

计算机辅助电路 分析与设计

中 册

电工教研室

余庆健 编

华东工程学院

一九八二年五月

中 册 目 录

第九章 非线性状态方程组的数值解法	1
§ 9—1 非线性状态方程组解的存在性与唯一性	1
§ 9—2 用Taylor级数展开式求数值解	5
§ 9—3 Runge — Kutta方法	8
§ 9—4 线性多步法的基本概念	12
§ 9—5 Adams 方法	19
§ 9—6 Gear 方法	27
§ 9—7 预测—校正法	31
§ 9—8 步长与阶的自动控制	45
§ 9—9 后差公式	50
§ 9—10 微分—代数方程组的多步解法	54
第十章 网络的周期解及讯号分析	60
§ 10—1 线性网络的周期解	60
§ 10—2 非线性网络的周期解	61
§ 10—3 非线性振荡器的稳态周期解	68
§ 10—4 讯号的频谱分析——快速 Fourier 变换	73
§ 10—5 计算非线性网络周期解的谐波平衡法	91
§ 10—6 拟线性网络的波形畸变分析	102
第十一章 网络灵敏度计算及容差分析	113
§ 11—1 网络灵敏度的概念	113
§ 11—2 分析线性网络灵敏度的灵敏度网络	115
§ 11—3 分析非线性网络灵敏度的灵敏度网络	128
§ 11—4 灵敏度分析的伴随网络法	132
§ 11—5 非线性电阻网络的伴随网络	151
§ 11—6 用伴随网络计算时域灵敏度	154
§ 11—7 最坏情况分析	160
§ 11—8 随机变量及统计分析	168
§ 11—9 Monte — Carlo方法	176

第十二章 大规模网络分析和稀疏矩阵技术	186
§ 12—1 大规模网络分析概述	186
§ 12—2 网络的宏模型和宏模拟	186
§ 12—3 网络的“撕裂”技术	197
§ 12—4 稀疏矩阵技术概述	206
§ 12—5 线性方程组的迭代解法	208
§ 12—6 具有稀疏系数矩阵的线性方程组的直接解法	212
§ 12—7 存贮稀疏矩阵的数据结构	224
§ 12—8 具有稀疏系数矩阵的线性方程组的预分析	231
§ 12—9 稀疏表格法	242

第九章 非线性状态方程组的数值解法

§9—1 非线性状态方程组解的存在性与唯一性

在第七章中我们指出, 非线性状态方程组的标准形式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (9-1-1)$$

式中 $\mathbf{x}$ 和 $\boldsymbol{\varphi}$ 为 n 维向量, $\mathbf{u}$ 为 m 维向量。设

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \quad (9-1-2)$$

将(9-1-2)代入(9-1-1)得

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (9-1-3)$$

(9-1-3)是非线性常微分方程组的一般形式。在本章中我们来研究它的数值解法。

应当指出, 由于线性常微分方程组是非线性常微分方程组的特例, 因此本章中给出的解法同样适用于线性状态方程组的求解。

与非线性代数方程组相似, 非线性微分方程组也经常发生没有解或是没有唯一解的情形, 因而有必要研究它的解的存在性与唯一性。

例 1

如图9-1-1所示网络, 设非线性电容

$$c(v) = \frac{1}{3}v^2$$

则

$$q(v) = c(v) \cdot v = \frac{1}{3}v^3$$

$$\dot{q}(v) = v^2 \frac{dv}{dt} = -v$$

即

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{v} \quad (9-1-4)$$

对于初始条件 $v(0) = v_0$, 该状态方程的解为

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2t} \quad t > 0$$

由此可见, 若 $v_0 = 0$

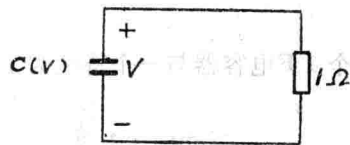


图 9-1-1

则该状态方程无实数解。即使 $v_0 \neq 0$ ，则实数解也只是在 $0 < t < \frac{v_0^2}{2}$ 时存在。在这两种情况下，我们得到的解都没有物理意义。这种情况之所以发生，从根本上说是由于上述电路模型有缺陷，因而为了解决这个问题，必须重新构成电路模型。但是我们从数学表达式上也可以看出其中的问题。

由 (9-1-4) 可见，若 $v_0 > 0$ ，则 $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} < 0$ ，于是随着 t 的增长解 $v(t)$ 下降。

但随着 $v(t)$ 下降， $\left| \frac{dv}{dt} \right| = \left| -\frac{1}{v(t)} \right|$ 不断增大，使 $v(t)$ 下降的速率越来越大。到某个时刻 t_p ，

使 $v(t_p) = 0$ ，这时 $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=t_p} \rightarrow -\infty$ 。如果 $v(t)$ 继续下降，则在 $t_p + 0$ 时， $v(t_p + 0) < 0$ ，

$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t_p+0} = +\infty$ 。这种情况与 $v(t)$ 为连续可导函数的性质发生矛盾。因此，一旦到达某一

时刻 t_p 使 $v(t_p) = 0$ ，则对于 $t > t_p$ ，(9-1-4) 的解不复存在。

(9-1-4) 的无解，是由于该方程的右函数有间断点。与此相反，如果方程组 (9-1-3) 的右函数是连续的，则可保证在一定范围内解的存在性。这一点由 Peano 定理给出。

Peano 存在定理

设 $f(x, t)$ 在 (x_0, t_0) 连续，则对于给定的初始条件 $x(t_0) = x_0$ ，在某一时间区间 $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon$ (其中 ε 为一正常数) 内，(9-1-3) 至少存在一个解。

但是，满足 Peano 存在定理条件的微分方程组，不一定有唯一解。

例 2

一个 1 F 电容器与一个特性为 $i = -\frac{3}{2}v^{\frac{1}{3}}$ 的电阻器并联的电路，其状态方程为

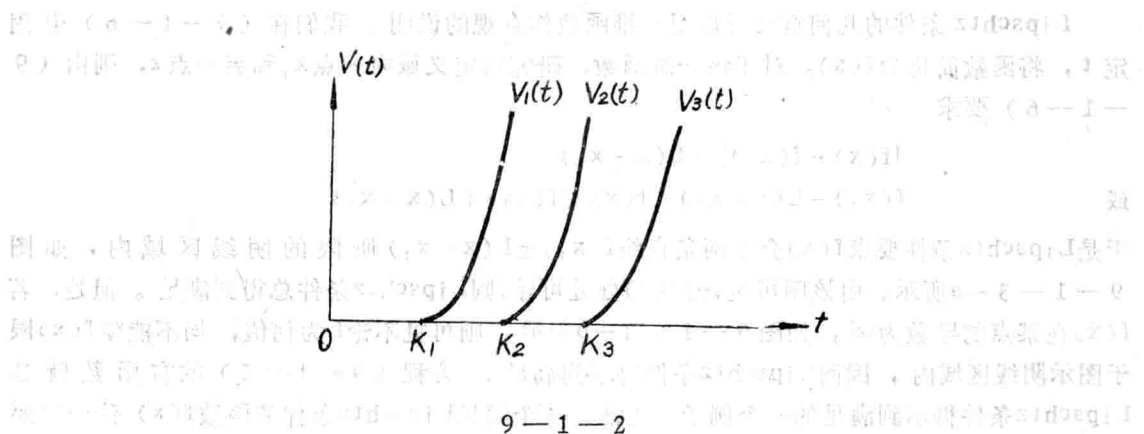
$$\frac{dv}{dt} = \frac{3}{2}v^{\frac{1}{3}} \quad (9-1-5)$$

若初始条件为 $v(0) = 0$

则容易证明

$$v(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq k \\ (t-k)^{\frac{3}{2}} & t > k \end{cases}$$

是 (9-1-5) 的解，其中 k 为任意非负实数。因此 (9-1-5) 的解不是唯一的。图 9-1-2 给出了其中的三个解。由此可知，除了对 (9-1-3) 的右函数 $f(x, t)$ 给出连续的条件外，还需补充某种条件来保证其解的唯一性。它通常以 Lipschitz 条件的形式给出。



定义:

设函数 $f(x, t)$ 定义在 $n+1$ 维空间的有界区域 D 上。若对 D 内任意两点 (x_1, t) 和 (x_2, t) 存在常数 L , 使不等式

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad (9-1-6)$$

得到满足, 则称 $f(x, t)$ 在 D 内满足 Lipschitz 条件, 式中 L 称为 Lipschitz 常数。

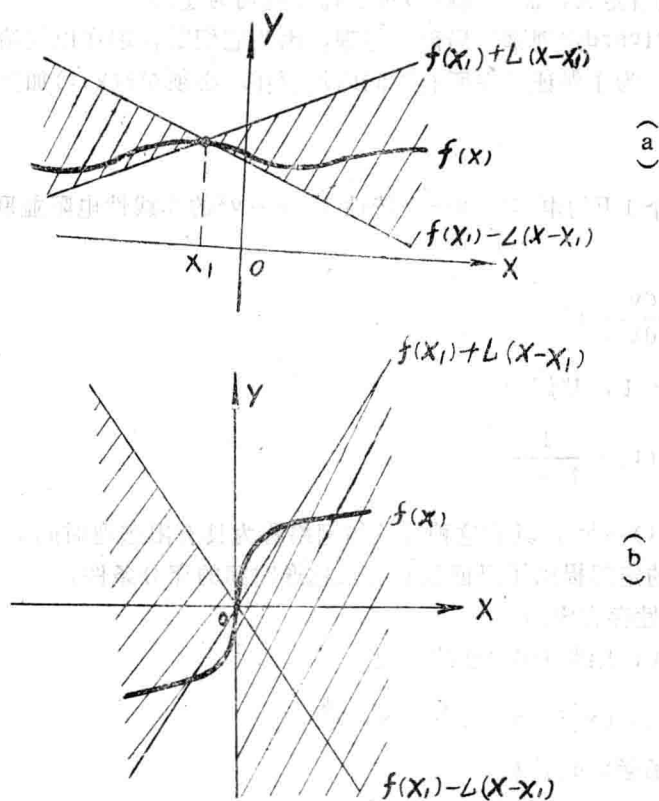


图 9-1-3

Lipschitz 条件的几何意义可以用一维函数作直观的说明。我们在 (9-1-6) 中固定 t ，将函数简化为 $f(x)$ 。对于该一维函数，研究其定义域内一点 x_1 和另一点 x ，则由 (9-1-6) 要求

$$|f(x) - f(x_1)| \leq L(x - x_1)$$

或

$$f(x_1) - L(x - x_1) \leq f(x) \leq f(x_1) + L(x - x_1)$$

于是 Lipschitz 条件要求 $f(x)$ 介于两条直线 $f(x_1) \pm L(x - x_1)$ 所限的阴线区域内，如图 9-1-3-a 所示。由该图可见，若 $f(x)$ 处处可导，则 Lipschitz 条件总得到满足。但是，若 $f(x)$ 在某点的导数为 ∞ ，如图 9-1-3-b 所示，则可见不论 L 为何值，均不能使 $f(x)$ 限于图示阴线区域内，因而 Lipschitz 条件得不到满足。方程 (9-1-5) 的右函数就是 Lipschitz 条件得不到满足的一个例子。当然，一个满足 Lipschitz 条件的函数 $f(x)$ 不一定要是处处可导的，但是它一定不能有 ∞ 的导数。

有了 Lipschitz 条件，就可以给出 (9-1-3) 解的唯一性定理。

Picard 存在和唯一性定理

若 $f(x, t)$ 在 $n+1$ 维空间 D 内连续，并对 D 内的 x 满足 Lipschitz 条件，则对于任何 $(x_0, t_0) \in D$ ，存在着唯一解 $x(t)$ ，它满足初始条件 $x(t_0) = x_0$ ，并在某时间区间 $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon$ (ε 为一正常数) 内有定义，而且解 $x(t)$ 对于 x_0 和 t_0 均为连续。

Peano 定理和 Picard 定理都是局部性定理，因为它们断言解在以初始时刻 t_0 为中心的一个非零区间内存在。为了保证解在所有时间内均存在，必须对 $f(x, t)$ 加上更为苛刻的条件。

例 3

一个网络内一个 1 F 的电容器和一个特性为 $i = -v^2$ 的非线性电阻并联而成。该网络的状态方程为

$$\frac{dv}{dt} = v^2$$

对于初始条件 $v(0) = 1$ ，其解为

$$v(t) = \frac{1}{1-t}$$

可见当 $t \rightarrow 1$ 时， $v(t) \rightarrow \infty$ 。具有这种特性的网络称为具有有限逃逸时间，很显然它不是物理上可实现的。下面的定理提供了保证没有有限逃逸时间的充分条件。

Wintner 全域性存在定理

设 $f(x, t)$ 在 $n+1$ 维空间内连续，记

$$r \triangleq \|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

若能找到一个连续函数 $L(r)$ ，使

$$|f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)| < L(r) \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad (9-1-7)$$

对 $0 \leq r < \infty$ 的所有值成立，且

$$\int_0^{\infty} \frac{dr}{L(r)} = \infty \quad (9-1-8)$$

则 (9-1-3) 的所有解在 $-\infty < t < \infty$ 的所有时间上有定义。

我们注意到, Wintner 的全域性存在定理所需的条件是很强的。粗略地说, 这些条件不让 $f(x, t)$ 变化得十分迅速。例如, 这些条件排除了所有次数超过 1 的多项式。但是这些条件决不是多余的, 因为在例 3 中我们已经看到了一个二次多项式 $f(x) = x^2$ 会产生出有限逃逸时间。另一方面, Wintner 定理所需的条件是许多初等函数能够满足的, 例如 $f(x) = (1 + x^3)^{-\frac{1}{2}}, (1 + x^2)^{\frac{1}{3}}, x^3/(1 + x^2), xe^{\sin x}$ 等。实际上, 我们有如下推论:

推论

如果存在一个从区间 $(0, \infty)$ 到区间 $(0, \infty)$ 的分段连续映射 L (记 R_+ 为区间 $(0, \infty)$), 则该映射可表为 $R_+ \rightarrow R_+$, 使

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq L(t) \|x_1 - x_2\| \quad (9-1-9)$$

对所有 $t \in R_+$ 和对 n 维空间的所有 x_1, x_2 成立 (这个条件称为全域性 Lipschitz 条件), 则方程组 (9-1-3) 对所有 $0 \leq t < \infty$ 有唯一解。

上述定理对于非线性微分方程组 (9-1-3) 的求解提供了数学基础。应当指出, 它们都是一些充分条件, 而非必要条件。也就是说, 即使 $f(x, t)$ 不满足 Wintner 定理的条件, (9-1-3) 仍可能在 $t \geq t_0$ 的整个区间内有解。另一方面, 从实际使用的观点来看, 我们通常不是首先去验证所求解的方程组是否满足这些定理的条件 (对于用数字计算机形成与求解方程组来说, 要做到这一点通常是很困难的), 而是直接去解。只有在求解发生困难或解出的结果有错误时才将这些定理作为分析研究的一个手段。

§ 9-2 用 Taylor 级数展开式求数值解

给定方程

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (9-2-1)$$

和初始条件

$$x_0 = x(t_0) \quad (9-2-2)$$

我们选定步长 h , 这时利用 Taylor 级数展开式, 可以由 $x_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ 求得 x_{n+1} , 从而逐点求得 (9-2-1) 在 (9-2-2) 下的数值解。

设 (9-2-1) 在初始条件 (9-2-2) 下的准确解为 $\hat{x}(t)$, 将 $\hat{x}(t_{n+1}) = \hat{x}(t_n + h)$ 在 $t = t_n$ 处展开成 Taylor 级数:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t_n+h) &= \hat{x}(t_n) + h\hat{x}^{(1)}(t_n) + \frac{h^2}{2}\hat{x}^{(2)}(t_n) + \cdots \\ &\quad + \frac{h^p}{p!}\hat{x}^{(p)}(t_n) + O(h^{p+1})\end{aligned}\quad (9-2-3)$$

式中 $O(h^{p+1})$ 表示Taylor级数展开式中 h^{p+1} 项及更高次项之和。当 $h \rightarrow 0$ 时,它是 h^{p+1} 的等价无穷小量。

我们在(9-2-3)中舍去 $O(h^{p+1})$, 记

$$\begin{aligned}T_p(\hat{x}_n, t_n, h) \\ &\triangleq \hat{x}^{(1)}(t_n) + \frac{h}{2!}\hat{x}^{(2)}(t_n) + \cdots + \frac{h^{p-1}}{p!}\hat{x}^{(p)}(t_n) \\ &= f(\hat{x}_n, t_n) + \frac{h}{2!}f^{(1)}(\hat{x}_n, t_n) + \cdots + \frac{h^{p-1}}{p!}f^{(p-1)}(\hat{x}_n, t_n)\end{aligned}\quad (9-2-4)$$

则(9-2-3)可近似表为

$$\hat{x}(t_n+h) \triangleq \hat{x}(t_n) + hT_p(\hat{x}_n, t_n, h) \quad (9-2-5)$$

但实际上,我们得到的不是准确解 $\hat{x}(t_n)$,而是它的近似解。如果用 x_n 代替(9-2-5)

右式中的 $\hat{x}(t_n)$,则所得的也是 $\hat{x}(t_n+h)$ 的近似解 x_{n+1} ,于是我们得到求(9-2-1)在初始条件(9-2-2)下数值解的一个算法。

$$x_{n+1} = x_n + hT_p(x_n, t_n, h) \quad (9-2-6)$$

它称为Taylor算法,其中 p 称为该算法的阶数。

下面给出几个Taylor算法的公式。

1. 一阶公式:

在(9-2-5)中令 $p=1$,得一阶公式

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, t_n) \quad (9-2-7)$$

注意到 $f(x_n, t_n) = \dot{x}_n$,故(9-2-7)即为向前的Euler公式。

2. 二阶公式:

令 $p=2$,则

$$\begin{aligned}T_2(x_n, t_n, h) \\ &= f(x_n, t_n) + \frac{h}{2}f^{(1)}(x_n, t_n)\end{aligned}$$

其中

$$f^{(1)}(x_n, t_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Big|_{t=t_n} = f_x(x_n, t_n)f(x_n, t_n) + f_t(x_n, t_n) \quad (9-2-8)$$

于是得二阶公式

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, t_n) + \frac{h^2}{2} [f_x(x_n, t_n)f(x_n, t_n) + f_t(x_n, t_n)] \quad (9-2-9)$$

3. 三阶公式:

令 $p=3$, 得三阶公式

$$x_{n+1} = x_n + hT_3(x_n, t_n, h) \quad (9-2-10)$$

式中

$$\begin{aligned} T_3(x_n, t_n, h) = & f(x_n, t_n) + \frac{h}{2} [f_x(x_n, t_n)f(x_n, t_n) + f_t(x_n, t_n)] + \\ & + \frac{h^2}{3!} \{ f_{tt}(x_n, t_n) + 2f_{tx}(x_n, t_n) \cdot f(x_n, t_n) \\ & + f_{xx}(x_n, t_n)f^2(x_n, t_n) + [f_t(x_n, t_n) + \\ & + f_x(x_n, t_n)f(x_n, t_n)] \cdot f_x(x_n, t_n) \} \end{aligned} \quad (9-2-11)$$

利用Taylor级数展开式作数值解, 其 p 阶公式的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$ 。如果给出另一些条件, 则我们可以估计其准确解 $\hat{x}(t_n)$ 与数值解 x_n 之间的累计截断误差。这由以下定理给出。

定 理:

设 (9-2-1) 在初始条件 (9-2-2) 下的准确解为 $\hat{x}(t)$, $t \in [t_0, t_0+T]$ 。若满足下列条件:

$$1. \left| \frac{d^{p+1}\hat{x}(t)}{dt^{p+1}} \right| \leq X_{p+1}, \quad t \in [t_0, t_0+T] \quad (9-2-12)$$

2. $T_p(x_n, t_n, h)$ 满足Lipschitz条件, 即

$$|T_p(x_n^1, t_n, h) - T_p(x_n^2, t_n, h)| \leq L |x_n^1 - x_n^2| \quad (9-2-13)$$

则 $t=t_n$ 时的截断误差

$$\hat{\varepsilon}_{tn} \triangleq |\hat{x}(t_n) - x_n| \quad (9-2-14)$$

由下式限定

$$\hat{\varepsilon}_{tn} \leq \hat{K}_p h^p \quad (9-2-15)$$

式中

$$K_p = \frac{X_{p+1}}{(p+1)!} \left[\frac{e^{L(t-t_0)} - 1}{L} \right] \quad (9-2-16)$$

与 h 无关。

由(9-2-15)可知,若 $\hat{x}(t)$ 满足上述定理的条件,则通常阶数 p 越高,累计截断误差就越小。对于给定的 $\hat{\varepsilon}_{tn}$ 和阶数 p ,则总可以找到一个适当的步长使(9-2-13)得到满足,从而将累计截断误差控制在一定范围内。但是从前面的计算公式看到,利用Taylor级数展开式作数值计算,要计算 $f(x, t)$ 的偏导数,且算法的阶数越高,偏导数的阶数也相应地增高,这将给数值计算带来很大的不便,又因为通常只能用计算差商来近似导数,所以高阶偏导数的计算本身就有较大的误差。正是由于上述原因,所以Taylor级数展开式实际上很少用于求微分方程的数值解。

§ 9-3 Runge—Kutta方法

Runge—Kutta方法是解常微分方程组的一种常用的数值解法,它用

$$\begin{aligned} K_p(x_n, t_n, h) \\ = a_1 K_1 + a_2 K_2 + \dots + a_p K_p \end{aligned} \quad (9-3-1)$$

来代替(9-2-5)中的 $T_p(x_n, t_n, h)$,式中

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_n, t_n) \\ K_2 &= f(x_n + \mu_1 h K_1, t_n + r_1 h) \\ &\dots \end{aligned} \quad (9-3-2)$$

$$K_p = f(x_n + \mu_{p-1} h K_{p-1}, t_n + r_{p-1} h)$$

并使之满足

$$|K_p(x_n, t_n, h) - T_p(x_n, t_n, h)| \leq R h^p \quad (9-3-3)$$

式中 R 为与 h 无关的一个常数。这样,我们可得到计算公式

$$x_{n+1} = x_n + h K_p(x_n, t_n, h) \quad (9-3-4)$$

(9-3-4)称为 p 阶Runge—Kutta公式。

由于Taylor公式(9-2-5)的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$,因而当(9-3-3)得到满足时,Runge—Kutta公式的局部截断误差也是 $O(h^{p+1})$,它与Taylor公式属于同一数量级。由(9-3-2)可见,Runge—Kutta公式用计算一些特殊点的 $f(x, t)$ 的函数值代替了Taylor公式中计算 $f(x, t)$ 的导数值,这就克服了Taylor公式的缺点。

下面我们以二阶Runge—Kutta公式为例说明(9-3-1)和(9-3-2)中 $a_i (i=1, \dots, p)$ 、 μ_i 、 $r_i (i=1, \dots, p-1)$ 的推导方法。

当 $p=2$ 时,

$$\begin{aligned} K_p(x_n, t_n, h) &= a_1 K_1 + a_2 K_2 \\ &= a_1 f(x_n, t_n) + a_2 f(x_n + \mu_1 h K_1, t_n + r_1 h) \end{aligned} \quad (9-3-5)$$

将上式第二项在 x_n, t_n 处作Taylor级数展开, 得

$$\begin{aligned} &f(x_n + \mu_1 h K_1, t_n + r_1 h) \\ &= f(x_n, t_n) + \frac{\partial f(x_n, t_n)}{\partial x} \mu_1 h K_1 + \frac{\partial f(x_n, t_n)}{\partial t} r_1 h + O(h^2) \\ &= f(x_n, t_n) + \left[\mu_1 \frac{\partial f(x_n, t_n)}{\partial x} f(x_n, t_n) + r_1 \frac{\partial f(x_n, t_n)}{\partial t} \right] h + O(h^2) \end{aligned} \quad (9-3-6)$$

将(9-3-6)代入(9-3-5)得

$$\begin{aligned} K_p(x_n, t_n, h) &= (a_1 + a_2) f(x_n, t_n) + a_2 h [\mu_1 f_x(x_n, t_n) f(x_n, t_n) \\ &\quad + r_1 f_t(x_n, t_n)] + O(h^2) \end{aligned} \quad (9-3-7)$$

将(9-3-7)代入(9-3-4)得

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + (a_1 + a_2) h f(x_n, t_n) + a_2 h^2 [\mu_1 f_x(x_n, t_n) f(x_n, t_n) \\ &\quad + r_1 f_t(x_n, t_n)] + O(h^3) \end{aligned} \quad (9-3-8)$$

将(9-3-8)与(9-2-9)相比较, 若令

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 \mu_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 r_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (9-3-9)$$

则(9-3-3)得到满足。

(9-3-9)是决定 a_1, a_2, μ_1, r_1 的方程组。由于未知数的个数多于方程的个数, 所以这些系数可以有无数个组合。常用的几组系数所组成的公式是:

1. 中点公式

$$\text{选 } a_1 = 0, a_2 = 1, \mu_1 = r_1 = \frac{1}{2}$$

这时 $x_{n+1} = x_n + hf(x_n, t_n) + \frac{1}{2}hf_n, t_n + \frac{1}{2}h$ (9-3-10)

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, t_n) + \frac{1}{2}hf_n, t_n + \frac{1}{2}h \quad (9-3-10)$$

式中 $f_n = f(x_n, t_n)$ (9-3-11)

2. 改进的Euler公式

$$\text{选 } a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \mu_1 = r_1 = 1$$

则

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}[f(x_n, t_n) + f(x_n + hf_n, t_n + h)] \quad (9-3-12)$$

3. Heun公式

$$\text{选 } a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{3}{4}, \mu_1 = r_1 = \frac{2}{3},$$

则

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{4}[f(x_n, t_n) + 3f(x_n + \frac{2}{3}hf_n, t_n + \frac{2}{3}h)] \quad (9-3-13)$$

在Runge—Kutta方法中，常用的是如下四阶公式：

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (9-3-14)$$

式中

$$K_1 = f(x_n, t_n)$$

$$K_2 = f(x_n + \frac{1}{2}hK_1, t_n + \frac{1}{2}h) \quad (9-3-15)$$

$$K_3 = f(x_n + \frac{1}{2}hK_2, t_n + \frac{1}{2}h)$$

$$K_4 = f(x_n + hK_3, t_n + h)$$

如果用上述公式解线性试验方程

$$\dot{x} = \lambda x \quad (9-3-16)$$

则

$$f(x) = \lambda x$$

由 (9-3-15)

$$K_1 = \lambda x_n$$

$$K_2 = \lambda \left(x_n + \frac{h}{2} \lambda x_n \right) = \lambda x_n + \frac{h}{2} \lambda^2 x_n$$

$$K_3 = \lambda \left[x_n + \frac{h}{2} \left(\lambda x_n + \frac{h}{2} \lambda^2 x_n \right) \right]$$

$$= \lambda x_n + \frac{h}{2} \lambda^2 x_n + \frac{h^2}{4} \lambda^3 x_n$$

$$K_4 = \lambda \left[x_n + h \left(\lambda x_n + \frac{h}{2} \lambda^2 x_n + \frac{h^2}{4} \lambda^3 x_n \right) \right]$$

$$= \lambda x_n + h \lambda^2 x_n + \frac{h^2}{2} \lambda^3 x_n + \frac{h^3}{4} \lambda^4 x_n$$

则

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$= x_n + \lambda h x_n + \frac{1}{2} (\lambda h)^2 x_n + \frac{1}{3!} (\lambda h)^3 x_n + \frac{1}{4!} (\lambda h)^4 x_n$$

$$= \left[1 + \lambda h + \frac{1}{2} (\lambda h)^2 + \frac{1}{3!} (\lambda h)^3 + \frac{1}{4!} (\lambda h)^4 \right] x_n$$

它与用四阶幂级数近似计算 (9-3-16) 的解 $x_{n+1} = e^{\lambda h} x_n$ 的结果相同。由此可知，四阶 Runge—Kutta 公式与四阶幂级数公式具有相同的稳定区域。因此，这个方法只适用于解一般的常微分方程组，而不宜用于解 STIFF 方程组。

下面是用四阶 Runge—Kutta 公式解常微分方程组

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (9-3-17)$$

的子程序 RK(N, X, T, H, F, P, Q)，其哑元的意义为：

- N —— 方程数；
- T —— 时间变量，开始时存放 t_n ，结束时存放 t_{n+1} ；
- H —— 积分步长；
- X —— 长度为 N 的一维数组，开始时存放上一步解的结果 x_n （在第一步时存放初值 x_0 ），最后存放本步计算结果 x_{n+1} ；
- F —— 长度为 N 的一维数组，用来存放 (9-3-17) 中的右向量；
- P —— 长度为 N 的一维数组，用来存放上一步解的结果 x_n ；

Q ——长度为N的一维数组，用来依次存放 $x_n, x_n + \frac{1}{2}hk_1, x_n + \frac{1}{2}hk_2, x_n + hk_3$ 。

在本子程序中要四次计算方程组的右函数值，为此设置子程序 DX(N, X, T, F)，其中N为右函数的个数，X和T分别与 $f(x, t)$ 中的 x 和 t 相对应，F用来存放计算出的右函数值，X和F均为长度为N的一维数组。该子程序要根据方程组给出的右函数作特殊编写。

```

SUBROUTINE RK(N, X, T, H, F, P, Q)
  DIMENSION X(N), F(N), P(N), Q(N), A(5)
  A(1) = 0.5 * H
  A(2) = A(1)
  A(5) = A(1)
  A(3) = H
  A(4) = H
  TW = T
  DO 1 I = 1, N
    P(I) = X(I)
1  Q(I) = X(I)
    DO 2 J = 1, 4
      CALL DX(N, Q, T, F)
    DO 3 I = 1, N
      IF(J.EQ.4) GOTO 3
      Q(I) = P(I) + A(J) * F(I)
3  X(I) = X(I) + A(J + 1) * F(I) / 3.
    T = TW + A(J)
  RETURN
END

```

§ 9—4 线性多步法的基本概念

一、线性多步法

上一节介绍的Runge—Kutta方法是在第 n 步计算的基础上，由 x_n, t_n 出发计算 x_{n+1} 的。这里我们只用到了一步计算的结果，而对于以前各步的结果均未直接利用。这种方法称为单步法。单步法的缺点在于它没有充分利用数值积分过程中有用的结果。这样，为了达到一步计算的准确度，往往要作较多的计算。例如四阶Runge—Kutta公式需要四次计算微分方程右函数的值。与单步法相反，如果我们在计算 x_{n+1} 时，是通过 x_{n+1-j} ($j=1, 2, \dots, k$) 和 $\dot{x}_{n+1-j}$ ($j=0, 1, \dots, k$) 而得到的，则这种方法称为多步法，其中 k 称为该多步法的步数。

为了叙述方便, 我们考虑单变量微分方程

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (9-4-1)$$

在初始条件 $x_0 = x(t_0)$ (9-4-2)

下的求解问题。设所选步长为 h , 並记

$$f_n = f(x_n, t_n)$$

则通常用如下公式来计算 x_n :

$$\sum_{i=0}^k (\alpha_i x_{n-i} + h\beta_i \dot{x}_{n-i}) = 0 \quad (9-4-3)$$

式中 $\alpha_i, \beta_i (i = 0, \dots, k)$ 是常数。通常选 $\alpha_0 = -1$, 于是由 (9-4-3) 可得

$$x_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_{n-i} + h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n-i} \quad (9-4-4)$$

由于 (9-4-3) 和 (9-4-4) 是线性表达式, 故由它们决定的多步法称为线性多步法。

在 (9-4-4) 中, 如果 $\beta_0 = 0$, 则

$$x_n = \sum_{i=1}^k (\alpha_i x_{n-i} + h\beta_i f_{n-i}) \quad (9-4-5)$$

这时 x_n 可由它前面的 k 个时刻的函数值 x_{n-i} 及导函数值 f_{n-i} 直接计算而得。这种多步计算公式称为是显式的。

在 (9-4-4) 中, 如果 $\beta_0 \neq 0$, 则

$$x_n = \sum_{i=1}^k (\alpha_i x_{n-i} + h\beta_i f_{n-i}) + \beta_0 h f(x_n, t_n)$$

或

$$x_n - \beta_0 h f(x_n, t_n) = \sum_{i=1}^k (\alpha_i x_{n-i} + h\beta_i f_{n-i}) \quad (9-4-6)$$

(9-4-6) 是关于 x_n 的一个非线性方程, 要通过解方程才能得到 x_n , 这时该多步计算公式称为是隐式的。

线性多步法与单步法比较, 由于在计算某一时刻的解时有效地利用了过去时刻的计算结果, 因而可以在显著减少工作量的情况下获得与单步法同样的计算准确度。

在线性多步法中, 隐式的与显式的相比, 前者的每步计算工作量比后者大, 但是无论从数值积分的稳定性还是解的准确性来说, 隐式的均较显式的好。因此, 从解微分方程的全过程来看, 隐式的计算工作量较显式的为少。所以, 在多步法中主要是使用隐式的多步公式。

作为多步法的一个例子, 我们将方程 (9-4-1) 作如下积分:

$$x_n = x_{n-2} + \int_{t_{n-2}}^{t_n} f(x, t) dt$$

对于上式中的积分项，用Simpson公式作近似计算：

$$\int_{t_{n-2}}^{t_n} f(x, t) dt = \frac{2h}{6} (f_n + 4f_{n-1} + f_{n-2})$$

于是

$$x_n = x_{n-2} + \frac{h}{3} (f_n + 4f_{n-1} + f_{n-2}) \quad (9-4-7)$$

这就是一个线性隐式的二步计算公式。

二、多步法的阶数

设在(9-4-3)中， x_{n-i} 与 f_{n-i} ($i = 1, 2, \dots, k$)都是准确的，这时由它解出的 x_n 与实际 $x(t_n)$ 之间仍有误差。设该误差为

$$\varepsilon = x_n - x(t_n) = O(h^{r+1}) \quad (9-4-8)$$

则该多步法称为是 r 阶的。

下面我们来推导 r 阶线性多步公式中系数 α_i 及 β_i 应满足的关系式。

由(9-4-3)得

$$\sum_{i=1}^k (\alpha_i x_{n-i} + h\beta_i f_{n-i}) + \alpha_0 x_n + h\beta_0 f_n = 0 \quad (9-4-9)$$

其中 x_{n-i} 及 f_{n-i} ($i = 1, 2, \dots, k$)为准确值，它们可写为

$$x_{n-i} = x(t_n - ih)$$

$$f_{n-i} = \dot{x}(t_n - ih)$$

又

$$\alpha_0 x_n = -x_n = x(t_n) - x_n - x(t_n) = -\varepsilon - x(t_n)$$

$$f_n = f(x_n, t_n) = f(x(t_n) + \varepsilon, t_n)$$

$$\approx f(x(t_n), t_n) + \frac{\partial f(x(t_n), t_n)}{\partial x} \cdot \varepsilon$$

$$= \dot{x}(t_n) + \frac{\partial f(x(t_n), t_n)}{\partial x} \varepsilon$$

将以上关系式代入(9-4-9)，得

$$\sum_{i=1}^k [\alpha_i x(t_n - ih) + h\beta_i \dot{x}(t_n - ih)] - \varepsilon + h\beta_0 \frac{\partial f(x(t_n), t_n)}{\partial x} \varepsilon = 0$$

或

$$\varepsilon \left[1 - h\beta_0 \frac{\partial f(x(t_n), t_n)}{\partial x} \right] = \sum_{i=1}^k [\alpha_i x(t_n - ih) + h\beta_i \dot{x}(t_n - ih)]$$

$$(9-4-10)$$