普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高职高专数学教程

○ 谢国瑞 等编

第二版

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高职高专数学教程

（第二版）

Gaozhi Gaozhuan Shuxue Jiaocheng

(Di-er Ban)

谢国瑞　汪国强
郝志峰　邵晓华　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是对第一版教材在编排上作了调整，在内容上作了适当充实（个别删节）后形成的。本书力图为高职院校数学课程提供一本合适的教材，力求使数学课程作为文化素质教育的重要载体，在增强高职学生就业能力、创新能力以及继续学习能力上发挥重要作用。

主要内容为：微积分概要、线性代数与概率论初步和应用数学方法选介，全书设计学时为每周 3-4 学时，两个学期讲完，实际教学内容可依各校各专业需要进行选取。

本书适合高职高专院校及成人教育专科各专业作为高等数学、工程数学的教学使用。

图书在版编目（CIP）数据

高职高专数学教程/谢国瑞等编．—2 版．—北京：高等教育出版社，2010．3

ISBN 978-7-04-028892-6

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①谢…　Ⅲ．①高等数学-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 028115 号

策划编辑　邓雁城　**责任编辑**　王玲玲　**封面设计**　王凌波
版式设计　王艳红　**责任校对**　杨雪莲　**责任印制**　毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京机工印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	2002 年 12 月第 1 版
开　　本	787×1092　1/16		2010 年 3 月第 2 版
印　　张	18	印　　次	2010 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	440 000	定　　价	25.00 元

物料号　28892-00

第二版前言

这本书是对第一版教材在编排上作了调整、在内容上作了适当充实(个别删节)后形成的.我们力图为高职院校数学课程提供一本合适的教材,力求使数学课程作为文化素质教育的重要载体,在增强高职学生就业能力、创新能力以及继续学习能力上发挥重要作用.

本书内容仍依第一版结构,按3篇进行安排.第1篇:微积分概要,分4章.介绍一元微积分的主要概念和计算,并涉及一些基本理论及典型的应用,在第4章,极扼要地介绍了偏导数及二重积分.第2篇:线性代数与概率论初步,也分4章.前两章是线性代数的内容,分别介绍线性代数方程组和矩阵代数及方阵的行列式的概念与计算.对 $n\times n$ 的线性代数方程组在系数矩阵满秩时介绍了三种解法:实用的G-J消元法,逆矩阵表示法,以及在理论表述中常用的行列式表示解的方法(Cramer法则).后两章是概率论,分别介绍事件及其概率,随机变量的概率分布和数字特征的概念和计算.对这前两篇,主要是努力把握合适的深广度,及藉数十年教学经验及编者的理解,处理好内容的陈述和展开,使能更便于教、学,符合高职学院的实际需要.第3篇是应用数学方法选介,在考虑内容取舍时曾颇费思量.值得介绍给高职学生的数学方法有很多:统筹方法,优选法,试验设计法,回归分析与方差分析,等均是不错的选择.但最终还是从教材的定位出发,限制篇幅,只保留了原书第一版已含的线性规划这一章的内容.这样做主要是为用过第一版的教师方便,同时也考虑解线性规划的单纯形法作为20世纪五大数学理论之一①,让高职学生一窥其方法也是有意义的.

为了在充实教学内容的同时不加重教学负担,书中还采取了两项措施,一是对少部分内容加了*标记,小的如一个例题或习题,大到一段甚至整个第3篇也是加了星号的,意即越过这样一部分或全部内容,不会太多影响教学或阅读的连贯性.例如导数的意义,这一段内容在课堂上不一定要讲,但浏览一遍也是有益的.有的例题虽然有意义但解决显得繁难,也会加上星号,读者在缺乏时间或耐心时,可跳越这样的内容,直接往后读;另一个措施是在习题的配置上,大体保持在第一版的水平,没有提高要求.

编写适合高职院校需求的数学教材是个颇具挑战性的任务,我们对此项工作虽然作过一些调研,也有一些教学实践经历(多年课堂教学及编写过多本教材),有了一些肤浅的认识(见第一版前言).但始终感到经验还非常不足,在试图解决一个问题时,可能会引发更多的问题.我们殷切期待得到广大高职数学教师,特别是长期关心本书的教师、领导及同学们的帮助.希望大家能提出宝贵意见或建议.

最后要对给予我们编写这本“十一五”国家级规划教材荣誉和信任的专家们表示感谢;也要感谢高等教育出版社领导和编辑对我们的信任和帮助;要特别感谢广东工业大学副校长郝志峰教授和苏州西交利物浦大学数理中心的领导和教授们对编写工作的关心支持和帮助、编者们虽竭尽全力,但终受时间与水平所限,书中错、漏、不妥之处在所难免,敬请读者批评指正.

编者

2009.12

① 见参考书目[13]

第一版前言

编写本书的目的是提供一本为高等职业教育、高等专科教育、成人高等教育专科各专业所适用的数学(或经济数学)课程的教材.

近年来,我们涉足高职高专数学课程的组织与教学,在实践中发现了一些教学上值得探讨的问题,问题之一就是教材问题.现行的高职高专数学课程教材几乎都是依本科相应课程教材的模式,在对内容作一些精简或压缩后编成.学生在学习数学的过程中往往倍感困难,而学完之后又常感觉掌握不好,我们深感长此以往,既不利于学生的成才也有损数学的教学本身.适逢我等有幸参与教育部组织的"新世纪高职高专教育数学课程教学内容体系改革、建设的研究与实践"项目,有机会对一些问题做了较多的调研与思考.

高职高专是高等教育中以培养高级应用性人才为目标的一个重要组成部分,培养目标规定学生应具有较强的动手能力及一定的专业基础理论知识.依照我们的理解,这一定的专业基础理论知识,应该是由学生通过参加实验、实训等主要教学环节来获取,而不是在课堂里通过理论推导(特别是借助数学演算的推导)来获得.同培养本科大学生相比,这可能是由培养目标的不同所带来的教学要求的实质性差异之一.所以在高职高专各专业教学计划中的数学课,为专业课铺垫基础的作用应该是微乎其微的.那么,在高职高专教育的计划中是否还有必要设置数学课呢?答案是肯定的,而且,不仅理、工、农、医、财经等各专业要设置,就是文科、社会学科类的专业也应该设置数学课.

数学科学是一门有着悠久历史而又永远年轻的学科,单从数学应用的这个侧面来看,近数十年来的进展就十分惊人.在现时,有不少的数学方法能够直接为实际工作者更好地发挥应用技能与提高工作质量提供手段,从而产生效益.数学的概念、语言及思维方式,正日益渗入到人们工作、生活的方方面面.每天的天气预报告诉你,今天的降水概率是多少,你将怎样理解和利用这个信息呢?在报章杂志及传媒中更不时会出现各种使用数学语言的报道.如果把这看成是一种趋势,也是不足为怪的.事实上,数学语言本来就是人类深层次的语言,不通过必要的训练、熏陶是不能自然地为人们所理解、掌握和使用的.用数学语言来表达、解释事物的意义,既准确、可靠又简单明了.有时用数学语言廖廖数言表达的意思,可能用大块的文章也未必能够讲清楚.这些都说明了在知识经济社会里,每一个追求提高工作质量、生活质量、注重效率的人,都应不断提高其数学文化修养,都应终生与数学为伴,何况是作为高级专门应用性人才的高职高专毕业生呢?应当承认,在我们的学生中,有不少人是抱着一种既敬又畏的紧张心情在学数学的,这就为数学的教学提出了这样的问题:怎样通过教学提高其亲和力.在学生努力学习数学的同时,必须使他们不断地增长知识和才能而不只是学一堆枯燥的公式和定理,要使他们不断地得到启迪和受到鼓励.

高职高专的数学课应该致力于提高学生的数学文化修养(着重在建立一些有用的数学概念并通过合适的数学内容的学习进行数学语言和思维方法的训练),提供一些能在学生将来的实

际工作中直接解决问题或产生效益的数学工具(或为学习、理解这类工具建立必要的数学基础).这样,我们选择了由目录所示的三个篇章来构成《高职高专数学教程》的内容.下面对我们的想法作一些简单的介绍,供使用本书的师生们参考,并请批评指正.

第1篇线性数学入门.我们从大家最熟知的等式和不等式切入话题,等式有恒等式与条件等式之分,其主题应包括恒等式的证明及条件等式(即通常所称的方程式)的求解;不等式也有绝对不等式与条件不等式之分,同样也涉及绝对不等式的证明及条件不等式的求解.这一篇的重点是讨论线性代数方程组的求解、矩阵代数以及从线性不等式组求解引向的线性规划.线性规划是20世纪40年代发展起来的一个重要的应用数学分支,这里对线性规划的模型与解法作了简明的介绍.本篇介绍的不少应用示例,大都颇具启发性,若稍作由此及彼的联想,就有可能用这些方法解决你现在或将会面临的某些实际问题.

第2篇微积分概要.享有电子计算机之父美誉的匈牙利裔美籍数学家冯·诺依曼(John von Neumann,1903—1957)曾说:"微积分是近代数学中最伟大的成就,对它的重要性作怎样的估计也不会过分."微积分自然是每一个接受高等教育的人都应该了解的数学分支.这里从讨论汽车驾座前方两个仪表(总里程表和速度表)读数间的关系说起,引入微积分的概念和所要讨论的问题.在这里看到,对线性函数,微积分的问题是用初等数学方法就可以解决的,因此微积分方法主要是对非线性函数在解决问题.在讨论中,我们既涉及了解决非线性问题的一种常用的思维方法:"线性化",也涉及了近代应用数学中"嵌入法"思想最简单的形态:把一个待求的常量看作是个函数值,通过求函数表达式再确定这个常量的值.这种化简为繁,从而可用上更为高级的工具以解决问题的思想方法,对其他领域也是一种有用的思想方法.应该说,这一篇的内容是极为精炼的,重点在建立微积分的概念和介绍解决问题的思想方法,所讲的简单计算和应用主要是为此服务的,我们想,这样的处理对高职高专的学生可能是合适的.

第3篇概率初步.本篇的主题讨论随机性问题,在人们工作和生活中会接触到太多的随机现象,如在抛掷一枚硬币时,结果是正面朝上还是反面朝上是随机的,如果没有随机意识,而试图找出抛掷时硬币的初始位置与出现结果的关系,那就走进了无法得出规律的死胡同.所以首先要建立随机意识,这样,对面临的随机现象就能正确地提出问题.例如,一名射手要对某目标进行多次独立的射击,你就不会问"射手将命中几次"的问题,而是问成"射中目标次数的概率分布是什么?"那么什么是概率呢?在实际问题中必须依照不同情况分别做出统计概率或主观概率的解释,既然概率可以有不同的解释,那就有理由怀疑从概率论引出的结果是否可靠,故而要简略地介绍有公理化概率论的背景,使能确信理论的正确与可靠.本篇介绍的"贝叶斯决策"、"求职面试"等不少应用示例也是颇具启发性的,并在方法上透视了处理确定性问题的方法是怎样在解决随机问题时发挥作用的.这一篇占用了全书较多的篇幅,一则因为要建立全新的随机意识和视角,再则是要培养对待随机性提出问题、解决问题的方式和方法.

本书的内容与相应题材的"标准"教材相比,是极为"简化"的,用这样的素材,经过任课老师的再创造,用于每周4学时的一学期课程,应该是能够完成的.而从以上对本书内容的粗略介绍可以看出,本书所包含的内容相对于所花的学时来说还是较为丰富的.根据这样的教材来组织教学,可能会比学生花同样的时间还尚未能从微积分的公式和定理中解脱出来的实效会好一点;也可能会让更多一些学生能略微放松一下紧张的心情走向数学课堂;甚至还可能会造就一部分学生产生用"标准"的教材再继续学习数学的要求和能力!

我们对项目课题的研究刚刚起步,调研不够,对问题的认识是很不全面和非常肤浅的,很可能在试图解决一个问题的时候会引发出更多的问题,甚至可能连问题都没有找准.但我们还是大胆地将这些极不成熟的看法提出并编写成教材公开出版希望抛砖引玉,我们殷切地期待着专家,特别是广大读者们的批评,我们希望能听到、看到和了解更多的专家和读者们对高职高专数学课程的看法和意见,更希望能早日出现更多的高职高专的数学好教材,让我们共同努力推进高职高专数学课程的教学改革和教材建设.

编　者

2002.9

目　录

第1篇　微积分概要

第2篇 线性代数与概率论初步

第3篇* 应用数学方法选介

第 1 篇　微积分概要

第 1 章　函数　极限

微积分是人类智慧最伟大的成就之一，自其诞生后的三百多年来，每一世纪都在证明微积分在阐明和解决来自数学、物理、工程技术及经济、管理、生物和社会科学等各领域的问题中发挥着巨大的威力. 微积分已经成为各类人才均需掌握的重要数学内容之一. 而从不同的水平去学习微积分，只要观点正确、方法无误，都可能在不同的层面上发现微积分的巨大实用价值和令人叹为观止的美. 本章简单介绍微积分的研究对象——函数，及微积分的研究工具——极限.

1.1　函　　数

1.1.1　变量

在研究实际问题、观察各种现象的过程中，如果关注事物的数量侧面，就会涉及各种各样的量，如长度、面积等几何量，速度、温度等物理量以及人数、金额等等，在过程中有些量的取值是可变的，也有一些则是保持恒定的. 例如，一架民航客机在离港起飞执行某一航班飞往某目的地的过程中，飞机在空中的飞行时间、距目的地的距离、飞机位置离地面的高度以及机上所载燃料的重量等等都是在不断变化的，而机上所载旅客的人数、所接受托运的行李总重量则是保持恒定的. 我们将这些在考察过程中始终保持恒定值的量称为**常量**，而将能取不同数值的量称为**变量**. 由于在数学中常抽去常量或变量的具体意义，只从数值方面关注，这样，今后处理的就分别是**实常数**或**实变数**，但仍分别称为**常量**或**变量**. 习惯上，常用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示常量，而用 $x,y,z,\cdots$ 表示变量.

为描述一个变量，常需指出它的变化范围，这就要用到**集合**，特别是**区间**的概念.

对于区间这样的数集，常约定用以下三种方式(之一或共同)表示：括号；不等式(集合)；实轴上的线段. 当 $a<b$ 时，将满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的数 x 的集合称为以 a,b 为左、右端点的**闭区间**，并用方括号表作 $[a,b]$，即有

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

有时也直接用不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 表示这一区间，或在实数轴上，给出以含端点(实心圈点)在内的线段几何表示(图 1-1(a)). 将满足不等式 $a<x<b$ 的数 x 的集合称为以 a,b 为左、右端点的**开区间**，用圆括号表作 (a,b)，即有

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\},$$

或在实数轴上,给出以不含端点(空心圈点)的线段几何表示(图1-1(b)).类似地还可以有左闭右开区间$[a,b)$及左开右闭区间$(a,b]$,

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

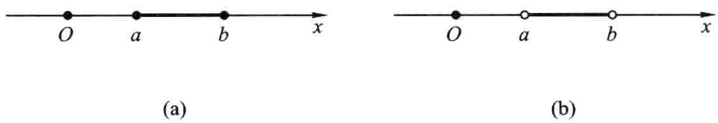

图1-1

除了这些"有限"区间外,还可以有无穷区间:$(-\infty,+\infty)$,$(-\infty,b)$,$(-\infty,b]$,$(a,+\infty)$,$[a,+\infty)$.其中$(-\infty,+\infty)$就是实数集$\mathbf{R}$,这些都可用不等式描述,例如有

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$$

等等.

1.1.2　函数

日常生活中,函数一词表达了这样的思想:通过某一事实的信息去推知另一事实.在数学上,最重要的函数就是那些可根据某一数值可推知另一数值的函数.

设在某个研究过程中,出现多个变量,而且它们以一定的方式相互关联着.例如在民航客机依固定航线执行航班飞行任务的过程中,飞行的时间t,距目的地的距离d,剩余燃料的重量w等是依照确定关系一起在变化着的量.如果称能直接测定的飞行时间t作为飞行过程的自变量,那么,可将d及w等看作是因变量(或应变量),并分别将d与t及w与t的关系各看成它们之间的函数关系.确切地,有如下的函数定义:

定义1　设x和y是同一过程中的两个变量,若当x取其变化范围D内任一值时,按某种规则f,总能唯一确定变量y的一个值与之相对应,则称y是x的函数,记作

$$y=f(x),$$

称变量x是**自变量**,变量y是**因变量**(或**应变量**,即对自变量的响应),表示**对应法则**的f是函数(function)的记号,D是函数的**定义域**(Domain),函数f的定义域也常记作$D(f)$.

由定义看出,定义域与对应规则是函数概念的两大要素.对于定义域是$D(f)$的函数$y=f(x)$,称集合

$$\{y\mid y=f(x),x\in D(f)\}$$

为该函数的**值域**(Range),可记作$R(f)$,显然,一个函数的值域由定义域D及对应法则f所完全确定.

例1　公式

$$y=ax^2$$

给定了一个以x为自变量、y为因变量的函数,其中的a是个常数.虽然这里并未明确这个函数的定义域是什么,但因为对x的每一具体的值,依照这个公式都可唯一地确定一个对应的变量y

的值. 故作出这样的**约定**：凡以公式（表达式）给出的函数，在没有指明其定义域时，总以使公式有意义的范围作为其定义域，并称这样所定是函数的**自然定义域**. 因此，本例函数的定义域是实数集 **R**.

需要说明的是，虽然可以认为

$$y=\pi x^2 \quad 与 \quad A=\pi r^2$$

是同一个函数，即 x 与 y 的对应规则及 r 与 A 的对应规则是一样的，但当将后一式中的 r 及 A 分别解释成圆半径及圆面积时，就应该认为后一函数与前者不同，因为前者的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 与后者的定义域 $[0,+\infty)$ 是不同的，当然后一个定义域不是自然定义域而是由问题的实际意义所规定的.

例 2　据邮局公布，国内异地信件质量 W（单位：g）与邮资 P（单位：元）的关系为每 20 g 资费为 0.8 元. 若列出表达式，则可写为

$$P(W)=\begin{cases}0.8, & 0<W\leqslant 20,\\ 1.6, & 20<W\leqslant 40,\\ 2.4, & 40<W\leqslant 60,\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

这是国内异地信件质量与其资费的一个函数关系式.

像这样，自变量在定义域的不同范围（通常是区间）依不同公式确定对应因变量值的函数称为**分段函数**. 本例所给的就是个分段函数. 特别指出，例如由表达式

$$y=f(x)=\begin{cases}-x, x<0,\\ 1+x^2, 0\leqslant x<1,\\ 4-2x^2, x\geqslant 1.\end{cases} \tag{1-1}$$

给出的分段函数绝非三个函数，而是一个函数.

根据这个函数的表达式，可求出例如有

$$f(-2)=2,\ f(0.1)=1.01,\ f(2)=-4,$$

以及有

$$f(x^2)=\begin{cases}1+x^4, |x|<1,\\ 4-2x^4, |x|\geqslant 1\end{cases} \tag{1-2}$$

等等.

例 3　下面列出的几个函数均为数学上常用的分段函数.

（1）绝对值函数　$y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0.\end{cases}$

（2）符号函数　$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x=0,\\ -1, x<0.\end{cases}$

（3）取整函数　可用一句话描述为"不超过 x 的最大整数"，这个函数的专用符号是 $y=\operatorname{ent}(x)$ 或常用方括号表成 $y=[x]$.

例如有

$$[1.7]=1,\ \left[\frac{2}{3}\right]=0,\ [-0.3]=-1\ \text{等}.$$

实践中,经常要用分段函数来描述变量间的关系,例如在商家出售某货物时,其收益 R(revenue)应是出售该货物数量 q(quantity)的函数,但在实际操作时,由于在 q 的不同范围商家会给顾客不一样的折扣,所以 R 应是 q 的一个分段函数.

有一些函数是自然地由图像形式给出的,例如图 1-2 的心电图(EKG)是把一个显示电流变动的变数表成时间的函数,在这两个图像表示的函数中,显示了两位被检查者的心率模式,一位正常,另一位不正常. 虽然可以构造出心电图函数的近似公式,但很少这样做. 因为医生从这些图像法给出的函数中能容易地得到所需要的信息,这比从公式去看是否出现这些重复图形要容易得多.

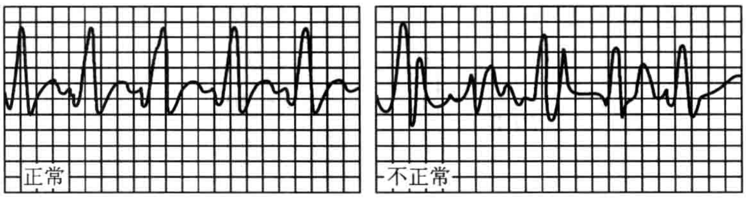

图 1-2

除了用图像法给出函数外,在微积分中讨论的函数,大都是由公式的形式给定,但为了帮助直观地理解讨论的概念及结果,常要借助图像来说明. 这样,对于公式给出的函数,常要在坐标平面作出其图像. 而对坐标平面上可以看成是某个函数图像(平行于纵轴的直线与曲线至多只有一个交点)的曲线,也常要能从其几何特征看出函数的对应特性. 正确地使用图像,能有效地帮助理解微积分的概念,反过来,在掌握了微积分的概念和方法之后,将能更好地画出函数图形的本质面貌.

例 4 试作出由(1-1)式给出的函数

$$y=f(x)=\begin{cases}-x,x<0,\\1+x^2,0\leqslant x<1,\\4-2x^2,x\geqslant 1\end{cases}$$

的图像.

解 这是一个分段函数,其每一段的图像都是已知的. 在 $x<0$ 时,是直线 $y=-x$;在 $0\leqslant x<1$ 时,$y=1+x^2$ 是开口向上的抛物线;在 $x\geqslant 1$ 时,$y=4-2x^2$ 是开口向下的抛物线,这样,作为这个分段函数的图像可整体画出,如图 1-3 所示.

例 5 图 1-4 所示的折线过点 $O(0,0)$,$A(1,1)$,$B(2,0)$,若将其看作在$[0,2]$上有定义的函数 $y=f(x)$的图像,试求 $f(x)$的表达式;并求图中阴影部分面积作为 x 的函数 $A(x)$的表达式.

解 在直线段 OA 上任取一点 $C(x,y)$,有 $x\in[0,1]$,显然有 $C(x,f(x))$. 由直线段 OC 与 OA 同斜率,有

$$\frac{f(x)-0}{x-0}=\frac{1-0}{1-0},\text{即}\ f(x)=x.$$

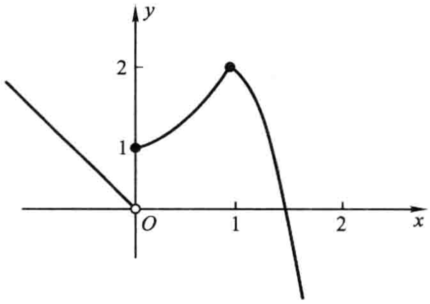

图 1-3

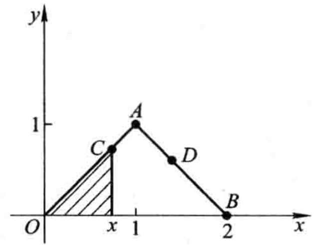

图 1-4

且在 $x=0$ 时也成立. 再在直线段 AB 上任取一点 $D(x, f(x))$, $x\in(1,2]$, 则因 AD 与 AB 同斜率, 而有

$$\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{0-1}{2-1}, \text{即 } f(x)=2-x,$$

合起来, 有

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$$

从图 1-4 看出, 在 $x\in[0,1]$ 时, $A(x)$ 是底为 x 高是 $f(x)$ 的直角三角形面积, $A(x)=\frac{1}{2}x\cdot f(x)$, 而在 $x\in(1,2]$ 时, $A(x)$ 可看作是三角形 OAB 的面积(是 $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$), 与底为 $(2-x)$ 高是 $f(x)$ 的一个小直角三角形面积(是 $\frac{1}{2}\cdot(2-x)\cdot f(x)$)之差, 于是有

$$A(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}xf(x), & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 1-\frac{1}{2}(2-x)f(x), & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1-\frac{1}{2}(2-x)^2, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$$

1.1.3　函数的几个特性

1.1.3.1　单调性

从图 1-3 看出, 例 4 所给函数的函数值在 $x\in[0,1)$ 时, 随着 x 的增大, 函数的图形是往上升的. 在 $x\in(-\infty,0)$ 或 $x\in[1,+\infty)$ 时, 则随着 x 的增大, 函数的图形是往下降的, 亦即函数值 $f(x)$ 是在减小的. 一般地, 给出如下定义.

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上有定义, 对任意两点 x_1、$x_2\in(a,b)$, 当 $x_1<x_2$ 时必有 $f(x_1)<f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上是单调增[加]的(或用几何语言为单调[上]升的); 反之, 如

果当 $x_1<x_2$ 时必有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上是单调减[少]的（或单调[下]降的）. 有这样性质的区间 (a,b) 称为函数 $y=f(x)$ 的一个单调[增（或减）]区间.

说明：1. 定义 2 中的区间可以是有限区间，也可以是无穷区间，可以是包含一个端点也可以是包含两个端点的闭区间；

2. 若函数在整个定义区间上都是单调增（或减）函数，则简称函数为单调增（或减）函数，或径称增（或减）函数；

3. 在定义 2 中若将当 $x_1<x_2$ 时必有 $f(x_1)<f(x_2)$ 改为 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是非严格单调增或单调非减. 类似地，可有非严格单调减或单调非增的说法.

例 6　图 1-5 是函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的图像，指出函数的单调区间.

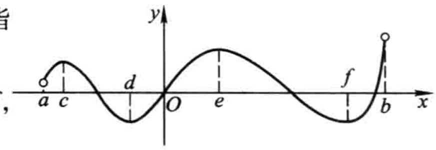

图 1-5

解　函数 $y=f(x)$ 的单调增加区间是 $(a,c]$，$[d,e]$，$[f,b)$；单调减少区间是 $[c,d]$，$[e,f]$.

例 7　证明函数 $f(x)=-3x+2$ 在定义域内是减函数.

解　函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$.

因为 $f(x_1)-f(x_2)=(-3x_1+2)-(-3x_2+2)=3(x_2-x_1)>0$，所以 $f(x_1)>f(x_2)$，因此函数 $f(x)=-3x+2$ 是减函数.

1.1.3.2　函数的奇偶性

观察函数 $f(x)=x^2$ 和 $f(x)=2x$ 的图像（图 1-6(a)、(b)）.

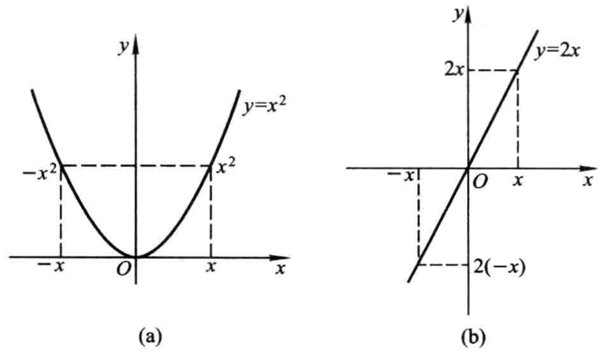

图 1-6

我们知道，函数 $f(x)=x^2$ 的图像是关于 y 轴对称的抛物线. 从数值上看：

$$f(-1)=1,\ f(1)=1，得\ f(-1)=f(1)；$$

$$f(-2)=4,\ f(2)=4，得\ f(-2)=f(2)；$$

…………

而且对定义域内任意的 x，都有 $f(-x)=x^2$，$f(x)=x^2$，即 $f(-x)=f(x)$.

对函数 $f(x)=2x$ 做同样的分析，可知当自变量互为相反数时，相应的因变量也是相反数. 在上述观察下可一般地给出如下的定义：

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则