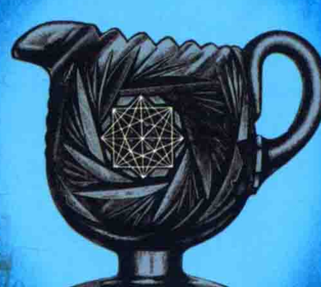
300 Mathematical Problems of Japanese College Entrance Examination

300个日本高考数学题

◎主编 东义博



尝得春秋，披览不倦。凡大家之手迹，古典之珍品，
莫不采摭其华实，探涉其源流，钩纂枢要而编节之，改岁钥而成书。

香港凤凰卫视评论员梁文道先生说：我们常把经典和畅销书对立起来，
觉得后者虽能红极一时，终究是过眼云烟；而前者面世初时光华内敛，却能长明不息。
写书出书，当以铸经典为职志。

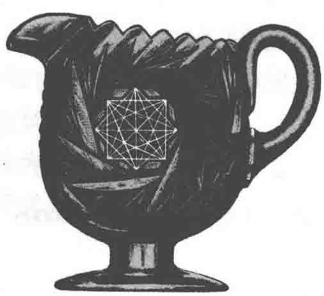
在罗马的贵族家庭会聘请启蒙师傅来带孩子们背诵、阅读和理解经典。
教师们的任务不是兜售自己的知识，而是忠实地教会孩子们读通经典。

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

300 Mathematical Problems of Japanese College Entrance Examination

300个日本高考数学题

◎主　编　东义博
◎副主编　康沛嘉
◎编　委　许　季　康　明　白晓雪
高思洋　许逸飞　刘振杰



尝得春秋，披览不倦。凡大家之手迹，古典之珍品，
莫不采摭其华实，探涉其源流，钩纂枢要而编节之，改岁钥而成书。

香港凤凰卫视评论员梁文道先生说：我们常把经典和畅销书对立起来，
觉得后者虽能红极一时，终究是过眼云烟；而前者面世初时光华内敛，却能长明不息。
写书出书，当以铸经典为职志。

在罗马的贵族家 … 卖和理解经典。
教师们的任务不 … 子们读通经典。

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书是配合日本现行高中教材《数学Ⅰ》而编选的题解，内容包括代数、几何、三角、概率、集合和逻辑方面的300道习题及其解答. 其内容和难易程度基本上相当于我国新编中学数学教材的水平. 习题较为新颖，富有启发性. 本书特点是着重考查学生对基础知识理解和掌握的程度以及运用基础知识分析和解决问题的能力，以便得到相应的提高.

本书可供高中学生及中学数学教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

300个日本高考数学题/东义博主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.4

ISBN 978-7-5603-3508-7

Ⅰ.①3… Ⅱ.①东… Ⅲ.①中学数学课-高中-题解-升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第027041号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 杨万鑫
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张16 总字数260千字
版　　次 2012年4月第1版 2012年4月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3508-7
定　　价 38.00元

序 言

据说:“牛顿少年时,在剑桥大学附近的夜市,买到一本欧几里得的《几何原本》进行学习,可是又觉得它的内容只不过是常识性的东西,因此便弃之不学了,马上又自鸣得意地学起笛卡儿的《坐标几何学》.1664 年 4 月在参加选拔享受德利尼奖学金的考试中,他的几何成绩不佳,完全失败了.考试官巴罗博士提醒他说:‘因为你缺乏几何学的基础知识,所以怎么学也白费.’他认真地总结了这个教训,振作起精神,于是又重新刻苦地、反复地学习了欧几里得的《几何原本》,从而开始领会到几何学的奥妙,同时深切地感到,在所有的学术方面,基础知识是非常重要的,从此转变了学习态度,终于成为数学史上罕见的大数学家.”

我认为在高中的数学学习中,一开始对好像容易的地方,就马马虎虎地应付过去,只一个劲儿地死记硬背难题解法的毫无实力的学生是大有人在的.

数学是在一个基础理论之上积累其他基础理论,并由这些基础理论构成的严谨理论体系,这一点可以说是数学的生命.

1979 年实行的第一次统一考试①,也是想要调查一下“高中阶段应达到的一般的、基本的学习程度”,在《数学Ⅰ》② 的

① 日本大学人学考试分为两次,第一次为全国统一考试,第二次为各大学自主招生考试.从 1979 年实施至今——编校注.

② 日本高中数学教科书——译者注.

广泛的范围内，除了把重点放在基础知识上的试题，还要求综合性的知识，所以，不仅要记住基础知识，而且必须有灵活运用基础知识的能力，因此应当在根据教科书复习基础知识之后，通过典型的重要的习题来掌握“数学的思考方法”，并把基础知识全部整理出来，以便应对实际的需要或考试.

本书是根据上述宗旨，从教科书的基础知识出发，把标准的入学试题（第一次统一考试的标准）作为上限，精选 300 道题，分成 9 章，按发展的阶段编排的.它的内容不仅适用于想要掌握《数学 I》基本内容的人，而且也很适用于想参加第一次统一考试的人.

由于全部习题采用符号、表格、解答的形式，所以自己运用的公式、计算方法、思考方法等是否正确，马上就能得到验证. 因为在平时的学习中对基础知识的检查，或在统一考试中都采用了符号、表格形式，所以要在应试之前使用本书，熟悉这种解题形式.

使用本书时，要特别注意下列几点：

①沉着冷静地看准题，抓住题意；

②经常考虑曲线及几何图形的背景；

③注意整理题中所包含的基础知识；

④不是填空式的，而要作为一般的设问形式的题来解；

⑤答案要弄准号码，整整齐齐地填满；

⑥修改处要擦干净，尽可能使用塑料橡皮；

⑦以坚强的毅力，坚持到底.

希望同学们很好地使用这本习题集，并祝取得成功.

东义博

目　录

1　**数、式的计算** ……………………………… (1)

整式的计算 ……………………………… (1)

因式分解 ……………………………… (4)

整式的因式、倍式 ……………………………… (8)

分式、比例式 ……………………………… (9)

集合和运算 ……………………………… (12)

无理数 ……………………………… (15)

整数、约数、倍数 ……………………………… (19)

等式的证明、式子的值 ……………………………… (23)

2　**方程、不等式** ……………………………… (27)

虚数的计算 ……………………………… (27)

一次方程、一次方程组 ……………………………… (29)

二次方程 ……………………………… (31)

判别式、根与系数的关系 ……………………………… (33)

根的符号与大小 ……………………………… (38)

公共根 ……………………………… (40)

因式定理 ……………………………… (41)

恒等式 ……………………………… (43)

高次方程 ……………………………… (45)

方程组 ……………………………… (47)

一次不等式 ……………………………… (50)

二次不等式 ……………………………… (52)

比较大小 ……………………………… (55)

不等式的证明 …… (56)
3　平面图形和方程 …… (60)
点的坐标 …… (60)
直线方程 …… (62)
圆的方程 …… (69)
圆与直线 …… (72)
圆与圆 …… (79)
各种曲线 …… (81)
直线的轨迹 …… (84)
圆的轨迹 …… (86)
各种曲线的轨迹 …… (90)
不等式和区域 …… (91)
区域和图形的最大值、最小值 …… (94)
空间图形 …… (97)
4　向量 …… (102)
向量及其运算 …… (102)
向量的分量 …… (107)
向量的应用 …… (112)
5　映射、简单的函数 …… (125)
映射 …… (125)
二次函数 …… (138)
各种函数 …… (141)
6　指数函数、对数函数 …… (149)
指数函数 …… (149)
对数函数 …… (154)
指数、对数的方程与不等式 …… (163)
7　三角函数 …… (174)
一般角的三角函数 …… (174)
三角函数、三角不等式 …… (185)
三角函数的最大值、最小值 …… (190)
三角函数图形上的应用 …… (192)
8　概率 …… (199)
情况的个数 …… (199)

排列 …… (200)
组合 …… (202)
事件与概率 …… (206)
概率的计算 …… (210)
期望值 …… (219)
9 集合、逻辑 …… (221)
集合 …… (221)
命题与集合 …… (228)
必要条件、充分条件 …… (229)
论证 …… (233)
编辑手记 …… (237)

1

数、式的计算

☞ 整式的计算(1 ~ 4)

❶ 设$A = 2x^3 + 3x^2 - 6$,$B = 12 + 3x^2 - x^3 - 2x$,$C = 3x - 2x^3 - x^2 - 4$时,回答下列的(1) ~ (3):

(1)$A + B + C = -(a_1)x^3 + (b_1)x^2 + (c_1)x + (d_1)$;

(2)$A - B = (a_1)x^3 + (b_1)x^2 + (c_1)x - (d_1e_1)$①;

(3)$2A - [B + (3C + A) - 2B] = (a_1)x^3 + (b_1)x^2 - (c_1d_1)x + (e_1f_1)$.

提示 把同类项纵向对齐即可. (3) 化简$2A - [B + (3C + A) - 2B] = A + B - 3C$之后,再计算.

【答】 (1)$a_1 \cdots 1$② $b_1 \cdots 5$ $c_1 \cdots 1$ $d_1 \cdots 2$

(2)$a_1 \cdots 3$ $b_1 \cdots 0$ $c_1 \cdots 2$ $d_1 \cdots 1$ $e_1 \cdots 8$

(3)$a_1 \cdots 7$ $b_1 \cdots 9$ $c_1 \cdots 1$ $d_1 \cdots 1$ $e_1 \cdots 1$ $f_1 \cdots 8$

〔解〕 (1)$A + B + C$,即

$$\begin{array}{r} 2x^3+3x^2-6 \\ -x^3+3x^2-2x+12 \\ +)\ -2x^3-x^2+3x-4 \\ \hline -x^3+5x^2+x+2 \end{array}$$

(2)$A - B$,即

$$\begin{array}{r} 2x^3+3x^2-6 \\ -)\ -x^3+3x^2-2x+12 \\ \hline 3x^3+2x-18 \end{array}$$

① "(d_1e_1)"表示一个数,并非d_1与e_1的乘积,以下类似 —— 编校注.

② "$a_1 \cdots 1$"表示a_1的答案为1,以下类似 —— 编校注.

(3) $2A-[B+(3C+A)-2B]=A+B-3C=A+B+(-3C)$，即

$$\begin{array}{r} 2x^3+3x^2\qquad\ -6 \\ -\ x^3+3x^2-\ 2x+12 \\ +)\ 6x^3+3x^2-\ 9x+12 \\ \hline 7x^3+9x^2-11x+18 \end{array}$$

❷ 展开下列各式：

(1) $(3x+4)(2x-5)=(a_1)x^2+(b_1c_1)x+(d_1e_1f_1)$；

(2) $(x+2y)^3=x^3+(a_1)x^2y+(b_1c_1)xy^2+(d_1)y^3$；

(3) $(x+2)(x^2-2x+4)=(a_1)x^3+(b_1)x^2+(c_1)x+(d_1)$；

(4) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)=(a_1)x^3+(b_1)a^2b+(c_1)ab^2+(d_1e_1)b^3$.

提示 (1) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$；

(2) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$；

(3) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$；

(4) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

【答】 (1) $a_1\cdots6$　$b_1\cdots-$　$c_1\cdots7$　$d_1\cdots-$　$e_1\cdots2$　$f_1\cdots0$

(2) $a_1\cdots6$　$b_1\cdots1$　$c_1\cdots2$　$d_1\cdots8$

(3) $a_1\cdots1$　$b_1\cdots0$　$c_1\cdots0$　$d_1\cdots8$

(4) $a_1\cdots8$　$b_1\cdots0$　$c_1\cdots0$　$d_1\cdots-$　$e_1\cdots1$

〔解〕 (1) 原式 $=3\cdot2\cdot x^2+[3\cdot(-5)+4\cdot2]x+4\cdot(-5)=6x^2-7x-20$；

(2) 原式 $=x^3+3x^2\cdot2y+3x\cdot(2y)^2+(2y)^3=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$；

(3) 原式 $=x^3+2^3=x^3+8$（提示(3)中，a 为 x，b 为 2 时）；

(4) 原式 $=(2a)^3-b^3=8a^3-b^3$（提示(4)中，a 为 $2a$，b 为 b 时）.

❸ 展开下列各式：

(1) $(a+2b-3c)(a-2b+3c)=(a_1)a^2+(b_1c_1)b^2+(d_1e_1)c^2+(f_1)ab+(g_1h_1)bc+(i_1)ca$；

(2) $x(x+1)(x+2)(x+3)=x^4+(a_1)x^3+(b_1c_1)x^2+(d_1)x+e_1$.

提示 展开复杂式子时，如果适当地代换，并在加、乘的顺序上想些办法，就能利用公式展开. (1) 设 $2b-3c=t$，则原式 $=(a+t)(a-t)=a^2-t^2$；(2) 原式 $=x(x+3)(x+1)(x+2)=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$，这里设 $x^2+3x=t$，则原式 $=t(t+2)=t^2+2t$.

【答】 (1) $a_1\cdots1$　$b_1\cdots-$　$c_1\cdots4$　$d_1\cdots-$　$e_1\cdots9$　$f_1\cdots0$　$g_1\cdots1$

$h_1 \cdots 2 \quad i_1 \cdots 0$

(2) $a_1 \cdots 6 \quad b_1 \cdots 1 \quad c_1 \cdots 1 \quad d_1 \cdots 6 \quad e_1 \cdots 0$

〔解〕 (1) 设 $t = 2b - 3c$,则

$$\text{原式} = (a+t)(a-t) = a^2 - t^2 =$$
$$a^2 - (2b-3c)^2 = a^2 - 4b^2 + 12bc - 9c^2$$

(2) 设 $t = x^2 + 3x$,则

$$\text{原式} = x(x+3)(x+1)(x+2) =$$
$$(x^2+3x)(x^2+3x+2) =$$
$$t(t+2)$$
$$\text{原式} = t^2 + 2t = (x^2+3x)^2 + 2(x^2+3x) =$$
$$x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 2x^2 + 6x =$$
$$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$$

❶ (1) $(a^2 - 3ab + 2b^2) \div (a - b)$ 的商式是 $(a_1)a + (b_1c_1)b$,余式是 (d_1);
(2) $(3 - 13x^2 + 4x^4 - 16x) \div (2x^2 + 1 - 3x)$ 的商式是 $(a_1)x^2 + (b_1)x + (c_1d_1)$,余式是 $-(e_1f_1)x + (g_1)$.

提示 整式的除法,按一个字母的降幂排列整理之后,用同整数一样的方法进行除法运算,求得商式和余式.

【答】 (1) $a_1 \cdots 1 \quad b_1 \cdots - \quad c_1 \cdots 2 \quad d_1 \cdots 0$

(2) $a_1 \cdots 2 \quad b_1 \cdots 3 \quad c_1 \cdots - \quad d_1 \cdots 3 \quad e_1 \cdots 2 \quad f_1 \cdots 8 \quad g_1 \cdots 6$

〔解〕 (1) 由题意得

$$\begin{array}{r|l}
 & a-2b \\ \hline
a-b & a^2-3ab+2b^2 \\
 & a^2-\ ab \\ \hline
 & -2ab+2b^2 \\
 & -2ab+2b^2 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

故商式 $a - 2b$,余式 0(除尽).

(2) 由题意得

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+\ 3x-3 \\ \hline
2x^2-3x+1 & 4x^4\qquad -13x^2-16x+3 \\
 & 4x^4-6x^3+\ 2x^2 \\ \hline
 & 6x^3-15x^2-16x \\
 & 6x^3-\ 9x^2+\ 3x \\ \hline
 & -\ 6x^2-19x+3 \\
 & -\ 6x^2+\ 9x-3 \\ \hline
 & -28x+6
\end{array}$$

故商式 $2x^2+3x-3$，余式 $-28x+6$.

☞ 因式分解(5 ~ 12)

❺ 将下列各式作因式分解:

(1) $5a^3b+25a^2b^2-15ab^3=(a_1)a^{(b_1)}b^{(c_1)}((d_1)a^2+(e_1)ab+(f_1g_1)b^2)$；

(2) $x(a-b)+y(a-b)=((a_1)a+(b_1c_1)b)((d_1)x+(e_1)y)$；

(3) $2a(3a-b)+b(b-3a)=((a_1)a+(b_1c_1)b)((d_1)a+(e_1f_1)b)$（且 $a_1<d_1$）.

提示 提取公因式 $ma+mb=m(a+b)$，$ma+mb+mc=m(a+b+c)$.

【答】 (1) $a_1\cdots5$ $b_1\cdots1$ $c_1\cdots1$ $d_1\cdots1$ $e_1\cdots5$ $f_1\cdots-$ $g_1\cdots3$

(2) $a_1\cdots1$ $b_1\cdots-$ $c_1\cdots1$ $d_1\cdots1$ $e_1\cdots1$

(3) $a_1\cdots2$ $b_1\cdots-$ $c_1\cdots1$ $d_1\cdots3$ $e_1\cdots-$ $f_1\cdots1$

〔解〕 (1) 原式 $=5ab(a^2+5ab-3b^2)$；

(2) 原式 $=(a-b)(x+y)$；

(3) 原式 $=2a(3a-b)-b(3a-b)=(2a-b)(3a-b)$.

❻ 将下列各式作因式分解:

(1) $4x^2+12x+9=((a_1)x+(b_1))^2$；

(2) $x^2+(a_1b_1)x+16=(x+(c_1))(x+8)$；

(3) $a^2+3a-18=(a+(a_1))(a+(b_1c_1))$.

提示 (1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$；

(2) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

【答】 (1) $a_1\cdots2$ $b_1\cdots3$

(2) $a_1\cdots1$ $b_1\cdots0$ $c_1\cdots2$

(3) $a_1\cdots6$ $b_1\cdots-$ $c_1\cdots3$

〔解〕 (1) 原式 $=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot3+3^2=(2x+3)^2$；

(2) 原式 $=x^2+(2+8)x+2\cdot8=(x+2)(x+8)$；

(3) 原式 $=a^2+(6-3)a+6\cdot(-3)=(a+6)(a-3)$.

❼ 将下列各式作因式分解:

(1) $3x^2-10x+3=(3x-(a_1))(x-(b_1))$；

(2)$2x^2+5xy-3y^2=(x+(a_1)y)((b_1)x-(c_1)y)$;

(3)$x^2+(2y-1)x+y(y-1)=(x+(a_1)y+(b_1))(x+(c_1)y-1)$.

提示　(1)$acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d)$;

$$\begin{array}{cccc} a & & b & \to bc \\ & \times & & \\ c & & d & \to ad \\ \hline ac & & bd & bc+ad \end{array}$$

x^2 的系数　常数项　x的系数

(2) 与 $2x^2+5x-3$ 的因式分解同样考虑;

(3) 二元二次式对于一个字母 x(或 y) 整理之后,再进行因式分解.

【答】　(1)$a_1\cdots1$　$b_1\cdots3$

(2)$a_1\cdots3$　$b_1\cdots2$　$c_1\cdots1$

(3)$a_1\cdots1$　$b_1\cdots0$　$c_1\cdots1$

〔解〕　(1) 原式 $=(3x-1)(x-3)$

$$\begin{array}{cccc} 3 & & -1 & -1 \\ & \times & & \\ 1 & & -3 & -9 \\ \hline 3 & & 3 & -10 \end{array}$$

(2) 原式 $=(2x-y)(x+3y)$

$$\begin{array}{cccc} 2 & & -1 & -1 \\ & \times & & \\ 1 & & 3 & 6 \\ \hline 2 & & -3 & 5 \end{array}$$

(3) 原式 $=x^2+[y+(y-1)]x+y(y-1)=(x+y)(x+y-1)$

8　将下列各式作因式分解:

(1)$64a^3-27=((a_1)a+(b_1c_1))((d_1e_1)a^2+(f_1g_1)a+(h_1))$;

(2)$8x^3+12x^2+6x+1=((a_1)x+(b_1))^3$.

提示　(1)$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

(2) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$.

【答】 (1) $a_1\cdots 4$ $b_1\cdots -$ $c_1\cdots 3$ $d_1\cdots 1$ $e_1\cdots 6$ $f_1\cdots 1$ $g_1\cdots 2$ $h_1\cdots 9$

(2) $a_1\cdots 2$ $b_1\cdots 1$

〔解〕 (1) 原式 $=(4a)^3-3^3=(4a-3)[(4a)^2+4a\cdot 3+3^2]=(4a-3)(16a^2+12a+9)$;

(2) 原式 $=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 1+3\cdot(2x)\cdot 1^2+1^3=(2x+1)^3$.

❾ 将下列各式作因式分解:

(1) $x^2y^4-1=(x^{(a_1)}y^{(b_1)}+1)(x^{(c_1)}y^{(d_1)}-1)$;

(2) $a^2-(b-1)^2=(a+(a_1)b+(b_1c_1))(a+(d_1e_1)b+(f_1))$(且 $a_1>d_1e_1$);

(3) $12x^2-3y^4=(a_1)((b_1)x+(c_1)y^2)((d_1)x-(e_1)y^2)$.

提示 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

【答】 (1) $a_1\cdots 1$ $b_1\cdots 2$ $c_1\cdots 1$ $d_1\cdots 2$ (2) $a_1\cdots 1$ $b_1\cdots -$ $c_1\cdots 1$ $d_1\cdots -$ $e_1\cdots 1$ $f_1\cdots 1$ (3) $a_1\cdots 3$ $b_1\cdots 2$ $c_1\cdots 1$ $d_1\cdots 2$ $e_1\cdots 1$

〔解〕 (1) 原式 $=(xy^2)^2-1^2=(xy^2+1)(xy^2-1)$;

(2) 原式 $=[a+(b-1)][a-(b-1)]=(a+b-1)(a-b+1)$;

(3) 原式 $=3[(2x)^2-(y^2)^2]=3(2x+y^2)(2x-y^2)$.

❿ 将下列各式作因式分解:

(1) $x^4-13x^2+36=(x^2-(a_1))(x^2-(b_1))=(x+(c_1))(x-(d_1))(x+(e_1))(x-(f_1))$(设 $a_1<b_1, c_1\leqslant d_1\leqslant e_1\leqslant f_1$);

(2) $a^4-5a^2b^2-36b^4=(a^2+(a_1)b^2)(a^2-(b_1)b^2)=(a^2+(a_1)b^2)(a+(c_1)b)(a-(d_1)b)$(设 $a_1<b_1, c_1\leqslant d_1$).

提示 (1) 设 $x^2=t$,则原式 $=t^2-13t+36=(t-4)(t-9)$. 由此,原式 $=(x^2-4)(x^2-9)$.

【答】 (1) $a_1\cdots 4$ $b_1\cdots 9$ $c_1\cdots 2$ $d_1\cdots 2$ $e_1\cdots 3$ $f_1\cdots 3$

(2) $a_1\cdots 4$ $b_1\cdots 9$ $c_1\cdots 3$ $d_1\cdots 3$

〔解〕 (1) 设 $x^2=t$,则

原式 $=t^2-13t+36=(t-4)(t-9)=$
$(x^2-4)(x^2-9)=(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$

(2) 设 $a^2=t$,则

原式 $=t^2-5b^2t-36b^4=(t-9b^2)(t+4b^2)=$

$$\left[a^2-(3b)^2\right](a^2+4b^2)=(a^2+4b^2)(a^2-9b^2)=$$
$$(a^2+4b^2)(a+3b)(a-3b)$$

⓫ 关于 $A=3x^2+xy-2y^2+6x+y+3$ 在(　　)内填上适当的数.

(1) 把 A 变为 $3x^2+Bx+C$ 形式,则 $B=(a_1)y+(b_1)$,$C=(c_1d_1)y^2+(e_1)y+(f_1)$,且 B,C 是 y 的整式;

(2) 把 A 因式分解为 $(x+(a_1)y+(b_1))((c_1)x+(d_1e_1)y+(f_1))$.

提示　A 式的因式分解是在关于 y 的式子 C 的因式分解基础上进行的.

【答】　(1) $a_1\cdots1$　$b_1\cdots6$　$c_1\cdots-$　$d_1\cdots2$　$e_1\cdots1$　$f_1\cdots3$

(2) $a_1\cdots1$　$b_1\cdots1$　$c_1\cdots3$　$d_1\cdots-$　$e_1\cdots2$　$f_1\cdots3$

〔解〕　(1) A 变形为

$$A=3x^2+xy-2y^2+6x+y+3=$$
$$3x^2+(y+6)x-2y^2+y+3$$

所以 $B=y+6$,$C=-2y^2+y+3$.

(2) A 变形为

$$A=3x^2+(y+6)x-2y^2+y+3=$$
$$3x^2+(y+6)x-(y+1)(2y-3)=$$
$$\left[x+(y+1)\right]\left[3x-(2y-3)\right]=$$
$$(x+y+1)(3x-2y+3)$$

⓬ 在下面的(　　)内填上适当的数或符号. 当 $a=(a_1b_1c_1)$ 时,$x^2+7xy+ay^2-5x+43y-24$ 能分解为两个一次式的积 $(x+(d_1e_1)y+(f_1))(x+(g_1)y+(h_1i_1))$. 且设 $d_1e_1<g_1$.

提示　根据待定系数法,设原式 $=(x+py+3)(x+qy-8)$.

【答】　$a_1\cdots-$　$b_1\cdots1$　$c_1\cdots8$　$d_1\cdots-$　$e_1\cdots2$　$f_1\cdots3$　$g_1\cdots9$　$h_1\cdots-$　$i_1\cdots8$

〔解〕　设 $x^2+7xy+ay^2-5x+43y-24=(x+py+3)(x+qy-8)$,则

$$p+q=7,\ -8p+3q=43$$

由此两式解得

$$p=-2,\quad q=9$$

所以原式 $=(x-2y+3)(x+9y-8)$,这时 $a=pq=-18$.

☞ 整式的因式、倍式(13 ~ 14)

13 试求下列两个整式的最高公因式与最低公倍式:

(1)$6a^2b^2c^3$,$9ab^3$.

G. C. M:[1]$(a_1)a^{(b_1)}b^{(c_1)}c^{(d_1)}$;

L. C. M:[2]$(e_1f_1)a^{(g_1)}b^{(h_1)}c^{(i_1)}$.

(2)x^3+7x^2+12x,x^2-x-20.

G. C. M:$(a_1)x^2+(b_1)x+(c_1)$;

L. C. M:$(x+(d_1))(x+(e_1))(x+(f_1))(x+(a_1h_1))(d_1<e_1<f_1)$.

提示 最高公因式的求法是:先对已给的整式进行因式分解,取出一切公因式,再写上各因式的最小指数. 最低公倍式的求法是:先取出一切不同的因式,再写上各因式的最大方指数. 还有,含有整系数的情形,一般是分别写上它们的最大公约数、最小公倍数.

【答】 (1)$a_1\cdots3$ $b_1\cdots1$ $c_1\cdots2$ $d_1\cdots0$ $e_1\cdots1$ $f_1\cdots8$ $g_1\cdots2$ $h_1\cdots3$ $i_1\cdots3$

(2)$a_1\cdots0$ $b_1\cdots1$ $c_1\cdots4$ $d_1\cdots0$ $e_1\cdots3$ $f_1\cdots4$ $g_1\cdots-$ $h_1\cdots5$

〔解〕 (1)$6a^2b^2c^3$,$9ab^3$ 的最高公因式是 $3ab^2$,最低公倍式是 $18a^2b^3c^3$.

(2) 因为

$$x^3+7x^2+12x=x(x^2+7x+12)=x(x+3)(x+4)$$

$$x^2-x-20=(x+4)(x-5)$$

所以最高公因式是 $x+4$,最低公倍式是 $x(x+3)(x+4)(x-5)$.

14 设最高公因式是 $x-1$,最低公倍式是 $x^3-6x^2+11x-6$,则有次数相等的两个整式$(x-1)((a_1)x+(b_1c_1))$ 和$(x-1)((d_1)x+(e_1f_1))(b_1c_1>e_1f_1)$.

提示 如设整式A,B的最高公因式是G,最低公倍式是L,则$A=GA'$,$B=GB'$. A',B' 互质,$L=GA'B'$. 因此,从 $L\div G$ 求得 $A'B'$.

【答】 $a_1\cdots1$ $b_1\cdots-$ $c_1\cdots2$ $d_1\cdots1$ $e_1\cdots-$ $f_1\cdots3$

〔解〕 设 $x^3-6x^2+11x-6=L$,$x-1=G$,则

---

① 最高公因式 —— 译者注.

② 最低公倍式 —— 译者注.

$$L=(x-1)(x^2-5x+6)=$$
$$(x-1)(x-2)(x-3)=$$
$$G(x-2)(x-3)$$

把$(x-2)(x-3)$分成次数相等,互质的两个整式的方法只有$x-2$和$x-3$一种.因此,所求的整式是$(x-1)(x-2)$和$(x-1)(x-3)$.

☞ 分式、比例式(15 ~ 17)

⑮ 计算下列各式:

(1) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-(y-z)^2}\cdot\dfrac{(x-y)^2-z^2}{x^2-xy}\div\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2+xy-xz}=\dfrac{(a_1)}{(b_1)}$;

① $x+y-z$　② $x-y+z$　③ $x-y-z$
④ $x+y+z$　⑤ $x+y$　⑥ $y+z$
⑦ $z+x$　⑧ $x-y$　⑨ $y-z$
⑩ $z-x$

(2) $\dfrac{a^4-16}{a^4+8a^2+16}\cdot\dfrac{a^3-8}{a^2+4}\div\dfrac{a^2+2a+4}{a^2+4a+4}=\dfrac{1}{(a_1)}$.

① a^2-2a+4　② a^2+2a+4　③ a^2+4
④ $a+2$　⑤ $a-2$　⑥ $(a+2)^2$
⑦ $(a-2)^2$

提示　(1) $\dfrac{A}{B}\cdot\dfrac{C}{D}\div\dfrac{E}{F}=\dfrac{ACF}{BDE}$;

(2) $\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}\cdot\dfrac{E}{F}=\dfrac{ADE}{BCF}$.

【答】 (1)a_1…③　b_1…⑤　(2)a_1…④

〔解〕 (1)

$$\text{原式}=\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y-z)(x-y+z)}\cdot\frac{(x-y+z)(x-y-z)}{x(x-y)}\cdot$$

$$\frac{x(x+y-z)}{(x+y)^2}=\frac{x-y-z}{x+y}$$

(2)

$$\text{原式}=\frac{(a+2)(a-2)(a^2+4)}{(a^2+4)^2}\cdot\frac{a^2+4}{(a-2)(a^2+2a+4)}\cdot$$