+6^2-2\times8\times6\times\frac{43}{48}=14$$

所以
$$d=\sqrt{14},\ d_1+d_2=2\sqrt{14}$$

又

$$8^2-d_1^2=6^2-d_2^2,\ d_1^2-d_2^2=28$$

$$d_1-d_2=\frac{28}{2\sqrt{14}}=\sqrt{14}$$

$$\cos\angle D_1O_1O_2=\frac{d_1-d_2}{12}=\frac{\sqrt{14}}{12},\ \sin\angle D_1O_1O_2=\frac{\sqrt{130}}{12}$$

$$\sin(\angle D_1O_1O_2-\angle PO_1O_2)=\frac{\sqrt{130}}{12}\times\frac{43}{48}-\frac{\sqrt{14}}{12}\times\frac{\sqrt{5\times7\times13}}{48}=\frac{\sqrt{130}}{16}$$

所以
$$QP=2\times8\times\frac{\sqrt{130}}{16}=\sqrt{130},QP^2=130$$

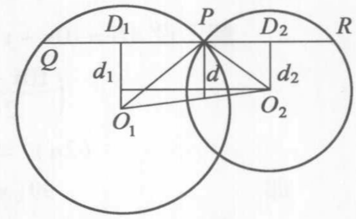

图1.11

解法2　如图1.12所示，$QP=PR=2a$，$O_1M=b$，$ON=c$，$O_1K=b-c$. 在直角三角形 O_1OK 中，有

$$OK^2+O_1K^2=O_1O^2$$

即
$$(2a)^2+(b-c)^2=12^2$$

而
$$b=\sqrt{64-a^2},\ c=\sqrt{36-a^2}$$

于是

$$4a^2+[\sqrt{64-a^2}-\sqrt{36-a^2}]^2=144$$

$$a^2-22=\sqrt{(64-a^2)(36-a^2)}$$

两边平方，经整理后得

$$4a^2=130$$

因此
$$QP^2=(2a)^2=4a^2=130$$

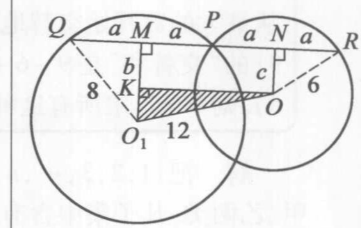

图1.12

15 如图1.13所示，一个圆内有两条相交的弦，其中，点 B 落在小弧 AD 上（注：小弧指所对的圆心角小于180°的那段弧，下同）. 设圆的半径为5，$BC=6$，且弦 AD 被 BC 等分. 又设 AD 是从点 A 引出的被 BC 等分的唯一弦. 这样，小弧 AB 所对的圆心角的正弦必是一个有理数. 若此数表示成既约分数 $\dfrac{m}{n}$，积 mn 是多少？

分析　如果能理解"AD 是从点 A 引出的被 BC 等分的唯一弦"一语的意思为：BC 是这样的一条弦，从定点 A 引出的许多弦中有且只有一条弦 AD 被它所平分. 那么，该题也就迎刃而解了. 因为弦 AD 的中点的轨迹是以 AO 为直径的

解法1　如图 1.14 所示,有

$$MC=3$$

$$MO=\sqrt{CO^2-MC^2}=4$$

$$NP=\frac{1}{2}AO=\frac{5}{2}$$

因为 $MNPQ$ 是矩形. 所以

$$MQ=\frac{5}{2},\ OQ=\frac{3}{2}$$

又 $\triangle PQO$ 是直角三角形, $OP=\frac{5}{2}$, $OQ=\frac{3}{2}$,所以 $PQ=2$. 从而得

$$MN=2, BN=1$$

因为 $\triangle BNP$ 是直角三角形, 所以

$$BP^2=1+\frac{25}{4}=\frac{29}{4}$$

在 $\triangle BOP$ 中

$$BP^2=OB^2+OP^2-2\cdot OB\cdot OP\cdot\cos\theta$$

所以 $$\cos\theta=\frac{24}{25},\ \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2}=\frac{7}{25}$$

因此积 mn 是 175.

解法2　如图 1.15 所示,有

$$NM=O'F=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(4-\frac{5}{2}\right)^2}=2$$

$$ON=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5},\ \cos\angle AON=\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \sin\angle AON=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\angle BON=\frac{OB^2+ON^2-BN^2}{2\cdot OB\cdot ON}=\frac{11}{5\sqrt{5}}$$

$$\sin\angle BON=\frac{2}{5\sqrt{5}}$$

所以

$$\sin\angle AOB=\sin(\angle AON-\angle BON)$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{11}{5\sqrt{5}}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{2}{5\sqrt{5}}=\frac{7}{25}$$

所以 $$mn=175$$

圆 P,要 BC 平分 AD,就要 BC 与圆 P 相交,而且只能有一个交点,即相切,否则有两条 AD 被同一 BC 所平分. BC 弦长为 6,它是以 O 为圆心,4 为半径的圆的切线,因此是两圆的公切线.

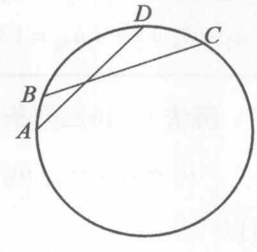

图 1.13

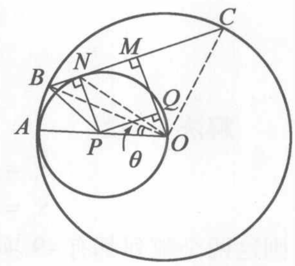

图 1.14

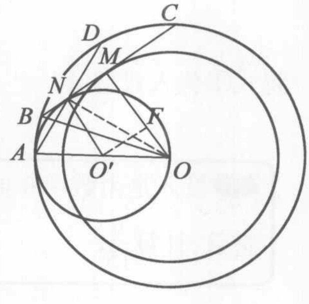

图 1.15