京津特级教师升学指导精华

高中数学

天津科技翻译出版公司

高中数学

编

华

该丛书编委会由以下特级教师组成：

及树楠　　王树凯　　宁潜济
陈俊辉　　袁克群　　顾德希
邢永庆

津新登字：(90)010号

京津特级教师升学指导精华　　高中数学
主编：陈俊辉　　责编：周兆佳

天津科技翻译出版公司出版　　邮编 300192
新华书店北京发行所发行
河北省三河印刷一分厂印刷

787×1092　1/32　14印张　300千字
1993年10月第一版　1994年7月第二次印刷
印数：7001—19000册
ISBN7－5433－0480－5/G·66　定价：8.40元

前 言

《京津特级教师升学指导精华》丛书共分10册，有：初中数学、初中物理、初中化学、初中语文、初中英语、高中数学、高中物理、高中化学、高中语文、高中英语。各册均由北京和天津的特级教师主编，是一套高层次的中学生学习指导书籍。

该丛书各册不仅适于初中或高中毕业班使用，也适合各年级学生随课程参考使用。

该丛书的特点是：突出知识要点，使课本中的难点和疑点简明化、通俗化。该丛书的练习题全部选自1986—1993年各地中考和全国高考试题，所以能有效地帮助教师和学生把握住中考或高考的要求。

我们组织编写这套丛书的目的是：让全国的中学生都拥有特级教师，通过特级教师的点拨，从繁重的学习中解脱出来，以高分顺利地升入高中或大学。

北京朝阳教科所副研究员李宝忱先生为该丛书的出版做了大量的工作，在此表示感谢。

编者的话

为了帮助应届高中毕业生全面系统地学习和掌握高中数学课程，参加高校入学考试，我们根据国家教委颁布的现行教学大纲和“考试说明”，以及人民教育出版社新修订的现行教材编写了这本指导书.

本书的编写尽量联系考生实际，突出重点，力求做到主次分明，详略得当，便于使用.

为了便于学生使用，我们按代数、三角、立体几何、解析几何分为四部分，每一部分又根据知识单元分为若干章. 每章都按学法指点、例题精析、高考试题选三个部分编写. 学法指点力图写出知识要点，对重点、难点予以说明和分析，并就学习方法进行指导；例题精析力图写出重点基础知识如何掌握和应用，指出常见的错误和必须注意的事项，阐明常用的数学思想和方法，使学生在复习知识的过程中提高能力；最后选编了历年来全国和部分省市采用的有代表性的高考试题，供同学们练习使用.

为了写好本书，特地邀请具有丰富教学经验的冯士腾、罗洁、隋丽丽、彭林等老师一起参加编写工作.

限于我们的水平，如有不妥之处，欢迎各位指正.

特级教师

陈俊辉

1993.4.30

目　　录

代　　数

三　　角

立体几何

解析几何

第一章

幂函数　指数函数　对数函数

一、学法指点

1. 知识要点

(1)有关集合的一些基本概念,如集合和元素的一般概念,集合的表示法,集合与集合之间的包含关系、相等关系,空集、子集、交集、并集和补集等概念.

(2)映射与函数概念;函数的单调性和奇偶性概念及图象特征;反函数概念及图象特征.

(3)求函数表达式、定义域、值域、最值、单调区间、反函数的方法;判断函数单调性和奇偶性的方法;描绘出函数的图象并利用图象研究函数的性质.

(4)一次、二次、幂、指数、对数函数的概念,以及这些函数的图象特征和性质(如幂函数的分类,指数函数、对数函数的单调性及其应用);简单的指数方程和对数方程的解法;复合函数的性质的研究.

2. 学法指导

(1)关于集合的一些基本概念的理解

①"集合"是数学里不定义的原始概念之一,通常被描述为"一些数,一些点,一些图形,一些物体所形成的集体",或被描述为"把一些确定的对象看作一个整体便形成一个集合".

集合具有两个特性：一是整体性，一是确定性．其中“看作一个整体”一语，就意味着集合是指某一些事物的整体而不是指其中的个别事物，这就是集合的整体性．而对于一个给定的集合，认为其中所包含的事物是确定的，或者说，集合是由所有属于它的元素所完全确定的，这就是集合的确定性．

集合里的各个对象叫做这个集合的元素．集合中的元素应具有如下特性：确定性、互异性和无序性．

②关于空集 $\varnothing$，是指这个集合不含有任何元素．例如，方程 $x^2+1=0$ 在实数域内的解集，显然这个解集没有任何元素．

③“A 是 B 的子集”的涵义是：A 的任何一个元素都是 B 的元素，即由任一 $x\in A$，能推出 $x\in B$，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$）．由此可知，子集概念涉及两个集合之间的关系，即包含关系．值得注意的是，不要把子集说成是由原来集合的部分元素组成的集合．这种说法既和“空集是任何集合的子集”的规定相抵触，也和“A 是 A 的子集”相矛盾，因为空集不含任何元素，而 A 含有 A 的全部元素，所以都不是原来集合的部分元素所组成的集合．

此外，还要注意一个集合的子集甚至是一个集合的真子集，其元素的个数不一定少于原来集合的元素个数．例如，

设集合 $A=\{$全体自然数$\}=\{1,2,3,4,5,\cdots\cdots\}$，

集合 $B=\{$全体正偶数$\}=\{2,4,6,8,10,\cdots\cdots\}$．

易知 B 是 A 的真子集，即 $B\subset A$．可是把 A 与 B 中的元素逐一对应，如 $1\to2$；$2\to4$；$3\to6$；$4\to8$；$5\to10$；$\cdots\cdots$，$n\to2n$；$\cdots\cdots$，而且不论 A 中的元素取到多么大的数，B 中都有元素和它对应．这样，我们就不能说一个集合的真子集的元素个数一定少于原来集合的元素个数．总之，我们不要把集合之间的包含关系与集合元素的多少，或者所谓集合的“大”、“小”混为一谈．

例 1　设 $A=\{x\mid a\leqslant x\leqslant a+3\}$，

$$B=\{x \mid (x+1)(x-5)>0\}$$

问 a 为何值时,① $A\cap B=\varnothing$;② $A\cap B\neq\varnothing$;③ $A\cap B=A$;④ $A\cup\overline{B}=\overline{B}$.

分析 ① $A\cap B=\varnothing$ 是指集合 A 与 B 没有公共的元素,或者说,A 是由不属于 B 的元素构成的;② $A\cap B\neq\varnothing$ 说明集合 A 与 B 有公共的元素;③ $A\cap B=A$ 说明凡属于集合 A 的元素一定属于集合 B;④ $A\cup\overline{B}=\overline{B}$ 说明集合 A 的元素一定是不属于 B 的元素.

解 ∵ $B=\{x \mid (x+1)(x-5)>0\}$

$=\{x \mid x<-1$ 或 $x>5\}$,

∴ ① 当 $a\geqslant-1$ 且 $a+3\leqslant5$ 时,

即 当 $-1\leqslant a\leqslant2$ 时, $A\cap B=\varnothing$.

② 当 $a<-1$ 或 $a>2$ 时, $A\cap B\neq\varnothing$.

③ 当 $a+3<-1$ 或 $a>5$ 时,

即 当 $a<-4$ 或 $a>5$ 时, $A\cap B=A$.

④ ∵ $\overline{B}=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant5\}$,

∴ 当 $a\geqslant-1$ 且 $a+3\leqslant5$ 时,

即 当 $-1\leqslant a\leqslant2$ 时,. $A\cup\overline{B}=\overline{B}$.

(2)正确理解映射、函数、反函数概念

集合和映射是近代数学的两个基本观点,我们要用集合与映射的观点进一步理解函数概念.

①映射亦即单值对应,是一种特殊的对应. 如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射 $f:A\rightarrow B$,那么和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象,a 叫做 b 的原象或象源. 映射这个概念,有三个特征:

(i)集合 A、B 及对应法则 f 是确定的,是一个系统;

(ii)对应法则 f 有“方向性”. 即强调从集合 A 到集合 B 的

对应，它与从 B 到 A 的对应关系是不同的；

(iii)对于 $f:A\to B$ 来说，要求对 A 中任意元素 a，在 B 中有唯一元素 b 与之对应.

对于一一映射，我们可以研究它的逆映射，就是：设 $f:A\to B$ 是集合 A 到集合 B 上的一一映射，如果对于 B 中的每一个元素 b，使 b 在 A 中的原象 a 和它对应，这样所得的映射叫做映射 $f:A\to B$ 的逆映射，记作 $f^{-1}:B\to A$. 显然，映射 $f:A\to B$ 也是映射 $f^{-1}:B\to A$ 的逆映射，而且 $f^{-1}:B\to A$ 也是一一映射(从 B 到 A 上的一一映射).

②函数是一种特殊的映射，即设 A、B 都是非空数集，f 是从 A 到 B 的一个对应法则，那么从 A 到 B 的映射 $f:A\to B$ 就叫做 A 到 B 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 $x\in A$，$y\in B$.

由此定义可知，函数概念含有三个要素：定义域 A、值域 B 和对应法则 f. 其中核心是对应法则 f，它是函数关系的本质特征. $y=f(x)$的意思是：y 等于 x 在对应法则 f 下的对应值，而 f 是“对应”得以实现的方法和途径，是联系 x 和 y 的纽带，所以是函数的核心，至于用什么字母表示自变量、因变量和对应法则，这是无关紧要的.

函数的定义域(即原象集合)是自变量 x 的取值范围，它是构成函数的一个不可缺少的组成部分，当函数的定义域及从定义域到值域的对应法则完全确定之后，函数的值域也就随之确定了. 因此，定义域和对应法则为“y 是 x 的函数”的两个基本条件，缺一不可. 只有当两个函数的定义域和对应法则都分别相同时，这两个函数才是同一个函数，这就是说：

(i)定义域不同，两个函数也就不同，如 $y=(\sqrt{x})^2$ 和 $y=\frac{x^2}{x}$.

(ii)对应法则不同，两个函数也是不同的，如 $y=x$ 和 $y=|x|$.

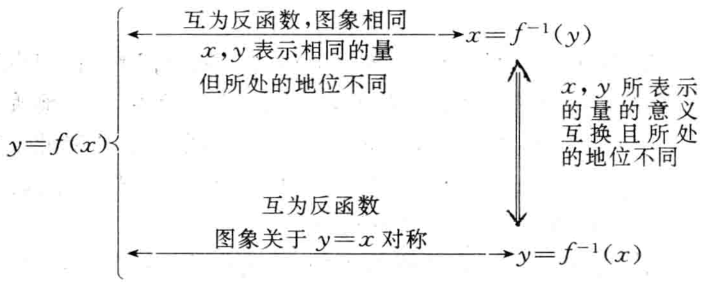
(iii)即使定义域和值域都分别相同的两个函数，它们也不一定是同一个函数，因为函数的定义域和值域不能唯一地确定函数的对应法则，如 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$，其定义域和值域分别都是 $(-\infty,+\infty)$ 和 $[-1,1]$，但它们的对应法则显然是不同的，所以 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 是不同的两个函数.

值域是全体函数值所成的集合，虽然在多数情况下，一旦定义域和对应法则确定，它也就随之确定. 但是，当考虑一个函数的反函数时，就必须同时要考虑这个函数的定义域、值域和对应法则. 从这个意义上讲，它同样是不可缺少的要素.

③反函数是由逆映射所确定的，因此一个函数存在反函数的条件是：给定函数 $y=f(x)$ 的映射 $f:A\to B$ 是 $f(x)$ 的定义域 A 到值域 B 上的一一映射. 因为只有一一映射 f 才存在逆映射 f^{-1}. 一一映射的实质是原象集与象集的元素间建立了一一对应关系.

如果确定函数 $y=f(x)$ 的映射 $f:A\to B$ 是 $f(x)$ 的定义域 A 到值域 B 上的一一映射，那么这个映射的逆映射 $f^{-1}:B\to A$ 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数. 其中函数 $y=f(x)$ 的定义域、值域分别是函数 $x=y^{-1}(y)$ 的值域和定义域.

由于习惯上一般是用 x 表示自变量，用 y 表示函数，为此我们常常对调函数式 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x,y，把它改成为 $y=f^{-1}(x)$. 因此，凡不特别说明，函数 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in B$，$y\in A$. 而且，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 叫做互为反函数. 至于 $y=f(x)$、$x=f^{-1}(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 这三者的关系，可由下表得知：



例 2 设 $A=\{(x,y)|x\in z,|x|<2,y\in N,x+y<3\}$,

$B=\{0,1,2,\}$.

$f:(x,y)\rightarrow x+y$ 是 A 到 B 的对应关系,试判断 f 是不是从 A 到 B 的映射?

分析 解答本题的关键有两点,即弄清:

(1)集合 A 的元素是什么?

(2)什么是从 A 到 B 的映射?

解 $\because$ $x\in z$, 且 $|x|<2$,

$\therefore$ $x\in\{-1,0,1\}$.

又 $\because$ $y\in N$, 且 $x+y<3$,

$\therefore$ $A=\{(-1,1),(-1,2),(-1,3),(0,1),(0,2),(1,1)\}$.

$\because$ $f:(x,y)\rightarrow x+y$,

$\therefore$ A 中每个元素中的一对数的和都在 $B=\{0,1,2\}$ 中能找到唯一的象.

$\therefore$ f 是从 A 到 B 的映射.

例 3 求出下列函数的反函数:

(1) $y=x^2-6x+11$ $(x<0)$;

(2)　$y=\frac{1}{2}(a^{-x}+a^{x})$　　　　$(a>1$，且 $x\geqslant 0)$；

(3)　$y=\lg^{2}x-\lg x^{2}$　　　　$(x\in(0,10))$；

(4)　$y=x|x|+2x$　　　　$(x\in R)$.

分析　当给定函数 $y=f(x)$ 的反函数存在时，求其反函数的一般步骤是：

①求出原函数的定义域 $x\in A$，值域 $y\in B$，确定反函数的定义域 B；

②由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$；

③写出反函数 $x=f^{-1}(y)$　$(y\in B)$，再改成习惯记法：$y=f^{-1}(x)$　$(x\in B)$，这就是原函数的反函数.

解　(1)　$\because$　函数的定义域是 $x<0$，值域 $y>2$，由原函数反解得　$(x-3)^{2}=y-2$.

$\because$　$x<0$，

$\therefore$　$x-3=-\sqrt{y-2}$，即　$x=3-\sqrt{y-2}$.

$\therefore$　所求的反函数为　$y=3-\sqrt{x-2}$.

(2)　$\because$　$a>1$，

$\therefore$　$a^{-x}+a^{x}\geqslant 2$.

$\therefore$　$\frac{1}{2}(a^{-x}+a^{x})\geqslant 1$，即原函数的值域为 $y\geqslant 1$.

由原函数可得　$a^{-x}+a^{x}=2y$，

即　$(a^{x})^{2}-2ya^{x}+1=0$，

解得　$a^{x}=y\pm\sqrt{y^{2}-1}$.

$\because$　$a^{x}>1$，

$\therefore$　$a^{x}=y+\sqrt{y^{2}-1}$，

从而　$x=\log_{a}(y+\sqrt{y^{2}-1})$.

$\therefore$　所求反函数为　$y=\log_{a}(x+\sqrt{x^{2}-1})$　$(x\geqslant 1)$.

(3)　$y=\lg^{2}x-\lg x^{2}=(\lg x-1)^{2}-1$，

∵ $0<x<10$,

∴ $\lg x<1$, $\lg x-1<0$,

∴ $(\lg x-1)^2-1>-1$.

即原函数的值域为 $y>-1$.

由原函数反解得 $(\lg x-1)^2=y+1$,

即 $\lg x-1=-\sqrt{y+1}$,

整理得 $x=10^{1-\sqrt{y+1}}$,

∴ 所求反函数为 $y=10^{1-\sqrt{x+1}}$ $(x>-1)$.

(4) 在函数的定义域 R 上,因确定函数的映射不是从定义域到值域的一一映射,所以函数在整个定义域上不存在反函数.

将原函数变形为 $y=x(|x|+2)$

∵ $|x|+2>0$, x, y 同号,

∴ 当 $x\geqslant 0$ 时,值域 $y\geqslant 0$,

解得 $x=-1+\sqrt{1+y}$

当 $x<0$ 时,值域 $y<0$,

解得 $x=1-\sqrt{1-y}$.

∴ 所求反函数为 $y=\begin{cases}-1+\sqrt{1+x} & (x\geqslant 0)\\ 1-\sqrt{1-x} & (x<0)\end{cases}$

说明 解有关反函数问题时,要注意如下几点:(i)求反函数时,首先应求出原函数的定义域和值域,不然容易出错;其次在反解求 x 关于 y 的表达式时,如遇到开偶次方,则要根据原函数的定义域判断取正还是取负.(ii)要注意反函数存在的条件.(iii)在同一直角坐标系中,原函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

(3)要掌握函数的性质

①函数的单调性

函数的单调性是反映函数变化趋势的一个概念．对于函数的单调性，有两点值得注意：

(i)函数的单调性是对于某一个区间而言的．这个区间不必是函数的定义域，而常常是定义域的某一部分，即定义域的子集．例如函数 $y=x^2$ 的定义域为 R，但只在 $(0,+\infty)$ 上是增函数．

(ii)在增(减)函数的定义中，x_1、x_2 的任意性是非常重要的，绝不能忽视．因为，这在本质上，就是把比较区间上无限多个函数值的大小的问题转化为两个任意值的大小比较．

为了便于讨论函数的单调性，可把增(减)函数的定义作如下的改述或理解：(1)在某一区间上，任意两个自变量 x_1，x_2 与相应的函数值 $f(x_1)$，$f(x_2)$ 的大小关系一致，则为增函数；反之，为减函数．(2)在某一区间上，$f(x)$ 随 x 的增大而增大或随 x 的减小而减小则为增函数，反之，为减函数．

下面我们利用两种定义来判定函数的单调性．

例 4 证明 $f(x)=x^2-2x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内是增函数．

证明 设 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$， 则

$$f(x_1)=x_1^2-2x_1,\quad f(x_2)=x_2^2-2x_2,$$

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=x_2^2-2x_2-x_1^2+2x_1\\&=x_2^2-x_1^2-2(x_2-x_1)\\&=(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)\end{aligned}$$

$\because$ $x_2>x_1$， $\therefore$ $x_2-x_1>0$.

$\because$ $x_1,x_2\in(1,+\infty)$

$\therefore$ $x_1>1$， $x_2>1$， $x_1+x_2>2$.

$\therefore$ $x_1+x_2-2>0$.

$\therefore$ $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$.

故 $f(x)=x^2-2x$ 在 $(1,+\infty)$ 内是增函数．

例 5 证明函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 在其定义域内是减函

数.

证明 易知，$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 的定义域是 R，

(1)当 $x<0$ 时，如果 x 增大，则 x^2 反而减小，

$\therefore$ $\sqrt{x^2+1}$也随之减小.

同时，$-x$ 也随之减小. 因此，$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 也随之减小.

(2)当 $x>0$ 时，如 x 增大，当然 $\sqrt{x^2+1}$也随之增大. 但这时，$\sqrt{x^2+1}-x$ 是增大还是减小却不能明显看出，为此可以进行变形：

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

则不难知道，当 $x>0$ 且增大时，上式右端的分母将随之增大，所以 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 反而减小.

综合(1)、(2)可知，$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 在其定义域 R 内是减函数.

例 6 已知函数 $z=f(y)$在 R 内是增函数.

求证：若 $y=g(x)$在(a,b)内是增函数，则函数 $z=f[g(x)]$在(a,b)内也是增函数.

证明 任取 $x_1,x_2\in(a,b)$，且设 $x_1<x_2$.

$\because$ $y=g(x)$在(a,b)内是增函数，

$\therefore$ $y_1=g(x_1)<y_2=g(x_2)$

又$\because$ $z=f(y)$在 R 内是增函数，

$\therefore$ $f(y_1)<f(y_2)$

即 $f[g(x_1)]<f[g(x_2)]$.

根据定义，$y=f[g(x)]$在(a,b)内是增函数.

说明 (i)研究和讨论函数的增减性，首先要考虑定义域. 否则容易导致错误.

(ii)对于复合函数的增减性，必须考虑 $u=g(x)$及 $y=f(u)$

的增减性，从而得出 $y=f[g(x)]$ 的增减性.

②函数的奇偶性

关于函数的奇偶性，我们应该这样来理解：

(i)由于对定义域内的“任意一个 x”都有 $f(-x)=\pm f(x)$，因此，这就意味着 $f(-x)$ 是有意义的. 也就是说，函数 $f(x)$ 在 $-x$ 处有定义. 所以由定义知道，奇、偶函数的定义域是关于原点对称的，这是函数具有奇偶性的先决条件，也是奇、偶函数的本质属性之一.

(ii)奇、偶函数定义中的条件 $f(-x)=\pm f(x)$ 要求是相当严格的，也是比较特殊的，所以奇偶性是函数的一个非常特殊的性质. 并不是所有的函数都具有这种特性. 相反，不具备这一特性的函数(即非奇偶函数)倒是大量存在的.

(iii)函数图象(关于原点或 y 轴)的对称性是函数奇偶性的几何意义；反之，函数的奇偶性是函数图象对称性的代数描述. 这反映数形的统一.

例 7 判断下列函数的奇偶性，并说明理由.

(1) $f(x)=x^2-|x|+1 \quad x\in[-1,4]$；

(2) $f(x)=(x-1)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \quad x\in(-1,1)$；

(3) $f(x)=\begin{cases} x(1-x) & (x<0) \\ x(1+x) & (x>0) \end{cases}$

分析 判定函数奇偶性主要依据两点：

①函数的定义域是否关于原点对称的区间；

②函数表达式是否满足 $f(-x)=\pm f(x)$.

解 (1) 由于 $f(x)=x^2-|x|+1 \quad x\in[-1,4]$ 的定义域不是关于原点对称的区间，因此，$f(x)$ 是非奇非偶的函数.

(2) $\because$ $f(x)=(x-1)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \quad x\in(-1,1)$ 的定义域