



普通高等教育“十一五”国家级规划教材 计算机系列教材
天津市“十二五”普通高等教育规划教材

信号检测与估计 (第2版)

王立毅 张雄 李化 等编著



清华大学出版社

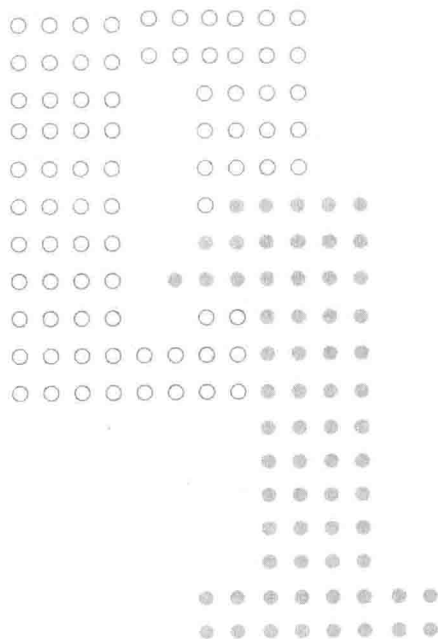


普通高等教育“十一五”国家级规划教材 计算机系列教材

天津市“十二五”普通高等教育规划教材

张立毅 张雄 李化 等编著

信号检测与估计 (第2版)



清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书共分 12 章,系统地介绍了信号检测与估计的基本理论。首先阐述本课程的基础理论、随机信号分析及其统计描述。其次,介绍经典检测理论、确知信号的检测、随机参量信号的检测、多重信号的检测,以及序贯检测等基本检测理论和方法。最后,介绍经典估计、信号参量估计、信号波形估计(维纳滤波、卡尔曼滤波和自适应滤波),以及功率谱估计等基本估计理论及方法。

在编写过程中,既注重结构的完整性和内容的连续性,也强调理论推导的循序性和语言描述的精炼性,还力求从简到繁、由浅入深、循序渐进、通俗易懂,既利于教师讲授,也便于学生自学。

本书可以作为电子信息类各专业高年级本科生和研究生的教材,也可供从事电子与通信技术的广大科技人员参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

信号检测与估计/张立毅,张雄,李化等编著.—2 版.—北京:清华大学出版社,2014

计算机系列教材

ISBN 978-7-302-36523-5

I. ①信… II. ①张… ②张… ③李… III. ①信号检测—高等学校—教材 ②谱估计—高等学校—教材 IV. ①TN911.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 102980 号

责任编辑:汪汉友

封面设计:常雪影

责任校对:梁 毅

责任印制:杨 艳

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社总机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课件下载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印装者:三河市少明印务有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:14

字 数:350 千字

版 次:2010 年 6 月第 1 版 2014 年 9 月第 2 版

印 次:2014 年 9 月第 1 次印刷

印 数:1~2000

定 价:29.00 元

产品编号:059334-01

前 言

信号检测与估计是现代信息理论的重要组成部分,是以概率论与数理统计为工具,以受噪信号处理为对象,以提取信息为目标,综合系统理论与通信工程的一门学科。在通信、雷达、声呐、自动控制、地震勘探、生物医学信号处理等领域得到广泛应用。

本书是在我们编写的由清华大学出版社 2010 年出版的《信号检测与估计》教材的基础上修订完善的。全书共分 12 章,第 1 章简要介绍信号检测与估计理论的研究对象和发展历程;第 2 章介绍随机信号的基本概念和统计描述;第 3 章~第 7 章分别介绍信号检测的基本理论和方法,包括经典检测理论、确知信号的检测、随机参量信号的检测、多重信号的检测以及序贯检测;第 8 章~第 12 章介绍信号估计的基本理论和方法,包括估计的方法与性质、信号参量和信号波形的估计以及谱估计等。

近 20 年来信号检测与估计理论得到蓬勃发展,新的理论和方法大量涌现,应用领域不断扩展。为了帮助有志于从事信息科学技术的初学者迅速入门,本书着重从基础与框架入手,既注重理论的严密性,又强调实际应用,试图在以下几个方面形成特色。

(1) 重点突出。在有限篇幅内,重点介绍信号检测与估计的经典理论,注重基本概念和基本方法的阐述。对于初学者来说,掌握了这些基本理论,就为进行本学科更深层次的学习与研究奠定了基础。

(2) 体系完整。首先注重结构的完整性和内容的连续性,按照惯例,先介绍信号检测,后介绍信号估计,从确知信号检测到随机参量信号和多重信号检测,从参数估计到波形和谱估计,由浅入深,循序渐进。其次,强调理论推导的循序性和语言描述的精炼性,为了便于教师讲授和学生自学,理论推导环环紧扣,从简到繁,由易到难,力求通俗易懂,便于理解。

(3) 实例丰富。本书运用大量实际信号处理问题来说明相关理论,使理论叙述更加生动和易于理解,同时本书还提供大量的例题,各章均安排一定数量的思考题和习题,便于读者理解和巩固所学的概念和方法,提高分析问题和解决问题的能力。

本书可以作为电子信息类专业(如通信工程、电子信息工程、测控技术与仪器等专业)高年级本科生和通信与信息系统、信号与信息处理、电路与系统等学科硕士研究生的教材,建议讲授 40 学时左右。学习本门课程需要先修“概率论”、“信号与系统”、“数字信号处理”等课程。在教材使用中,对于加*的章节可以不讲,供学生参考。

本书由张立毅担任主编,负责修订统稿和定稿,并修订了第 1 章。张雄和李化担任副主编,分别修订了第 3 章和第 4 章。赵菊敏、梁风梅、张文爱、武晓嘉、赵永强、李灯熬、李艳琴分别修订了第 2 章和第 5 章到第 10 章,刘婷修订编写了第 11 章和第 12 章,在编写过程中,作者还参阅了不少的文献资料,也一并对这些文献的作者致以诚挚的谢意。

由于作者水平有限,书中难免会出现一些疏漏和不妥之处,恳请读者批评指正。

作 者
2014 年 7 月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 信号检测与估计理论的研究对象	1
1.2 信号检测与估计理论的发展历程	1
1.2.1 初创和奠基阶段	1
1.2.2 迅猛发展阶段	2
1.2.3 成熟阶段	2
1.3 本课程的性质和内容安排	2
思考题	4
第 2 章 随机信号及其统计描述	5
2.1 随机过程	5
2.1.1 随机过程的概念	5
2.1.2 随机过程的统计描述	6
2.1.3 随机过程的平稳性与各态历经性	8
2.1.4 随机过程的独立性、相关性和正交性	11
2.1.5 平稳随机过程的功率谱密度函数	12
2.1.6 复随机过程及其统计特性	14
2.2 随机过程的正交级数表示	15
2.2.1 完备的正交函数集	15
2.2.2 随机信号的卡亨南-洛维展开	15
2.2.3* 格拉姆-施密特正交化法	20
2.3* 实信号的复数表示法与希尔伯特变换	22
2.3.1 实信号的复数表示法与希尔伯特变换	22
2.3.2 希尔伯特变换的性质	24
2.4 高斯噪声与白噪声	26
2.4.1 高斯噪声	26
2.4.2 白噪声	27
本章小结	28
思考题	29
习题	30
第 3 章 经典检测理论	31
3.1 检测理论的基本概念	31
3.2 最大后验概率准则	33

3.2.1	接收机结构形式	33
3.2.2	接收机性能评价	34
3.3	最小风险 Bayes 准则	36
3.3.1	接收机结构形式	36
3.3.2	Bayes 准则与最大后验概率准则的关系	38
3.4	最小错误概率准则	38
3.5	极大极小准则	40
3.5.1	不同 $P(H_0)$ 下的 Bayes 风险	41
3.5.2	假定 $P(H_0)=q_1$, 实际 $P(H_0)$ 不一定是 q_1 时的平均风险	41
3.6	Neyman-Pearson 准则	43
3.7	M 元检测	45
3.7.1	M 元检测的 Bayes 准则	46
3.7.2	M 元检测的最大后验概率准则	47
3.7.3	M 元检测的最大似然检验准则	47
	本章小结	49
	思考题	50
	习题	50
第 4 章	确知信号的检测	52
4.1	高斯白噪声下二元确知信号的检测	52
4.1.1	接收机的结构形式	52
4.1.2	接收机的检测性能	55
4.2	三种常用系统性能评价	58
4.2.1	相干相移键控系统	58
4.2.2	相干频移键控系统	59
4.2.3	相干启闭键控系统	60
4.3	高斯白噪声下多元确知信号的检测	61
4.3.1	接收机的结构形式	61
4.3.2*	接收机的检测性能	61
4.4*	高斯色噪声中确知信号的检测	63
4.4.1	卡亨南-洛维展开法	63
4.4.2	接收机的结构形式	64
4.4.3	接收机的检测性能	67
4.4.4	最佳信号波形	70
4.5	匹配滤波器	71
4.5.1	最大信噪比准则	72
4.5.2	白噪声背景下的匹配滤波器	73
4.6	广义匹配滤波器	77
4.6.1	积分方程的近似解法	77

4.6.2	预白化方法	77
4.6.3	白化滤波器的构成	78
本章小结		79
思考题		80
习题		81
第 5 章	随机参量信号的检测	82
5.1	复合假设检验	82
5.1.1	复合假设检验的 Bayes 准则	82
5.1.2	复合假设检验的 Neyman-Pearson 准则	85
5.1.3	复合假设检验的最大似然检验准则	86
5.2	随机相位信号的检测	86
5.2.1	最佳检测系统的结构	86
5.2.2	检测性能	89
5.3	随机相位和振幅信号的检测	92
5.3.1	最佳检测系统结构	92
5.3.2	检测性能	93
5.4	随机频率信号的检测	94
5.4.1	随机相位和频率信号的检测	94
5.4.2	随机相位和频率、振幅瑞利衰减信号的检测	96
5.4.3	一种多元信号的检测方法	98
5.5	随机时延信号的检测	98
5.5.1	随机相位和时延信号的检测	98
5.5.2	随机相位、频率和时延信号的检测	100
本章小结		100
思考题		102
习题		102
第 6 章	多重信号的检测	103
6.1	确知脉冲串信号的检测	103
6.1.1	似然比检验和最优处理器	103
6.1.2	检测性能	105
6.2	随机参量脉冲串信号的检测	106
6.2.1	随机相位非相干脉冲串信号的检测	106
6.2.2	随机振幅和相位脉冲串信号的检测	109
本章小结		112
思考题		113
习题		113

第 7 章 序贯检测	114
7.1 序贯检测的一般原理	114
7.2 序贯似然比检测	115
7.2.1 判决规则	115
7.2.2 检测门限	116
7.2.3 平均取样数	118
7.2.4 判决终止的必然性	119
7.3 序贯检测的实例分析	121
本章小结	124
思考题	124
习题	125
第 8 章 经典估计理论	126
8.1 引言	126
8.2 Bayes 估计	126
8.2.1 代价函数的形式	126
8.2.2 Bayes 估计准则	127
8.3 最大后验估计	129
8.4 最大似然估计	130
8.5 最小二乘法估计	132
8.5.1 最小二乘法	132
8.5.2 线性信号模型的最小二乘法估计	133
8.6 估计量的性质	134
8.6.1 无偏性	135
8.6.2 一致性	135
8.6.3 充分性	136
8.6.4 有效性	137
8.7 克拉默-拉奥不等式	137
8.7.1 克拉默-拉奥不等式的形式	137
8.7.2 几点讨论	138
8.8 估计的最小均方误差界	140
本章小结	142
思考题	143
习题	143
第 9 章 信号参量的估计	148
9.1 概述	148
9.1.1 估计量的计算	148
9.1.2 估计量的性能分析	148

9.2	振幅估计	149
9.2.1	振幅估计量的计算	149
9.2.2	振幅估计量的性能分析	150
9.3	相位估计	151
9.4	时延估计	153
9.4.1	时延估计量的计算	153
9.4.2	雷达自动距离跟踪环路	155
9.4.3	时延估计量的性能分析	156
9.5	频率估计	156
	本章小结	158
	思考题	158
	习题	158
第 10 章	维纳滤波和卡尔曼滤波	160
10.1	概述	160
10.2	维纳滤波	161
10.2.1	连续过程的维纳滤波	161
10.2.2	离散过程的维纳滤波	163
10.3	卡尔曼滤波	171
10.3.1	卡尔曼滤波的信号模型	171
10.3.2	卡尔曼滤波器的设计	171
	本章小结	175
	思考题	175
	习题	176
第 11 章	自适应滤波	177
11.1	自适应滤波概述	177
11.1.1	自适应滤波的基本概念	177
11.1.2	自适应滤波的组成	177
11.1.3	自适应滤波的分类	177
11.1.4	自适应滤波的性能指标	178
11.2	最小均方自适应滤波算法	178
11.2.1	基本原理	178
11.2.2	均方误差性能曲面	180
11.2.3	算法形式	182
11.2.4	收敛特性	183
11.3	递归最小二乘自适应滤波算法	186
11.3.1	算法原理	186
11.3.2	RLS 算法和 LMS 算法的比较	189

本章小结·····	189
思考题·····	190
习题·····	190
第 12 章 功率谱估计 ·····	192
12.1 概述·····	192
12.2 经典谱估计法·····	193
12.2.1 间接法·····	193
12.2.2 直接法·····	196
12.3 现代谱估计法·····	200
12.3.1 信号模型及其选择·····	201
12.3.2 AR 模型谱估计法·····	202
12.4 白噪声中正弦信号的谱估计·····	207
12.4.1 最大似然法·····	207
12.4.2 Capon 谱估计法·····	209
本章小结·····	210
思考题·····	211
习题·····	212
参考文献 ·····	213

第 1 章 绪 论

本章提要

本章简要介绍信号检测与估计理论的地位、作用,研究对象和发展历程,以及本课程的特点和主要内容等。

1.1 信号检测与估计理论的研究对象

信号检测与估计理论是现代信息理论的一个重要分支,是以信息论为理论基础,以概率论、数理统计和随机过程为数学工具,综合系统理论与通信工程的一门学科。主要研究在信号、噪声和干扰三者共存条件下,如何正确发现、辨别和估计信号参数,为通信、雷达、声呐、自动控制等技术领域提供了理论基础。并在统计识别、射电天文学、雷达天文学、地震学、生物物理学以及医学信号处理等领域获得了广泛应用。

通信、雷达、自动控制系统是当今重要的信息传输系统(即广义的通信系统),都可以用香农模型来表示,如图 1.1 所示。对其性能的要求,一是有效性,即要求系统能高效率地传输信息,二是可靠性或抗干扰性,即要求系统能可靠地传输信息。但在信息传输过程中,不可避免地引入噪声和干扰,降低可靠性。因此,接收端接收到的是受到干扰的信号,即畸变信号。

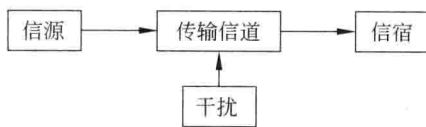


图 1.1 信息传输系统的香农模型

信号检测与估计理论就是要对接收到且已经受到干扰的信号进行检测与估计,检测有用信号存在与否,估计信号的波形或参量。即在接收端,利用信号概率和噪声功率等信息,按照一定的准则判定信号的存在,称为信号检测;利用接收到的受干扰的发送信号序列尽可能精确地估计该发送信号的某些参数值(如振幅、频率、相位、时延等)和波形,称为信号估计(包括参数估计和波形估计)。

1.2 信号检测与估计理论的发展历程

信号检测与估计理论自 20 世纪 40 年代问世以来,得到了迅速的发展和广泛的应用,其发展历程可以大致分为 3 个阶段。

1.2.1 初创和奠基阶段

信号检测与估计理论是从 20 世纪 40 年代第二次世界大战中逐步形成和发展起来的。在整个 20 世纪 40 年代,美国科学家维纳(N. Wiener)和前苏联科学家柯尔莫格洛夫(А. Н. Иолмогоров)将随机过程及数理统计的观点引入通信和控制系统,揭示了信息传输和处理过程的统计本质,建立了最佳线性滤波器理论,即维纳滤波理论。这样,就把经典

的统计判决理论和统计估计理论与通信工程紧密结合起来,为信号检测与估计理论奠定了基础。但由于维纳滤波需要的存储量和计算量极大,很难进行实时处理,因而限制了其应用和发展。

同时,在雷达技术的推动下,诺思(D. O. North)于1943年提出了以输出最大信噪比为准则的匹配滤波器理论。1946年,卡切尼科夫(В. А. Котелъников)发表了《潜在抗干扰性理论》,用概率论方法研究了信号检测问题,提出了错误判决概率为最小的理想接收机理论,证明了理想接收机应在其接收端重现出后验概率最大的信号,即将最大后验概率准则作为一个最佳准则。1948年香农(C. E. Shannon)认识到对消息事先的不确定性正是通信的对象,并在此基础上建立了信息论的基础理论。1950年伍德沃德(P. M. Woodward)将信息量的概念应用到雷达信号检测中,提出了理想接收机应能从接收到的信号加噪声的混合波形中提取尽可能多的有用信号,即理想接收机应是一个计算后验概率的装置。

1.2.2 迅猛发展阶段

在整个20世纪50年代,信号检测与估计理论发展迅速。1953年密德尔顿(D. Middleton)等人用贝叶斯(Bayes)准则来处理最佳接收问题,使各种准则统一到了风险理论,这就将统计假设检验和统计推断理论等数理统计方法用于信号检测,建立了统计检测理论。1960—1961年卡尔曼(R. E. Kalman)和布什(R. S. Bucy)提出递推滤波器,即卡尔曼滤波器。它不要求保存过去数据,当获得新数据后,根据新数据和前一时刻诸量的估值,借助于系统本身的状态转移方程,按照递推公式,即可算出新的诸量估值,大大减小了滤波器的存储器和计算量,便于实时处理。1965年以来,信号估计广泛采用自适应滤波器。它在数字通信、语言处理和消除周期性干扰等方面,已取得良好的效果。

1.2.3 成熟阶段

20世纪60年代,多部有关信号检测与估计理论的专著问世,范特里斯(H. L. Van Trees)陆续完成了他的三大卷巨著^①,将信号检测的概念拓宽到估值、滤波、调制解调范围,使数字通信和模拟通信中的主要理论问题都可以用统一的数理统计理论和方法来研究,取得了满意的结果。这是信号检测与估计理论的代表作。

1.3 本课程的性质和内容安排

本课程是电子信息类专业的一门重要专业课。通过本课程的学习,尽可能使学生系统地了解信号检测与估计的基础知识和基本理论,掌握对受噪信号处理的基本方法。

全书共分12章,除绪论和本门课程所需基础理论的介绍外,第3~7章介绍信号检测的基本理论和方法,包括经典检测理论、确知信号的检测、随机参量信号的检测、多重信号的检测以及序贯检测;第8~12章介绍估计理论,包括估计的方法、性质以及信号参量、信号波形和谱估计等。

^① VAN TREER H L. Detection, Estimation, and Modulation Theory[M]. New York: Wiley, Part I 1968, Part II 1971, Part III 1971. 中译本《检测、估计和调制理论》于1983年由国防工业出版社出版。

在编写过程中,注意了由浅入深,循序渐进。在简要介绍信号检测与估计理论的基础知识,即随机信号分析及其统计特性的基础上,按照惯例,先讲检测部分,后讲估计部分,先讲经典理论,后讲实际应用。在检测部分,首先分析最大后验概率准则、Bayes 准则、最小错误概率准则、极大极小准则和 Neyman-Pearson 准则 5 个经典检测理论中常用的检测准则,并统一归属到似然比检验中;然后针对不同的应用环境,具体分析了确知信号、随机参量信号、多重信号的检测理论和方法,以及序贯检测方法。在估计部分,首先阐述了 Bayes 估计、最大后验概率估计和最大似然估计 3 个经典估计准则,分析了估计量的无偏性、一致性、充分性和有效性等性质;然后具体介绍了信号参量和信号波形的估计。从简到繁,从易到难,环环紧扣,前后呼应。

具体各章节的主要内容如下。

第 1 章绪论。简要介绍了信号检测与估计理论的地位作用、研究对象和发展历程,以及本课程的性质和主要内容等。

第 2 章随机信号及其统计描述。简要阐述了随机过程的概念、统计描述方法和正交级数的展开形式,介绍了高斯噪声和白噪声及其统计特性,讨论了实信号的复数表示方法以及希尔伯特变换的基本概念和主要性质等。

第 3 章经典检测理论。简要介绍了信号检测理论的基本概念,分析了在经典检测理论中常用的 5 个检测准则,即最大后验概率准则、Bayes 准则、最小错误概率准则、极大极小准则和 Neyman-Pearson 准则等。

第 4 章确知信号的检测。介绍了高斯白噪声背景下确知信号检测接收机的设计方法,评价了检测性能。分析了常用的相干相移键控系统、相干频移键控系统和相干启闭键控系统的检测性能,讨论了匹配滤波器和广义匹配滤波器的设计方法和基本性质。同时,还介绍了高斯色噪声背景下确知信号的检测。

第 5 章随机参量信号的检测。讨论了复合假设检验中的 Bayes 准则、Neyman-Pearson 准则和最大似然检验准则,分析了随机相位、振幅、频率和时延信号的检测原理及检测性能。

第 6 章多重信号的检测。讨论了确知脉冲串信号和随机相位非相干脉冲串信号,以及随机振幅相位脉冲串信号的检测原理,分析了其检测性能。

第 7 章序贯检测。介绍了序贯检测的基本概念,分析了序贯检测的判决规则及其检测门限的确定方法,得出了其平均取样数关系式,并举例比较了序贯检测和固定取样数检测的性能差异。

第 8 章经典估计理论。介绍了 Bayes 估计、最大后验概率估计和最大似然估计 3 个经典估计准则。分析了估计量的无偏性、一致性、充分性和有效性等性质。

第 9 章信号参量的估计。讨论了单参量估计的通用公式和性能分析,介绍了振幅、相位、时延和频率的最大似然估计方法,并分析了振幅和相位估计的性能。

第 10 章维纳滤波和卡尔曼滤波。介绍了维纳滤波和卡尔曼滤波两种最优线性滤波方法。分析了连续过程和离散过程维纳滤波器,以及卡尔曼滤波器的信号模型,给出了卡尔曼滤波器的设计流程。

第 11 章自适应滤波。简要阐述了自适应滤波的基本概念、组成、分类和性能指标,分析了 LMS 和 RLS 两类常用的自适应滤波算法的基本原理和迭代公式等,并对其性能进行了讨论。

第 12 章功率谱估计。介绍了常用的 BT 法和周期图法两种经典谱估计方法,分析了其

性能,讨论了参数化模型法的基本原理,重点阐述了 AR 和 ARMA 模型谱估计的求解方法,并针对常用的正弦随机信号,分析了高斯白噪声中正弦信号的谱估计方法。

思 考 题

1. 试述信息传输系统香农模型中各部分的作用及与信号检测和估计的关系。
2. 试述信息传输系统的性能指标。

第 2 章 随机信号及其统计描述

本章提要

本章简要阐述随机过程的基本概念、统计描述方法和正交级数的展开形式,介绍高斯噪声和白噪声及其统计特性,讨论实信号的复数表示方法以及希尔伯特变换的基本概念和主要性质等。

信号在传输和处理过程中,不可避免要受到各种干扰,如噪声干扰、码间串扰、同信道干扰和邻信道干扰等,接收机只能接收到发生了畸变的信号。各种噪声和干扰都具有随机性,不能用一个确定的时间函数来描述,所以必须用描述一般随机过程的方法来进行分析。

2.1 随机过程

2.1.1 随机过程的概念

概率论研究的对象是随机变量,它是随机过程的一个具体实现,是指依赖随机因素而变,以一定概率取值的变量,其特点是在每次实验结果中,以一定的概率取某个事先未知、但是确定的数值。在通信和电子信息系统中,常常涉及随时间变化的随机变量,如接收机的噪声电压。通常把一组随机变量称为随机过程。

用示波器来观察某种接收机输出的噪声电压波形。假定接收机无信号输入,但由于其内部元器件会产生热噪声,经过放大后,在接收机输出端产生噪声电压。图 2.1 为 N 台性能完全相同的接收机输出的噪声电压波形,记录每台接收机的输出电压都能得到一条确定的波形,称为一个样本函数,所有可能出现的噪声电压波形 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ 的集合就构成了一个随机过程。对一台接收机进行观测时,得到的波形一定是样本函数中的一个,但究竟哪个样本函数会出现,事先无法判断。因此,随机过程既是时间的函数,又是随机试验可能出现的结果的函数。

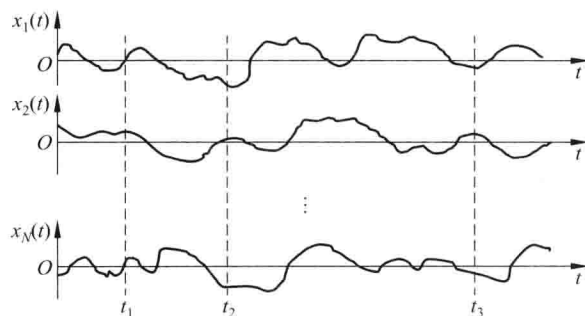


图 2.1 接收机输出的噪声电压波形

下面给出随机过程的严格定义。

定义 1: 设随机试验 E 的样本空间为 $S = \{e\}$, 对其中每一个元素 $e_i (i=1, 2, \dots)$ 都以某种法则确定一个样本函数 $x(t, e_i)$, 由全部元素 $\{e\}$ 所确定的一簇样本函数 $X(t, e)$ 称为随机过程, 简记为 $X(t)$ 。

在固定时刻 $t=t_i$ 时, 随机过程 $X(t, e)$ 变为 $X(t_i, e)$, 因为仅随机因素 e 在变化, $X(t_i, e)$ 称为一个随机变量。对于不同的时刻 $t_1, t_2, \dots, t_N, \dots$, $X(t_i, e)$ 对应于不同的随机变量 $X(t_1, e), X(t_2, e), \dots, X(t_N, e), \dots$ 。可见 $X(t, e)$ 可以看作一组依赖于时间参量的随机变量的集合, 据此给出随机过程的第二种定义如下。

定义 2: 设有一个时间函数 $X(t)$, 若对于每一个固定的时刻 $t_i (i=1, 2, \dots)$, $X(t_i)$ 是一个随机变量, 则称 $X(t)$ 为随机过程。

2.1.2 随机过程的统计描述

在对随机过程进行多次观测时, 可以记录下若干个千变万化的样本波形, 但在某次具体的实验中哪一个样本波形会出现是无法预知的, 且样本波形很难定量地描述随机过程的变化规律, 但它们却具有共同的统计特性。因此, 可以用样本波形的统计特性来描述随机过程。

用统计特性描述随机过程的方法分为两大类: 一类是多维概率密度函数和分布函数, 另一类是随机过程的数字特征。

1. 随机过程的概率分布

随机过程 $X(t)$ 在任一给定时刻 t_1 的取值为一维随机变量 $X(t_1)$ 。概率 $P[X(t_1) \leq x_1]$ 是取值 x_1 和时刻 t_1 的函数, 表示为

$$F_X(x_1, t_1) = P[X(t_1) \leq x_1] \quad (2.1)$$

称为随机过程 $X(t)$ 的一维概率分布函数。

若 $F_X(x_1, t_1)$ 对 x_1 的一阶偏导数存在, 定义

$$f_X(x_1, t_1) = \frac{\partial F_X(x_1, t_1)}{\partial x_1} \quad (2.2)$$

为随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度函数。

一维概率分布函数和一维概率密度函数给出了随机过程最简单的概率分布特性, 只能描述随机过程在任一孤立时刻取值的统计特性, 而不能反映出随机过程各个时刻的内在联系。

随机过程 $X(t)$ 在任意两个时刻 t_1, t_2 的取值为随机变量 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$, 它们构成二维随机变量, 记作

$$F_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2) \quad (2.3)$$

称为随机过程 $X(t)$ 的二维概率分布函数。

若 $F_X(x_1, x_2, t_1, t_2)$ 对 x_1 和 x_2 的二阶偏导数存在, 则定义

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.4)$$

为随机过程 $X(t)$ 的二维概率密度函数。

二维概率分布函数和二维概率密度函数比一维概率分布包含了更多的信息, 可以描述随

机过程在任意两个时刻取值之间的关联。但还是不能完整地反映出随机过程的全部信息。用同样的方法,可以得到随机过程 $X(t)$ 的 n 维概率分布函数和 n 维概率密度函数,分别为

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n) \quad (2.5)$$

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial F_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (2.6)$$

从理论上讲, n 值越大, 随机过程的 n 维概率分布函数和 n 维概率密度函数所描述的随机过程的统计特性就越完善, 但随着 n 值的增大分析处理会变得越来越复杂。

2. 随机过程的数字特征

虽然利用多维概率密度函数能够全面描述随机过程的统计特性, 但在大多数情况下, 计算随机过程的概率密度函数比较复杂, 而且没有必要。一般利用随机过程的数字特性就可以简捷地解决实际问题, 同时满足应用要求。

随机过程的数字特征主要包括数学期望、方差、相关函数、协方差函数和功率谱密度函数等。

(1) 数学期望。随机过程 $X(t)$ 在任一时刻 t 的数学期望定义为

$$E[X(t)] = m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x, t) dx \quad (2.7)$$

数学期望是一个时间的确定函数, 由随机过程 $X(t)$ 所有样本在任一时刻 t 的值取平均而得到, 即统计平均值。它表示所有样本在任一时刻 t 取值的分布中心。

(2) 方差。随机过程 $X(t)$ 在任一时刻 t 的方差定义为

$$\begin{aligned} \text{Var}[X(t)] &= D_X(t) = \sigma_X^2(t) = E[(X(t) - E[X(t)])^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_X(t)]^2 f_X(x, t) dx \end{aligned} \quad (2.8)$$

方差 $\text{Var}[X(t)]$ 也是时间的确定函数, 且必为非负函数, 描述了随机过程的诸样本相对于数学期望的平均偏离程度。其算术平方根 $\sigma_X(t)$ 称为标准差或方差根。

(3) 相关函数。数学期望和方差分别描述随机过程在某时刻的特征, 但反映不出随机过程的内在联系。自相关函数就是用来描述其内在联系特征的。

随机过程 $X(t)$ 在任意两个时刻 t_1 和 t_2 上的自相关函数定义为

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (2.9)$$

随机过程的自相关函数描述了同一个随机过程在任意两个不同时刻取值之间的相关程度。

设有两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$, 它们在任意两个时刻 t_1 和 t_2 的取值分别为 $X(t_1)$ 和 $Y(t_2)$, 其互相关函数定义为

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 f_{XY}(x_1, y_2, t_1, t_2) dx_1 dy_2 \quad (2.10)$$

其中, $f_{XY}(x_1, y_2, t_1, t_2)$ 是 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的二维联合概率密度函数。

互相关函数描述了两个随机过程之间的统计关联特性。

(4) 协方差函数。随机过程 $X(t)$ 在任意两个时刻 t_1 和 t_2 上的自协方差函数定义为

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= E[(X(t_1) - E[X(t_1)])(X(t_2) - E[X(t_2)])] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_X(t_1)][x_2 - m_X(t_2)] f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

随机过程的自协方差函数描述了同一个随机过程在任意两个时刻起伏值之间的平均相