高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

Spark®星火·燎原

丛书主编 马德高

同济大学 彭辉 主编

高等数学辅导及习题精解

（同济·六版 上册）

张天德 主审

教材习题全解 指导同步学习

考研真题精讲 剖析考研重点

延边大学出版社
Yanbian university press

丛书主编 马德高

高等数学辅导及习题精解

（同济·六版 上册）

主　编　彭　辉

副主编　乔　凤　李　娜

主　审　张天德

延边大学出版社

Yanbian university press

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导及习题精解 ：同济六版. 上册 / 马德高编著. --延吉 ：延边大学出版社，2012.6

ISBN 978-7-5634-4504-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 236773 号

高等数学辅导及习题精解(上册)

主编：马德高

责任编辑：林景浩

出版发行：延边大学出版社

社址：吉林省延吉市公园路 977 号　　**邮编**：133002

网址：http://www.ydcbs.com

E-mail：ydcbs@ydcbs.com

电话：0433-2732435　　**传真**：0433-2732434

印刷：文登市印刷厂有限公司

开本：880×1230　1/32

印张：13　**字数**：330 千字

版次：2012 年 6 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5634-4504-2

定价：19.80 元

前言

高等数学是理工类专业重要的基础课程，也是硕士研究生入学考试的重点科目。同济大学数学系主编的《高等数学》体系完整，层次清晰，讲解深入浅出，是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材，被全国许多院校采用。2007 年同济大学数学系推出的《高等数学》（第六版）保持了该教材一贯的优点、特色，进一步强调提高学生的综合素质和激发学生的创新能力。为了帮助读者学好高等数学，编者根据多年的教学经验编写了这本与同济大学数学系主编的《高等数学》（第六版）完全配套的《高等数学辅导及习题精解》上、下册。本书旨在帮助、指导广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与技巧，提高应试能力和数学思维水平。

本书章节的划分和内容设置与同济第六版教材完全一致，共分十二章，每章又分若干节，每节包括两大部分内容：

一、知识要点与考点：用表格形式简要对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行系统的梳理，并指出在理解与应用基本概念、定理、公式时需注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点；

二、教材习题精解：对教材里该节全部习题做了解答。对部分有代表性的习题，在解题过程中，设置了“思路探索”以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法；安排有“方法点击”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。有的习题还给出了一题多解，以培养读者的分析能力和发散思维能力。另外本书还用“警示语”的形式对解题要点、技巧和解题中易错的地方做了简短警示。

为了帮助读者对每章所学过的知识进行复习巩固，在每章编写完后另外增加两部分内容：

一、本章知识结构及内容小结：先用网络结构图揭示出本章知识点之间的有机联系，以便于学生系统地掌握本章知识体系和核心内容；然后给出了教材总习题全解：对每道题给出了详细解答，有的题还给出了“思路探索”和“方法点击”，以便帮助读者尽快找到解决问题的思路、方法、技巧和规律；

目录

第一章 函数与极限

函数是高等数学的主要研究对象.极限的方法是研究函数的基本方法,贯穿于高等数学的始终,它是初等数学向高等数学的过渡.因此,理解函数的概念,掌握极限的思想是学好高等数学的基础.本章主要介绍了函数的概念、性质,极限的定义,以及函数的连续性理论.

第一节 映射与函数

一、知识要点与考点

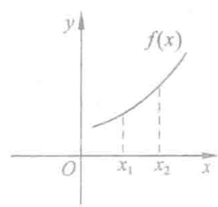
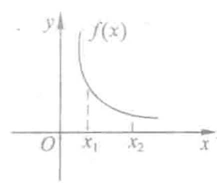
1. 函数及相关概念

名　称	定　义	说　明
函数	设数集 $D\subset R$,则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数,通常简记为 $y=f(x),x\in D$,其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域,记作 D_f,即 $D_f=D$. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域,记作 R_f 或 $f(D)$,即 $R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$	(1) f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则,而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值 (2) 表示函数的记号可以任意选取 (3) 构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f,当且仅当两个函数的定义域及对应法则都相同时,两个函数相等
分段函数	在自变量的不同变化范围内,对应法则用不同式子来表示的函数	分段函数是用几个公式合起来表示一个函数,而不是表示几个函数

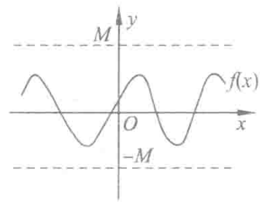
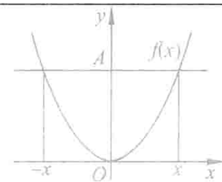
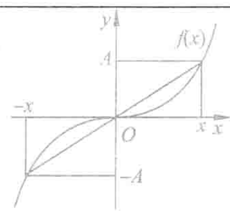
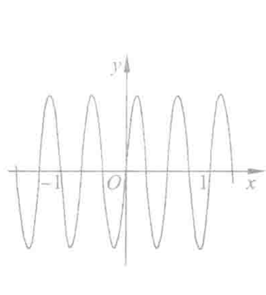
续表

名称	定义	说明
复合函数	设函数$y=f(u)$的定义域为D_1，函数$u=g(x)$在D上有定义且$g(D)\subset D_1$，则由下式确定的函数 $y=f[g(x)],x\in D$ 称为由函数$u=g(x)$和函数$y=f(u)$构成的复合函数，它的定义域为D，变量u称为中间变量	(1) g与f能构成复合函数$f\circ g$的条件是： $g(D)\subset D_f$ (2) 结合律成立， $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$，但没有交换律，即 $f\circ g\neq g\circ f$
反函数	设函数$f:D\to f(D)$是单射，则它存在逆映射$f^{-1}:f(D)\to D$，称此映射f^{-1}为函数f的反函数．一般地，$y=f(x),x\in D$的反函数记成$y=f^{-1}(x),x\in f(D)$	若f是定义在D上的单调函数，则$f:D\to f(D)$是单射，于是f的反函数f^{-1}必定存在
初等函数	由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数	

2．函数的几种特性

性质	定义		图例说明和注意
单调性	单调上升（单调递增）	函数$f(x)$在X上有定义，$\forall x_1,x_2\in X$，由$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2)$	
	单调下降（单调递减）	函数$f(x)$在X上有定义，$\forall x_1,x_2\in X$，由$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geqslant f(x_2)$	
	若严格不等号成立，则称为严格单调上升（下降）		

续表

<table>
<tr><th>性质</th><th colspan="2">定　义</th><th colspan="2">图例说明和注意</th></tr>
<tr><td rowspan="2">有界性</td><td>有界</td><td>函数 $f(x)$ 在 X 上有定义，若 $\exists M>0, \forall x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$（或 $\exists m,M$，使得 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 成立），则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有界函数</td><td colspan="2">
即函数的图形位于 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间</td></tr>
<tr><td>无界</td><td>函数 $f(x)$ 在 X 上有定义，若 $\forall M>0, \exists x'\in X$，使得 $|f(x')|>M$，则称 $f(x)$ 在 X 上无界</td><td colspan="2">例：$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界，因为 $\forall M>0$，取 $x'=\dfrac{1}{3M}$，则 $f(x')=3M>M$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">奇偶性</td><td>偶函数</td><td>设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x\in D, f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数</td><td></td><td rowspan="2">函数的奇偶性是相对于区间而言的，若定义域关于原点不对称，则该函数就不是奇或偶函数</td></tr>
<tr><td>奇函数</td><td>设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x\in D, f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数</td><td></td></tr>
<tr><td>周期性</td><td colspan="2">设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的数 l，使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期</td><td></td><td>一般将 $f(x)$ 的最小正周期简称为 $f(x)$ 的周期，但周期函数不一定存在最小正周期，如常数函数. 定义中，并不要求函数的定义域必须有界</td></tr>
</table>

3. 重点、难点与考点

重点	邻域、复合函数、分段函数、定义域、函数性质
难点	复合函数的复合过程
考点	求函数定义域
	求复合函数(分段函数的复合函数)

二、经典例题解析

基本题型Ⅰ:求函数定义域

例1 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$; (2) $y=\sqrt{1-2x}+\sqrt{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{(\frac{3x-1}{2})^2}}$.

解:(1) 由 $x\neq 0,1+\dfrac{1}{x}\neq 0,1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\neq 0$,得 $x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$.

故函数定义域为 $x\in\mathbf{R}$,但 $x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$.

(2) 由已知条件知

$$\begin{cases}1-2x\geqslant 0\\ (\dfrac{3x-1}{2})^2\leqslant 1\end{cases},\quad \text{即}\begin{cases}1-2x\geqslant 0\\ -1\leqslant\dfrac{3x-1}{2}\leqslant 1\end{cases}.$$

解得 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$,因此定义域为$[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}]$.

【方法点击】 求初等函数的定义域有下列原则:① 分母不能为零. ② 偶次根式的被开方数不能为负数. ③ 对数的真数不能为零或负数. ④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x|\leqslant 1$. ⑤ $\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$. ⑥ $\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

求复合函数的定义域,通常将复合函数看成一系列初等函数的复合,然后考查每个初等函数的定义域和值域,得到对应的不等式组,通过联立求解不等式组,就可以得到复合函数的定义域.

基本题型Ⅱ:求函数表达式

例2 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求 $f(x)$.

解:解法一:用变量代换,令 $u=x+\dfrac{1}{x}$,解出 $x=(u\pm\sqrt{u^2-4})/2$,代入原式,得

$$f(u)=\frac{(u\pm\sqrt{u^2-4})^2}{4}+\frac{4}{(u\pm\sqrt{u^2-4})^2}=u^2-2,$$

即 $f(x)=x^2-2$.

解法二：用拼凑法

因为 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2-2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，

令 $t=x+\dfrac{1}{x}$，则 $f(t)=t^2-2$，

即 $f(x)=x^2-2$.

【方法点击】 含有未知函数的方程叫做函数方程，变量代换法和拼凑法是解简单函数方程的两种最基本的方法.

例3 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1,\\ x^2+1, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解：因当 $0<|x|<1$ 时，$|f(x)|=\sqrt{1-x^2}<1$，

所以 $f[f(x)]=\sqrt{1-f^2(x)}=\sqrt{1-(1-x^2)}=\sqrt{x^2}=|x|$.

当 $|x|\geqslant 1$ 时，$|f(x)|=|x^2+1|>1$，

所以 $f[f(x)]=f^2(x)+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$.

当 $x=0$ 时，$|f(0)|=|\sqrt{1-0^2}|=1$，

所以 $f[f(0)]=[f(0)]^2+1=2$.

综上所述

$$f[f(x)]=\begin{cases}-x, & -1<x<0,\\ 2, & x=0,\\ x, & 0<x<1,\\ x^4+2x^2+2, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

1例.

【方法点击】 复合函数的求解方法主要有两种：

① 代换法：将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替，适用于初等函数的复合.

② 分析法：抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，适用于初等函数与分段函数的复合或两分段函数的复合.

基本题型Ⅲ：求反函数

例4 求 $y=f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1-x^2, & x<0\end{cases}$ 的反函数.

【思路探索】 由 $y=f(x)$ 出发解出 x 的表达式，然后交换 x 与 y 的位置，即可求得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

解：当 $x>0$ 时，$y=1+x^2$ 解出 $x=\pm\sqrt{y-1}$，且 $x>0$，所以 $x=\sqrt{y-1}$，$y>1$；

当 $x=0$ 时，$y=0$；

当 $x<0$ 时，$y=-1-x^2$ 解出 $x=\pm\sqrt{-1-y}$，且 $x<0$，

所以 $x=-\sqrt{-1-y}$，即 $y<-1$.

综上

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y-1}, & y > 1, \\ 0, & y = 0, \\ -\sqrt{-1-y}, & y < -1. \end{cases}$$

即所求反函数

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x > 1, \\ 0, & x = 0, \\ -\sqrt{-1-x}, & x < -1. \end{cases}$$

【方法点击】 反函数求解方法比较固定，具有很强的程序性，关键是把握好定义域和符号的变化，特别是对于分段函数要牢记所求函数表达式的区间.

基本题型Ⅳ：把复合函数分解为基本初等函数的复合

例 5 函数 $y = \ln\cos(e^x)$ 由哪些基本初等函数复合而成?

解：函数 $y = \ln\cos(e^x)$ 可由 $u = e^x, v = \cos u, y = \ln v$ 这三个基本初等函数复合而成.

【方法点击】 牢记基本初等函数的表达式是解决此类问题的基础，而由里到外、逐级分解是解决问题的关键. 做题时不能跨越某个级别，漏掉某个基本初等函数，要分清复合函数的成分或结构.

基本题型Ⅴ：函数单调性的问题

例 6 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，且对任意 $x, y \in (-\infty, +\infty)$ 有 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$，证明 $F(x) = f(x) + x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

证明：任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty), x_2 > x_1$，

有 $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1| = x_2 - x_1$，

而 $f(x_1) - f(x_2) \leqslant |f(x_2) - f(x_1)| < x_2 - x_1$，

因而 $f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2$，

所以 $F(x_1) < F(x_2)$，

即 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

【方法点击】 单调性是函数的一个性质，充分利用单调性的定义，结合不等式的放缩技巧可以得出许多有用的结论.

例 7 判断函数 $y = \cos x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的单调性.

解：$\forall x_1, x_2 \in (0, \pi), x_1 < x_2$，

则 $\cos x_2 - \cos x_1 = -2\sin\frac{x_1 + x_2}{2}\sin\frac{x_2 - x_1}{2}$，

由于 $0 < x_1 < x_2 < \pi$，故有 $0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \pi, 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \pi$，

$\therefore \sin\frac{x_1 + x_2}{2} > 0, \sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$，从而 $\cos x_2 - \cos x_1 < 0$，

即 $y = \cos x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上单调递减.

【方法点击】 证明函数单调性的主要方法有：

① 利用函数单调性定义.

② 利用导数证明.(此法在后面讲到.)

基本题型 Ⅵ:函数有界性的问题

例 8 证明函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内有界.

证明:因为 $|f(x)|=\left|\dfrac{x^2+1}{x^4+1}\right|\leqslant\dfrac{(x^2+1)^2}{x^4+1}=\dfrac{x^4+1+2x^2}{x^4+1}$

$$=1+\frac{2x^2}{x^4+1}\leqslant 1+1=2,$$

所以 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界,且 2 是上界.

【方法点击】 证明函数有界的常用方法:

① 利用函数有界性的定义,对函数取绝对值,然后对不等式进行放缩处理.

② 采用导数求最值的方法.

③ 根据连续函数的性质.(②、③ 方法的例题见后续相应章节.)

基本题型 Ⅶ:函数奇偶性的问题

例 9 已知 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$,$|a|\neq|b|$,证明 $f(x)$ 是奇函数.

【思路探索】 先求出 $f(x)$,再证 $f(-x)=-f(x)$.

证明:可令 $t=\dfrac{1}{x}$ 代入方程,得 $af\left(\dfrac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$,

即 $af(\dfrac{1}{x})+bf(x)=cx$,

将原方程及上面方程的两端分乘 a,b,再相减,得

$a^2f(x)-b^2f(x)=\dfrac{ac}{x}-bcx=\dfrac{ac-bcx^2}{x}$,

因 $|a|\neq|b|$,所以 $f(x)=\dfrac{ac-bcx^2}{(a^2-b^2)x}$,$f(x)$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq0$.

因 $f(x)$ 的定义域关于原点对称,且 $f(-x)=\dfrac{ac-bc(-x)^2}{(a^2-b^2)(-x)}=-f(x)$,

所以 $f(x)$ 是奇函数.

【方法点击】 判断函数奇偶性通常采用的方法有:

① 从定义出发,或者利用运算性质(奇函数的代数和为奇函数等).

② 证明 $f(-x)+f(x)=0$ 或 $f(-x)-f(x)=0$.

基本题型 Ⅷ:函数周期性的问题

例 10 设对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$,存在常数 $c\neq0$,使 $f(x+c)=-f(x)$.证明 $f(x)$ 是周期函数.

证明:对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,有 $f(x+c)=-f(x)$,所以

$f(x+2c)=f[(x+c)+c]=-f(x+c)=f(x)$,

故 $f(x)$ 为周期函数.

【方法点击】 判定函数为周期函数的主要方法:

① 从定义出发,找到 $T\neq0$,使得 $f(x+T)=f(x)$.

② 利用周期函数的运算性质证明.

教材习题1-1解答(上册P_{21})

1. 解:观察图1-1,易知:$A \cup B = (-\infty,3) \cup (5,+\infty)$,

$A \cap B = [-10,-5)$,

$A \backslash B = (-\infty,-10) \cup (5,+\infty)$,

$A \backslash (A \backslash B) = [-10,-5)$.

图 1-1

2. 证明:($\Rightarrow$)$\forall a \in (A \cap B)^c$,则$a \notin A \cap B$. $\therefore a \notin A$或$a \notin B$,

即$a \in A^c$或$a \in B^c$,$\therefore a \in A^c \cup B^c$.

由a的任意性,知:$(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$. ①

($\Leftarrow$)$\forall a \in A^c \cup B^c$,则$a \in A^c$或$a \in B^c$,即$a \notin A$或$a \notin B$,

$\therefore a \notin A \cap B$,即$a \in (A \cap B)^c$.

由a的任意性,知:$(A \cap B)^c \supset A^c \cup B^c$. ②

$\therefore$ 由①、②得:$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

3. 证明:(1) ($\Rightarrow$) $\because A \subset X, B \subset X, \therefore A \cup B \subset X$. $\therefore f(A \cup B)$有意义.

对$\forall y \in f(A \cup B)$,则$\exists x \in A \cup B$,使得$f(x) = y$.

$\therefore x \in A$或$x \in B$, 即$f(x) \in f(A)$或$f(x) \in f(B)$,

$\therefore f(x) \in f(A) \cup f(B)$, 即$y \in f(A) \cup f(B)$.

由y的任意性,知:$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. ①

($\Leftarrow$) 设$\forall y \in f(A) \cup f(B)$, 则$y \in f(A)$或$y \in f(B)$,

$\therefore \exists x \in A$或$x \in B$,使得$f(x) = y$,

即$\exists x \in A \cup B$, 使$f(x) = y$,$\therefore y = f(x) \in f(A \cup B)$.

由y的任意性,知:$f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$. ②

$\therefore$ 由①、②得: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(2) $\because A \subset X, B \subset X, \therefore A \cap B \subset X$. $\therefore f(A \cap B)$有意义.

$\forall y \in f(A \cap B)$,则$\exists x \in A \cap B$,使得: $f(x) = y$.

$\because x \in A$且$x \in B$,$\therefore f(x) \in f(A)$且$f(x) \in f(B)$,

$\therefore f(x) \in f(A) \cap f(B)$, 即$y \in f(A) \cap f(B)$.

由y的任意性,知:$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

4. 解:(1) 由$3x+2 \geqslant 0$,得定义域为:$\{x \mid x \geqslant -\frac{2}{3}\}$.

(2) 由$1-x^2 \neq 0$,得定义域为:$\{x \mid x \neq \pm 1\}$.

(3) 由$x \neq 0, 1-x^2 \geqslant 0$,得定义域为:$\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1$且$x \neq 0\}$.

(4) 由$4-x^2 > 0$,得定义域为:$\{x \mid -2 < x < 2\}$.

(5) 由$x \geqslant 0$,得定义域为:$\{x \mid x \geqslant 0\}$.

(6) 由$x+1 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$,得定义域为:$\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1, k \in \mathbf{Z}\}$.

(7) 由 $|x-3| \leqslant 1$,得定义域为:$\{x | 2 \leqslant x \leqslant 4\}$.

(8) 由 $3-x \geqslant 0, x \neq 0$,得定义域为:$\{x | x \leqslant 3$ 且 $x \neq 0\}$.

(9) 由 $x+1>0$,得定义域为:$\{x | x>-1\}$.

(10) 定义域显然为:$\{x | x \neq 0\}$.

5. 解:(1) 不同. $\because$ $f(x)$ 的定义域为 $x \neq 0$,而 $g(x)$ 的定义域为 $x>0$,故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同.

(2) 不同. $\because$ 对应法则不同:$f(x)=x$,而 $g(x)=|x|$.

(3) 相同. $\because$ $f(x)=\sqrt[3]{x^3(x-1)}=x\sqrt[3]{x-1}=g(x)$.

(4) 不同. $\because$ $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$g(x)$ 的定义域为 $x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

6. 解:$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin \frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$,

$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin \frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varphi(-2)=0$.

函数 $y=\varphi(x)$ 的图形如图 1-2 所示:

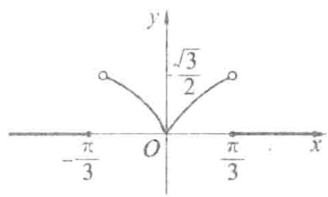


图 1-2

7. 证明:(1) $y=f(x)=\frac{x}{1-x}=-1+\frac{1}{1-x}, x \in(-\infty, 1)$,

$\because$ $\frac{1}{1-x}$ 在$(-\infty, 1)$ 上单调递增,$\therefore$ y 在$(-\infty, 1)$ 上也单调递增.

(2) $y=f(x)=x+\ln x$,

$\because$ x 在$(0,+\infty)$ 上单调递增,$\ln x$ 在$(0,+\infty)$ 上单调递增,

而两单调递增函数的和函数也是单调递增的.

$\therefore$ y 在$(0,+\infty)$ 上单调递增.

8. 证明:设 $\forall x_1, x_2 \in(-l, 0)$,不妨设 $x_1<x_2$,

则 $-x_1,-x_2 \in(0, l)$,且 $-x_1>-x_2$.

$\because$ $f(x)$ 在$(0, l)$ 内单调增加,$\therefore$ $f(-x_1)>f(-x_2)$.

又 $\because$ $f(x)$ 为奇函数,$\therefore$ $-f(x_1)>-f(x_2)$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.

$\therefore$ $f(x)$ 在$(-l, 0)$ 内也单调增加.

9. 证明:(1) 设 $f_1(x),f_2(x)$ 都是偶函数,$g_1(x),g_2(x)$ 都是奇函数.

令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x),G(x)=g_1(x)+g_2(x)$,

则 $F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x)$,

$\therefore F(x)$ 为偶函数.

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)+(-g_2(x))$$
$$=-(g_1(x)+g_2(x))=-G(x),$$

$\therefore G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x),f_2(x)$ 都是偶函数,$g_1(x),g_2(x)$ 都是奇函数.

令 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x),\ G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$,

$H(x)=f_1(x)\cdot g_1(x)$,

则 $F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=F(x)$,

$\therefore F(x)$ 为偶函数.

$$G(-x)=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)]\cdot[-g_2(x)]$$
$$=g_1(x)\cdot g_2(x)=G(x),$$

$\therefore G(x)$ 为偶函数.

$$H(-x)=f_1(-x)\cdot g_1(-x)=f_1(x)\cdot[-g_1(x)]$$
$$=-f_1(x)\cdot g_1(x)=-H(x),$$

$\therefore H(x)$ 为奇函数.

10. 解:(1) 偶函数.

(2) 既非偶函数又非奇函数.

(3) 偶函数.

(4) 奇函数.

(5) 既非偶函数又非奇函数.

(6) 偶函数.

11. 解:(1) $y=\cos(x-2)$ 为周期函数,周期 $T=2\pi$.

(2) $y=\cos 4x$ 为周期函数,周期 $T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

(3) $y=1+\sin\pi x$ 为周期函数,周期 $T=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$.

(4) $y=x\cos x$ 不是周期函数.

(5) $y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ 为周期函数,周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

12. 解:(1) 因 $y=\sqrt[3]{x+1}$,所以 $x=y^3-1$,则反函数为 $y=x^3-1$;

(2) 因 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$,所以 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$,则 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;

(3) 因 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$,所以 $x=\dfrac{b-dy}{cy-a}$,则所求的反函数为 $y=\dfrac{b-dx}{cx-a}$;

(4) 因 $y=2\sin 3x$,所以 $x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$,

则 $y=2\sin 3x$ 的反函数为 $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$;

(5) 因 $y=1+\ln(x+2)$,故 $x=\frac{e^y}{e}-2$,所以所求反函数为 $y=e^{x-1}-2$;

(6) 因 $y=\frac{2x}{2x+1}$ 得 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$,所以所求反函数为 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$.

13. 证明:($\Rightarrow$) 若函数 $f(x)$ 在 X 上有界,

即 $\exists M>0$,使得 $|f(x)|\leqslant M$,对 $\forall x\in X$ 都成立,

$\therefore -M\leqslant f(x)\leqslant M$,

$\therefore$ 对 $\forall x\in X, f(x)\leqslant M, f(x)\geqslant -M$,

即 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界.

($\Leftarrow$) 若 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界,

即存在数 k_1,使得 $f(x)\leqslant k_1$,对任意 $x\in X$ 都成立;

存在数 k_2,使得 $f(x)\geqslant k_2$,对任意 $x\in X$ 都成立.

$\therefore k_2\leqslant f(x)\leqslant k_1$ 对任意 $x\in X$ 都成立.

取 $M=\max\{|k_1|,|k_2|\}$,则 $|f(x)|\leqslant M$ 对任意 $x\in X$ 都成立.

$\therefore f(x)$ 在 X 上有界.

14. 解:(1) 复合函数为:$y=f(x)=\sin^2 x$,

$\therefore y_1=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}, y_2=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}$.

(2) 复合函数为:$y=f(x)=\sin 2x$,

$\therefore y_1=f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin(2\cdot\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$y_2=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})=1$.

(3) 复合函数为:$y=f(x)=\sqrt{1+x^2}$,

$\therefore y_1=f(1)=\sqrt{1+1^2}=\sqrt{2}, y_2=f(2)=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$.

(4) 复合函数为:$y=f(x)=e^{x^2}$,

$\therefore y_1=f(0)=e^0=1, y_2=f(1)=e^1=e$.

(5) 复合函数为:$y=(e^x)^2=e^{2x}$,

$\therefore y_1=f(1)=e^2, y_2=f(-1)=e^{-2}$.

15. 解:(1) $f(x^2)$ 的定义域由 $0\leqslant x^2\leqslant 1$ 决定,

$\therefore f(x^2)$ 的定义域为$\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$.

(2) $f(\sin x)$ 的定义域由 $0\leqslant \sin x\leqslant 1$ 决定,

$\therefore f(\sin x)$ 的定义域为$\{x\mid 2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}\}$.

(3) $f(x+a)$ 的定义域由 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ 决定,