TURING 图灵原创

浴缸里的惊叹

256道让你恍然大悟的趣题

顾森◎著

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵原创

浴缸里的惊叹

256道让你恍然大悟的趣题

顾森◎著

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目（C I P）数据

浴缸里的惊叹 ：256道让你恍然大悟的趣题 / 顾森著. -- 北京 ：人民邮电出版社，2014.7
（图灵原创）
ISBN 978-7-115-35574-4

Ⅰ. ①浴… Ⅱ. ①顾… Ⅲ. ①数学－普及读物 Ⅳ. ①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第101817号

内 容 提 要

这是一本趣题集，里面的题目全部来自于作者顾森十余年来的精心收集，包括几何、组合、行程、数字、概率、逻辑、博弈、策略等诸多类别，其中既有小学奥数当中的经典题目，又有世界级的著名难题，但它们无一例外都是作者心目中的“好题”：题目本身简单而不容易，答案出人意料却又在情理之中，解法优雅精巧令人拍案叫绝。作者还有意设置了语言和情境两个类别的问题，希望让完全没有数学背景的读者也能体会到解题的乐趣。

◆ 著　　　　顾　森
责任编辑　王军花
执行编辑　张　霞
责任印刷　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路11号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京天宇星印刷厂印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
印张：14.25
字数：264千字　　　　2014年 7 月第 1 版
印数：1－5 000册　　　　2014年 7 月北京第 1 次印刷

定价：49.00元

读者服务热线：(010)51095186转600　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京崇工商广字第 0021 号

前　言

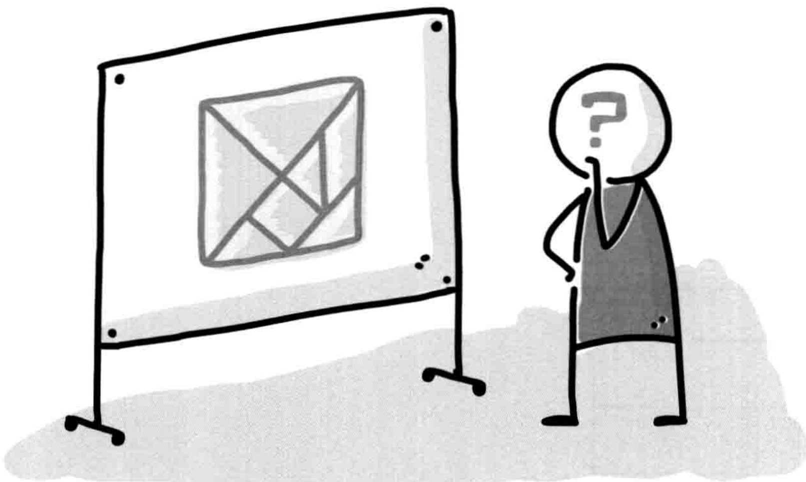
阿基米德缓慢地踏进了装满水的浴缸。在那一瞬间，他突然意识到，浴缸里溢出的水的体积一定等于他的身体浸入水中的体积，这个原理可以用于测量不规则物体的体积，进而帮助他完成希伦二世交给他的任务：鉴定皇冠是否由纯金打造。阿基米德大呼一声“εὕρηκα”，这在古希腊语当中大致是“我发现了”的意思。在中文里，一个简单的叹词足以代替这句经典的古希腊语，那就是在恍然大悟的时候人们发出的那个念做去声的“哦”。

我从小就很喜欢这种恍然大悟的瞬间，并且会习惯性地把这些瞬间记录下来，以便我今后一遍又一遍地回味。终于，我决定从中挑选出最精彩的瞬间，以256道趣题的形式与大家分享，于是便有了大家手中的这本趣题集。

感谢我的妻子雪琴为我制作插图，设计版式。感谢王军花编辑、张霞编辑的辛苦工作。感谢Wikipedia、JSTOR、Google Scholar、Wolfram MathWorld等网站，它们提供了很多有用的资料。最后，感谢家里的两只小猫，在我写作的过程中，它们一直乖乖地在一旁坐着，没有把我的书稿吃掉。

目　录

1 几何问题

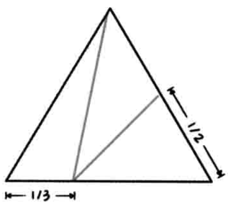


说到几何问题，大家脑海中浮现的多半是中学时的那些几何证明题和计算题。然而这一次，让我们完全抛开那些对于某些人来说可能并不愉快的回忆，转而去欣赏一些千奇百怪的几何构造。回答这些问题大多不需要艰深的理论基础，只需要动脑发挥想象力，再动笔画一画，或者动手剪一剪，摆一摆，折一折，说不定就可以找到答案了。即便是看了我给出的答案，也不妨在旁边的空白处画一画，看看有没有其他的方案。

先来看一些与图形分割有关的问题吧。

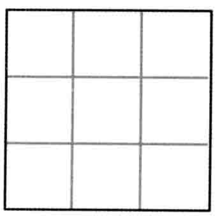
1. 能否把一个等边三角形分成3个面积都相等但形状互不相等的三角形？

能。如下图所示。

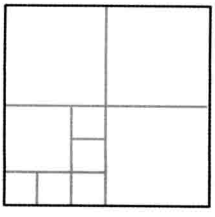


2. 如何把一个正方形分割成9个小正方形？想出至少两种不同的方法。

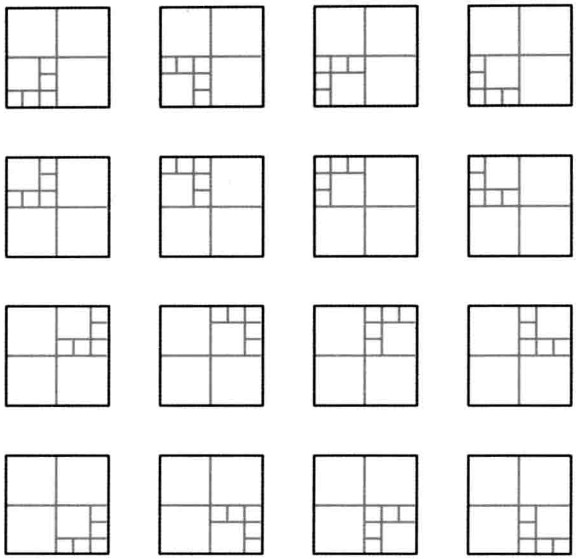
第一种方法很好想，如下图所示。



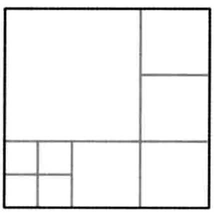
第二种方法就不好想了，如下图所示。



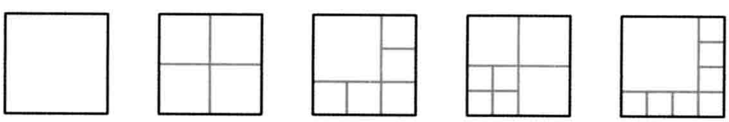
这里面其实包含了16种不同的方案，如下图所示。



接下来的问题或许更具有挑战性：你能再想出一种与上面给出的所有方案都不同的方案吗？答案如下图所示。



这里还有一个很有意思的问题：把一个正方形分割成n个小正方形，这对于哪些n来说是有解的？答案是，除了n=2, 3, 5以外，对于其他所有的n，把一个正方形分割成n个小正方形都是有可能的。对于n为1, 4, 6, 7, 8的情况，分割方案如下图所示。

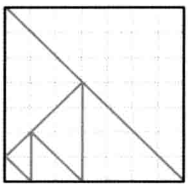


n=1　n=4　n=6　n=7　n=8

对于更大的n呢？注意，每次用横竖两条线把一个小正方形分成4个更小的小正方形后，我们都会让这个图形里的正方形数目增加3个。因此，我们只需要在n=6的方案上增加两笔，就能得到一个n=9的方案；只需要在n=7的方案上增加两笔，就能得到一个n=10的方案；只需要在n=8的方案上增加两笔，就能得到一个n=11的方案；只需要在n=9的方案上增加两笔，就能得到一个n=12的方案……于是，其他所有的情况都被我们解决了。

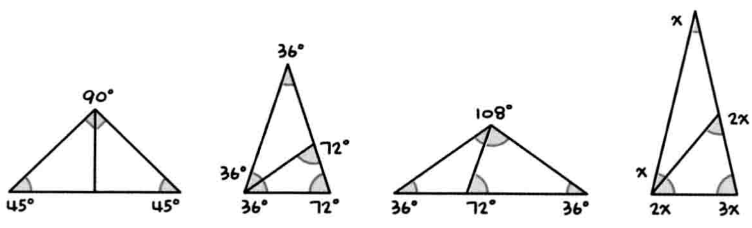
3. 能否把一个正方形分成大小互不相同的7个等腰直角三角形？

答案是肯定的，如下图所示。



4. 有没有什么等腰三角形能被分割成两个小等腰三角形？找出4种这样的等腰三角形。

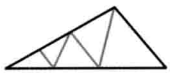
答案如下图所示。其中，最好找的是顶角为90° 的等腰三角形，不太好找到的是顶角为36° 的等腰三角形，更不好找到的是顶角为108° 的等腰三角形，最不好找到的是顶角x=(180/7)° 的等腰三角形。



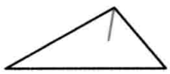
5. 能否在纸上画一个钝角三角形，然后把它分割成若干个锐角三角形？

这是我最喜欢的几何谜题之一。令人难以置信的是，这竟然是可以办到的！每当我在课堂上提出这个问题的时候，学生们总会疯狂而盲目地进行尝试。根据我的观察，绝大多数人都会先画一个不那么钝的钝角三角形（其实这本质上并不会简

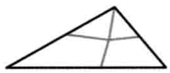
化我们的问题），然后作出一系列类似于图(1)的尝试，但最后都以失败告终。此时我往往会反复强调：要有方法啊，要有方法！



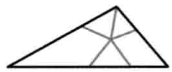
(1)



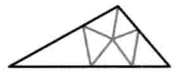
(2)



(3)



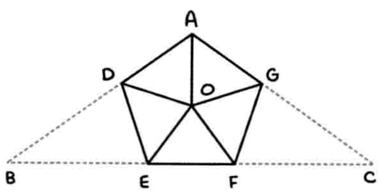
(4)



(5)

首先，想必很多人已经注意到了，我们必须在钝角里引出一条线，如图(2)所示，这样才能把钝角给消除掉。接下来，则是很少有人意识到的一点：我们不能让这条线一直延伸到对边，否则原三角形将会被分成一个锐角三角形和一个钝角三角形（或者两个直角三角形），这并不能解决根本问题。也就是说，这条线在到达对边前就必须得分岔。最后一个关键的问题就是，分成几岔？显然，像图(3)那样分成三岔是不够的，因为这样只能把一个周角分成4份，它们不可能都是锐角。为了让所有的角都是锐角，我们至少要让这条线分成四岔，如图(4)所示。最后，再把一些没有连起来的点连起来，我们就得到一个像模像样的答案了，如图(5)所示。

有的读者或许会说，等等，你怎么敢肯定，图(5)中的每个小三角形都是锐角三角形呢？其实，我也不敢肯定。不过，我并没有说图(5)就是最终的答案。为了证明确实有一个钝角三角形能被分成若干个锐角三角形，我们需要给出一个确凿的、能供他人进行验证的例子。图(5)并不是一个确凿的例子，但它给我们提供了构造这种例子的思路，或者更贴切地说，构造这种例子的模板。借助这个模板，我们很容易得到下面这种构造方案。

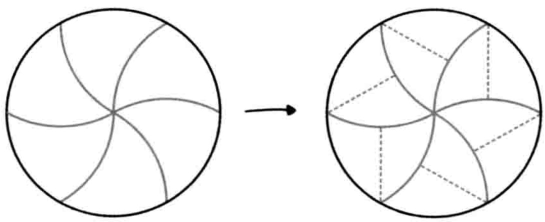


如图，首先，画一个正五边形$ADEFG$。然后，找出它的中心O，将它分别与A、D、E、F、G相连。最后，延长AD和FE并交于点B，延长AG和EF并交于点C。那么，整个大三角形ABC将会成为一个顶角为108° 的等腰三角形。这就是一个绝对让人信服的例子，我们能精确地算出这里面的每个小三角形的每个内角的度数，从而说明每个小三角形的确都是锐角三角形。

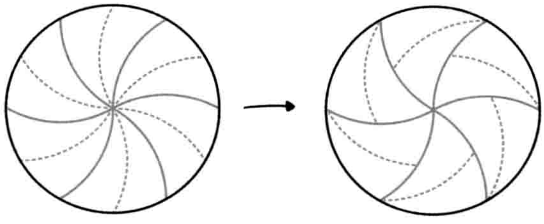
这个有名的问题最早出现在1960年3月的《美国数学月刊》（*The American Mathematical Monthly*）上。同年11月，美国的一位中学数学老师Wallace Manheimer给出了一个完美的解答。这个解答比我们上面的解答要完整得多，它不但证明了存在一个钝角三角形能被分成若干个锐角三角形，而且证明了任意一个钝角三角形都能像这样被分成若干个锐角三角形。不过，这个解答过于复杂，这里我们就不再介绍了。

6. 想办法把一个圆形的比萨分成若干个大小形状都相同的部分，使得其中至少有一部分不含有比萨的边儿。换句话说，你需要把一个圆分成若干个全等的部分，其中至少有一个部分不包含任何一段圆周。

如下图所示，首先用6条同样半径的1/6圆弧把整个圆分成6个形如鱼尾的全等图形，然后再沿着对称轴把每个鱼尾分成两半即可。这样，我们便把整个圆分成了大小形状都相等的12个部分，其中6个部分都不含有任何一段圆周（虽然有一个点在圆周上）。



在这个方案中，分出来的12个小块虽然都是全等的，但其中某些小块需要经过翻折后才能彼此重合。我们的下一个问题就是：请再设计出一种分割方案，使得每个小块都全等，至少有一个小块不含边，并且所有小块都可以仅通过旋转和平移就能与其他小块重合。这仍然是可以办到的。如下图所示，首先用12条同样半径的1/6圆弧把整个圆分成12个全等的图形。这说明，刚才的每个鱼尾形都还有另一种平分方案。现在，把每个鱼尾形翻过来摆放，就得到满足要求的方案了。

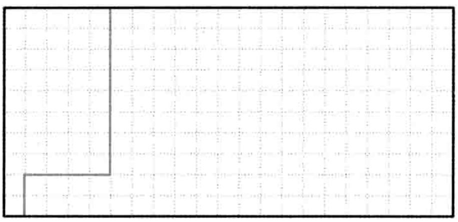


这个问题还有另外一种说法：试着把一个圆分成若干等份，使得至少有一个部分的内部和边界上都不包含圆心。答案仍然是一样的。

7. 能否画一个长方形，然后把它分成两个形状相同但大小不同的（或者说相似但不全等的）多边形？啊，等等，还有一个附加条件：排除掉把这个长方形分成两个小长方形的情况。

如果我们允许把一个长方形分成两个小长方形的话，解法是非常简单的，如下图所示。

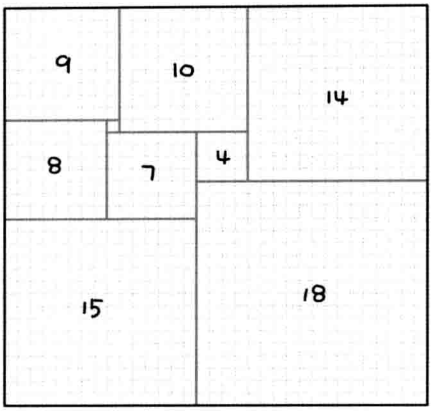
但是，如果排除掉这种情况呢？这仍然是有解的。如下图，我们把一个21×10的长方形分成了两个六边形，其中小六边形的各边长度分别为1, 2, 4, 8, 5, 10，大六边形的各边长度分别为2, 4, 8, 16, 10, 20。这两个六边形的形状相同，但是大小不同。



这个问题出自2004年美国奥林匹克数学竞赛试题。原题其实是这样的：对于怎样的正实数k，我们能够把$1\times k$的矩形划分成两个相似但不全等的多边形？答案非常出人意料：只要$k\neq 1$，满足要求的划分方案都是存在的。

8. 能否画一个长方形，然后把它分成若干个大小互不相等的正方形？

令人吃惊的是，这是有可能的，而且方案不止一个。数学家给这种长方形起了一个名字，叫做“完美长方形”（Perfect Rectangle）。1925年，Zbigniew Moroń构造出了一个33×32的长方形，它可以被分成9个大小各异的小正方形，如下图所示。



1940年，Reichert和Toepken证明了完美长方形不可能只含8个或更少的小正方形。从这个意义上讲，Moroń找到的是最小的一个完美长方形。

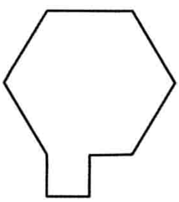
实际上，由9个小正方形构成的完美长方形还有一个，它是一个69×61的长方形。由10个小正方形构成的完美长方形一共有6个，由11个小正方形构成的完美长方形一共有22个，后面更复杂的完美长方形还会越来越多。

在很长一段时间里，人们都在争论，是否存在完美正方形。换句话说，有没有哪个正方形也能被分割成若干个大小不同的小正方形？1938年，Roland Percival Sprague非常巧妙地借用已有的完美长方形拼出了一个边长为4205的小正方形，里面包含的55个小正方形大小都不相同，从而得到了历史上第一个完美正方形，给这段争论划上了一个句号。目前人们已经证明，完美正方形不可能包含20个或更少的小正方形，包含21个小正方形的完美正方形是唯一存在的，它的边长为112。

几何图形无奇不有。在下面这些问题中，你需要找出满足各种古怪要求的图形。

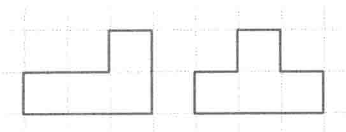
9. 画一个有奇数条边的多边形，使得对于其中的每一条边，都有另一条边与它平行。

满足要求的图形有很多。其中一种图形如下所示，它是由一个正六边形加上一个小正方形得来的。



10. 画两个多边形，使它们的周长和面积都相等，但它们却是两个不同的图形（或者说这两个图形不全等）。

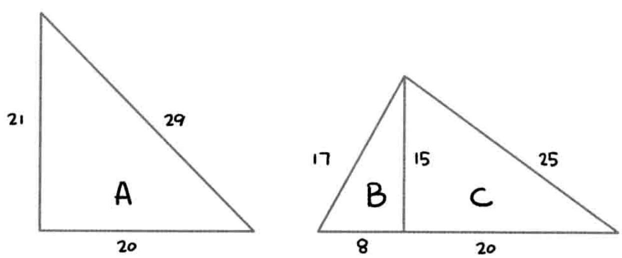
满足要求的构造有很多，其中一种构造如下图所示。



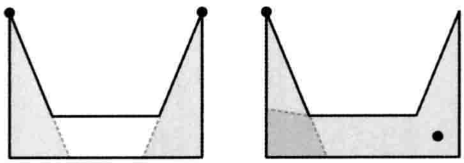
我们给这个问题加一个条件：如果限定这两个图形都是四边形，满足要求的构造还存在吗？答案是肯定的，如下图所示。

那么，如果我们限定这两个图形都是三角形，满足要求的构造还存在吗？在介绍全等三角形的时候，我常常会把这个问题抛给学生。绝大多数学生都会因为举不出这样的例子，从而错误地断定周长和面积都相等的三角形一定全等。实际上，周长和面积都相等的三角形仍然有可能不全等。

考虑下面三个三角形：三角形A是由长度分别为20、21、29的线段构成的，三角形B是由长度分别为8、15、17的线段构成的，三角形C是由长度分别为15、20、25的线段构成的。利用勾股定理可以验证，这三个三角形都是直角三角形。现在，如下图所示，把三角形B和三角形C拼成一个新的三角形。左边这个三角形的周长为20+21+29=70，面积为(20×21)÷2=210；右边这个三角形的周长为28+17+25=70，面积为(28×15)÷2=210。这两个三角形的周长和面积都相等，但它们不全等。

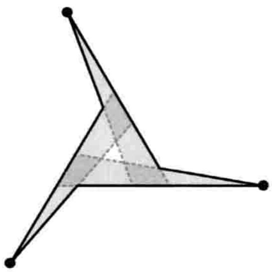


11. 下图所示是一个多边形的房间。把两名警卫放在左图所示的位置，他们没法看守到房间里的所有区域；如果把他们放在右图所示的位置，他们的视野范围就能覆盖到房间里的所有区域了。

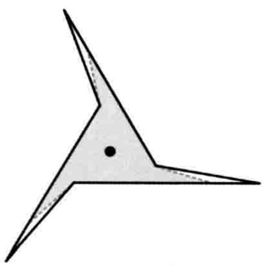


能看到所有的墙是否就意味着能看到所有的区域？能否设计一个多边形的房间，使得在房间里的某些位置安排一些警卫之后，他们能看守到墙壁上的每一个点，但整个房间里仍然存在盲区？

这是有可能的。下图就是一个例子。

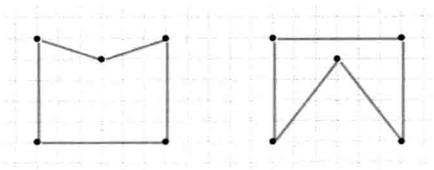


这个问题还有另一种问法：能否设计一个多边形的房间，使得站在房间里的某个位置上，没有哪一面墙能被完整地看到？很简单，只要借用刚才的那个多边形，然后站在盲区里就行了。

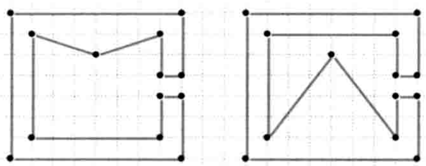


这种问题是计算几何中非常重要的一类课题，叫做“可见性问题”（visibility problem）。

12. 下图是把5个固定的点首尾相接连接起来的两种不同的方式，可以看到，右边那个多边形的面积更小，同时周长更大。用线段把几个固定的点首尾相接连接起来，所得的多边形面积越小，周长就越大，这个说法总是正确的吗?

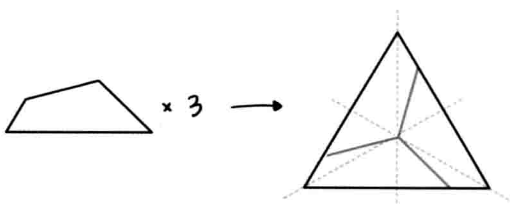


不总是正确的。下图就是一个非常好的反例，注意它是怎样通过颠倒内外的方式以彼之道还施彼身的。



13. 我们很容易用偶数个相同的并且本身不是轴对称的小多边形拼成一个轴对称的大多边形。是否有可能用奇数个相同的并且本身不是轴对称的小多边形拼成一个轴对称的大多边形？啊，等等，这个问题也有一个附加条件：所得的大多边形只能有一条对称轴。

如果允许拼出来的大多边形有三条对称轴的话，解法是非常简单的，如下图所示。



即使允许拼出来的大多边形只有两条对称轴，解法也很容易想到，如下图所示。