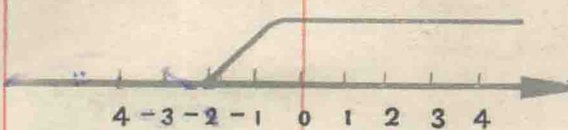
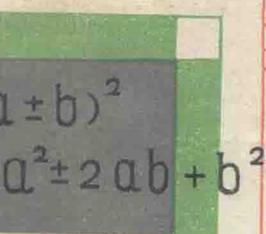
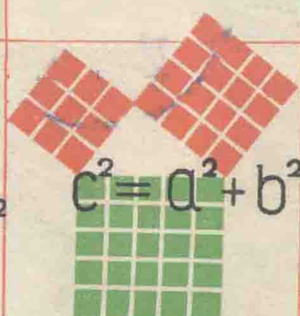
中学数学复习资料

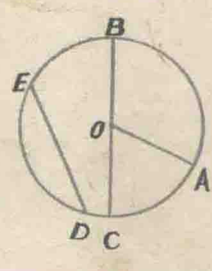
上 册

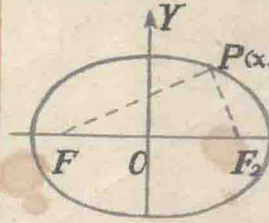
河北省教育科学研究所数学组







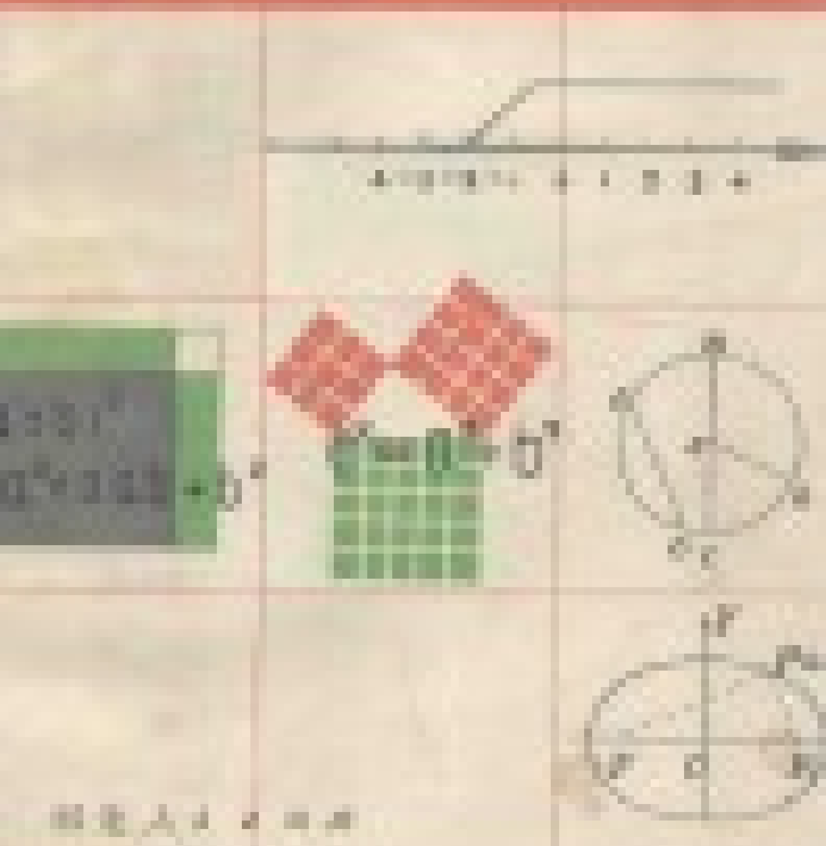




河北人民出版社

中学数学复习资料

上 册



中学数学复习资料

上册

河北省教育科学研究所数学组

河北人民出版社

一九八一年·石家庄

说　　明

为使广大读者对中学数学学科全面了解，提高分析问题和解决问题的能力，我们编写了《中学数学复习资料》．供中学生、知识青年自学，供中、小学教师教学或自修时参考．

本书共分两册，第一册包括代数、平面几何和三角部分；第二册包括立体几何和平面解析几何部分．

本书以全国统编中学数学教学大纲为基础，适当扩大了知识范围．每部分按单元编写，每个单元分前言、内容提要、例题、习题四部分，每个数学分科又有复习题．为了便于解题，每册书后加编附录，给出了某些习题的提示或答案，供演题时参考．

本书由我所主编，有石家庄地区、唐山地区、唐山市、沧州地区提供了丰富的素材．由于水平所限，书中难免有缺点或错误，衷心希望批评指正．

河北省教育科学研究所

一九七九年十二月

目　录

怎样进行总复习

这套复习资料包括了中学阶段的代数、平面几何、平面三角、立体几何、平面解析几何等全部内容.

关于代数部分，可以从数的扩充、恒等变换、函数、方程、不等式等几个方面来展开复习；这些知识也是中学代数的重要内容；其他的如指数、对数、数列及其极限、排列和组合等，一方面是它们各自有独特的作用，另一方面也是与上面所说的内容的学习密切相关的. 在复习数的概念的时候，应着重理解无理数、虚数产生的必然性，各个数系的性质及其相互关系；在复习函数时则应以二次三项式的研究及其图象为重点，并应该明确所有初等函数的概念；“方程”这一部分内容则应该着重于一元二次方程；对分式方程、无理方程、对数方程等应该注意增根和减根的可能情况.

复习平面几何部分，基本概念、定义与定理是最基本的知识. 复习时，应当认真细致地思考，不但要求能牢牢地记忆，并且要求明确它们之间的关系，在全面了解的基础上加以记忆，如在直线形中注意三角形全等和相似的判定和性质，几种特殊三角形的特性；在四边形中注意平行四边形的判定和性质以及几种特殊的平行四边形的特性；在圆中则注意和圆有关的角及和圆有关的直线（线段）等的性质.

几何命题的证与解的例题部分，目的在帮助我们提高运用所学基本知识来处理常见的各类问题，培养对问题的分析

探索能力，在每一类证题法之后均配备相当数量的习题．对于例题的阅读应该深入领会其中推证过程，特别是应用到比例线段来解的例题．

复习三角部分，首先应该在明确三角函数定义的基础上，牢固地掌握三角函数间的八个基本公式、诱导公式和三角函数式的变化．此外还应该熟练地掌握反三角函数的定义、主值和主值的区间，为解三角方程打下基础．在解三角方程中，特别应注意增根和减根的产生．在复习各种三角形的解法时，要能熟练地掌握三角形边角关系的定理，解决实际问题．

立体几何一般人认为难教难学，主要是：（1）不能很好地树立立体观念．（2）立体几何的定义、定理很多，不易系统地记忆．（3）空间图形的性质，容易和平面图形的性质相混淆．（4）平面几何图形可以通过直观而得到启发，但在纸上描画出来的立体图形，却难以得到直观的帮助．因此从平面观念过渡到立体观念，对一般学习的人来说困难较多，所以复习时要多举例说明空间图形性质和平面图形性质的联系和区别，复习时对怎样看图和画图也应作必要地指导，借以帮助学生树立立体观念，培养他们对空间图形的想象能力，以及绘制图形的能力．立体几何模型可以使我们通过直观来掌握空间形象的具体特征，因此复习时要充分利用几何模型．为了使学生对抽象的概念得到清晰而透彻的领会，复习时对于立体图形的基本性质，要和实际生活中的事例联系起来讲．

复习解析几何部分，首先要使学生弄清直角坐标系中曲线和方程的相互关系，根据所给条件，选择坐标系，列出曲线方程；通过方程的讨论，掌握曲线的性质，画出曲线；其

次运用解析法论证图形的性质；掌握直线和圆锥曲线的各种方程、性质以及圆锥曲线的各种画法，使学生掌握一些重要曲线的极坐标方程和参数方程.

本书是根据教育部颁布的“全日制中学数学教学大纲”编写的，但为了照顾到当前的实际情况，使传统数学知识力求完整和系统，有些地方加上了大纲中带星号的内容，我们在复习时，应该根据大纲进行复习，大纲中没有的内容仅供参考.

为了提高复习的质量，应注意下面的几个问题：

一、首先要做到对数学各个分科的主要系统有个清晰的认识，这样才能全面地、细致地独立地进行复习.

二、基本概念、定理、法则是复习的基础，我们只有先掌握了概念、定理、法则，才会分析问题、解决问题. 如果丢开基本概念、定理、法则的复习，而单纯去钻难题的做法是不对的，通过作题，在应用中去记忆定理和公式是很好的方法.

本书中对基本知识、定理不可能一一加以详述，只作了一下整理和总结. 在复习时，必须根据本书内容提要中所列的内容，紧密结合课本进行复习，这样才会得到更好的效果.

三、在系统地、熟练地掌握了基础知识的基础上，要注意提高解题能力. 本书的每个单元除典型的例题与习题外，每部分都有复习题，最后有总复习题. 本书的习题、复习题较多，其目的在于帮助我们在牢固地掌握基本概念、定理、法则. 这些题不一定要求每个人都做，要根据各人不同的情况进行选作. 每册的习题在书后都有提示和答案. 在解题时要仔细审查题意，积极思维，确定解法的途径，选择最合理最简捷的解法. 例如在复习几何时，要时时注意到三角知识

的利用，如“求边长为 a 的等边三角形的面积”，这个问题如果用三角来解，就比用几何来解简单了很多.

解综合性的题目，一般比较难些，但目的在于帮助我们通过这些练习，知道解综合性题目如何进行思考，如何把数学各科的知识连系起来综合应用，这一部分题目当然也不要求花费过多的时间去钻，我们应该注意先着重弄通各科的基础知识和例题、习题，然后适当地再练习一些有关这一类的题目，以提高分析题目的能力.

四、要注意联系生活、生产和我国四个现代化建设的实际，这是理解问题和帮助记忆的最好办法，如学习立体几何图形，样样都可以和我们的生活、生产实际联系起来.

代　　数

Ⅰ. 数

一、前　言

（一）数的概念的扩展是中学数学课程中主要内容之一．因此，我们首先应当搞清楚数的概念的发展的实质．

我们可以注意以下的一些事实：

1. 分数的引进，是由于测量各种可以分成比测量单位小的若干等分的量的需要．反映在数学上，就是自然数除法的可实现性．

2. 负数的引进，一方面是由于测量一些可以改变成相反方向的量的需要；另一方面引进了负有理数，就使减法永远可以实施．

3. 无理数的引进是由于用有理数不能表示两条任意线段的比，而事实上，无公度的线段确是存在的，在数学上引进无理数后，方程 $x^2=a$ 永远可解．

4. 虚数的引进使 $x^2=-1$ 等有解．

（二）在复习中应该注意以下几点

1. 不是完全平方的有理数的平方根是无理数；但是不能认为无理数一定是具有方根的数．例如 π 也是无理数．

2. 复数和平面直角坐标系里的点之间可以建立起一一对应的关系，这就可以理解到复数不能比较大小．

3. 在实数集和复数集中交换律、结合律、分配律仍然适用．

4. $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，在实数集里是正确的（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$）；但如果认为 $i^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=1$ 就错了.

（三）注意计算技巧. 有些恒等变换，往往会给计算带来很多方便，例如

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

的值.如果先有理化分母把它变换成$\sqrt{2}+1$，计算就方便得多. 还有算术根 $\sqrt{a^2}=|a|$，而不能写作 $\sqrt{a^2}=a$.

二、内容摘要

（一）数的概念　我们把学过的数列表如下：

$$\underset{(a+bi)}{\text{复数}}\begin{cases}\underset{(b=0)}{\text{实数}}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{自然数（正整数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\left.\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\right\}\begin{matrix}\text{可化为有限小数}\\ \text{或无限循环小数}\end{matrix}\end{cases}\\ \text{无理数}\quad\text{无限不循环小数}\end{cases}\\ \underset{(b\neq 0)}{\text{虚数}}\end{cases}$$

（二）有理数、整数和分数总称有理数.

任何一个有理数都可以表示为既约分数$\dfrac{m}{n}$的形式（n 是正整数，m 为整数）.

1. 有理数的一些概念

1）数轴　规定了方向、原点和长度单位的直线叫做数轴. 每一个有理数都对应着数轴上的一个点.

2）相反数　a的相反数为$-a$，0的相反数为0.

3）绝对值　在数轴上表示一个数的点，它离开原点的距离，叫做这个数的绝对值. a的绝对值用符号$|a|$表示.

正数的绝对值等于其本身，负数的绝对值等于它的相反数，零的绝对值是零.

4）有理数大小的比较　两个正数绝对值大的数较大；一切正数都大于零；零大于一切负数；两个负数绝对值大的反而小.

2．有理数的运算

1）运算法则主要是符号法则.

2）运算律　交换律、结合律、乘法对加法的分配律均可实施.

3）运算顺序　先乘方、开方，再乘、除，最后做加、减. 如果有括号，先算括号内.

（三）实数

1．无理数　无限不循环小数叫无理数（注意，无理数不能用分数表示出来）.

2．实数与数轴　实数与数轴上的点成一一对应关系.

3．实数的绝对值　实数a的绝对值记做$|a|$. 定义为

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0); \\ 0 & (a=0); \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

4．实数大小的比较.

5．实数的运算.

6．近似计算问题.

1）近似数的加减法.

①几个数相加、减，要求得到精确到某一位的结果，一般

是先把各个已知数四舍五入到这一位的下一位，相加或者相减以后，再把结果四舍五入到这一位.

②几个近似数相加或者相减，如果这些已知数有不同的精确度，其中精确度最低的一个精确到某一位，那么，和或差也只能精确到这一位；这时，可以把其他已知数四舍五入到这一位的下一位，相加、减后，再把结果四舍五入到这一位.

2）近似数的乘除法.

①两个数相乘或相除，并且要求得到具有若干位准确数字的结果，只要把各个已知数四舍五入到具有准确数字比所要求的多一位，再相乘除，再把结果四舍五入到所要求的准确数字上.

②两个近似数相乘或者相除，如果这些已知数的准确数字的位数不同，那么，积或者商的准确数字的位数，只能和已知数中准确数字位数最少的一个的位数一样；这时，可把其他已知数四舍五入到准确数字位数比这个位数多一位后，再相乘或者除，最后结果四舍五入保留到这一位.

3）近似数的乘方、开平方.

①乘方所得的结果有效数字的个数和底数的有效数字的个数相同.

②平方根的有效数字的位数和被开方数的有效数字的个数相同.

（四）复数

1. 虚数单位 i

1）性质 ① $i^2=-1$

② i 与实数在一起可以按照通常四则运算的法则进行四则运算.

根据上面的规定，可以知道：

$$(-i)^2=i^2=-1.$$

所以$-i$和i都称为-1的平方根.

2）推论　i的整数次幂具有周期性：

$$i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i,\ i^{4n+4}=1.$$

2. 复数

1）定义　形如$a+bi$的数叫做复数（a,b都是实数）.

2）几何意义

①表示平面上的点$M(a,b)$.

②表示平面上的向量$\overrightarrow{OM}$（图1）.

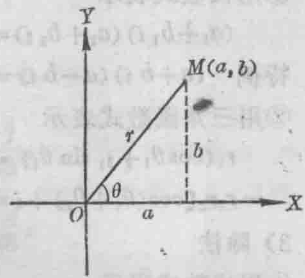


图 1

3. 复数的代数式与三角函数式的互化.

$$z=a+bi$$
$$=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

r—模数（绝对值）

$$r=|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

θ—幅角

确定幅角的公式：$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{r},\\ \sin\theta=\dfrac{b}{r}.\end{cases}$

幅角的主值区间：$0\leqslant\theta'<2\pi$.

幅角的一般表示式：$\theta=2k\pi+\theta'$.（k是整数）

4. 复数的相等

1）$a_1+b_1i=a_2+b_2i \Longleftrightarrow \begin{cases}a_1=a_2,\\ b_1=b_2.\end{cases}$

2) $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\Longleftrightarrow\begin{cases}r_1=r_2.\\ \theta_1=2k\pi+\theta_2.\end{cases}$

5. 共轭复数　$Z=a+bi$ 和 $\bar{Z}=a-bi$ 互为共轭复数.

6. 复数的运算

1）加、减法，一般用代数式表示比较方便.

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i.$$

2）乘法

①用代数式表示

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

特例　$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$

②用三角函数式表示

$$r_1(\cos\theta_1+i_1\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

3）除法

①用代数式表示

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{a_2^2+b_2^2}.\quad(a_2+b_2i\neq0)$$

②用三角函数式表示

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}\quad(r_2\neq0)$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

4）乘方

①代数式、应用二项式定理

②三角函数式应用棣美弗定理

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

一般要用三角函数式来表示复数.

5）开方　一般也要用三角函数式来表示.

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right).$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n-1,)$$

复数的 n 次方根有 n 个值.

三、例　　题

例1　比较 $-\frac{7}{8}$ 和 $-\frac{9}{11}$ 的大小.

解　$\because$

$$\left|-\frac{7}{8}\right|=\frac{7}{8}=\frac{77}{88},$$

$$\left|-\frac{9}{11}\right|=\frac{9}{11}=\frac{72}{88},$$

$$\frac{77}{88}>\frac{72}{88},$$

$$\therefore\quad -\frac{7}{8}<-\frac{9}{11}.$$

例2　计算

$$0.2\div\frac{1}{3}+1.5\times\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\div5+\left(-\frac{3}{7}\right)\div(-2)$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{2}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{7}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^3.$$

解　原式 $=\frac{1}{5}\times\frac{3}{1}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$-\frac{2}{2}\times\frac{5}{7}-\left(\frac{1}{2}\right)^3$$