普通高等教育“十二五”规划教材

ADVANCED MATHEMATICS

高等数学

（上册）

主编/郭学军　主审/许洪范

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（上 册）

郭学军 主编

黄 娜 柳 静 赵军勇 符俊超 副主编

许洪范 主审

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书根据高校工科“高等数学”课程教学的基本要求，并结合普通院校的教学实际编写而成. 全书分上、下两册. 本书为上册，主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分、定积分应用和常微分方程；全书概念和定理多有几何解释与物理原型，理论完整且浅显简明，兼顾知识的系统性和实用性，对于不同层次的学生均具有可读性.

本书既可作为应用型本科院校理工类专业的高等数学教材，也适用于师范类理科专业和普通院校的其他理科非数学专业.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（上册）/郭学军主编. —北京：科学出版社，2012
（普通高等教育“十二五”规划教材）
ISBN 978-7-03-035011-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①郭… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 135549 号

责任编辑：戴 薇 李 瑜 / 责任校对：王万红
责任印制：吕春珉 / 封面设计：耕者工作室
版式设计：北大彩印 / 加工编辑：崔艳静

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http: www.sciencep.com

北京路局票据印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2012 年 9 月第二次印刷 印张：16
字数：360 000

定价：56.00 元（上、下册）
（如有印装质量问题，我社负责调换〈路局票据〉）
销售部电话 010-62142126 编辑部电话 010-62135763-2038

前　言

“高等数学”作为高等院校各相关专业学生必修的一门重要的公共基础课程，在高素质人才培养中具有独特的不可替代的作用. 它不仅是为其他后继的学科和专业课提供有力的工具和数学基础，更为主要的是它在培养学生的抽象思维、逻辑推理、分析问题、解决问题和创新能力等方面具有非常重要的作用.

随着科技进步和高等教育的发展，高等数学的教学内容、方式和手段也不断在发生着变化，尤其在《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010—2020）》出台后，这种变化就更加突出.《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010—2020）》提出要全面实施“高等学校本科教学质量与改革工程”，本书正是在落实教学质量与改革工程这一新形势下编写的.

教材的编写既要体现“厚基础、宽口径、高素质”人才质量的培养要求，又要使内容、体系符合我国高等教育本科“高等数学”课程教学内容和课程体系改革的总体目标. 本书主要是为应用型本科院校相关专业编写的高等数学教材，以为经济社会发展培养具有较强的实践能力和创新能力的应用型高级人才服务为宗旨.

本书为高等数学上册，共分 8 章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分、定积分应用、常微分方程. 本书在编写过程中，吸取了国内外教材的优点，融入了作者多年的教学经验，注重知识的系统性、思想性与通用性，精炼理论证明过程，适当侧重基础运算和数学模型观念.

全书在编写时突出以下几个特点.

（1）书中例题和习题的编排主要针对基础知识和基本的运算能力训练，兼顾不同的知识点和不同的难度水平，注意减少需要特殊技巧才能解决的例题和习题. 每章后又配备了复习题，以便于学生巩固所学的基本概念、基本理论，并在复习题中适当增加了综合性或技能性较强的题目，以适应不同层次学生的需求.

（2）书中注意控制精确性引入概念的数量，各知识点、新概念的引入力求清晰简明. 例如，函数的各类极限、连续、微分等重要概念在章节的开始以定义形式明确地给出，曲线的单调与光滑、切线和面积等概念一般对照几何模型进行描述性定义. 在介绍基本概念时，适当给出几何解释或者其物理原型，以加强对概念的理解.

（3）书中对基本初等函数的导数、各种基本运算的法则都给出了比较完整的推导和证明. 对于极限的“$\varepsilon-\delta$”形式证明和不定积分法基本原理和方法作了详细介绍，但不做过多的训练，回避了偏难的问题.

（4）书中的一些重要定理，如柯西收敛准则、单调有界原理、闭区间上连续函数性质及微分和积分中的部分定理，虽然反映了最基本的数学规律，但为了便于读者接受，只给出直观原理解释或进行部分证明. 书中尽量控制定理的数量和难度，以适应本书的既定任务.

全书由郭学军担任主编并对全书进行统稿，由黄娜、柳静、赵军勇、符俊超担任副主编，由许洪范担任主审．具体编写情况如下：赵军勇编写第 1 章和第 2 章；黄娜编写第 3 章和第 4 章；柳静编写第 5 章和第 6 章；郭学军编写第 7 章；符俊超编写第 8 章和附录．

由于编者水平有限，书中疏漏和错误在所难免，敬请各位专家、学者不吝赐教，欢迎读者朋友指正．

编　者

2012 年 5 月

目　　录

第 1 章　函　　数

函数是运用数学方法来描述现实世界的基本工具. 从温度变化到质点的位移，从商业运作到生物增长，它们的变化规律都可以借助函数来研究. 本书的很多概念都是通过研究几何或物理的实际问题引入，其中一些重要的基础理论则是直接建立在函数概念基础之上. 为了方便后面的学习，有必要简单叙述一下实数的基本知识和在中学学习过的函数的相关知识.

1.1　函数的基本概念

1.1.1　实数集

在算术中，自然数（即正整数和零）、正分数、负整数和负分数统称为有理数.

有理数的一般表示形式为$\dfrac{p}{q}$，其中 p 与 q 都是整数，$q\neq0$ 且 p 与 q 互质. 有理数也可以写成小数的形式，结果一定是有限多位小数或无限循环小数. 对任意两个有理数作加、减、乘、除（0 不为除数）运算，得到的结果仍然是一个有理数.

无理数在中学数学中已经遇到过，如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\lg5$，$\sin10$，π 等. 无理数是无限不循环小数.

一切有理数及无理数统称为实数.

我们已经熟悉把实数标记在数轴上：作直线 Ox（图 1－1），指定向右的方向为正向，取定原点 O 并取一线段$\overline{OU}$作为单位长度，那么任一实数都可以用数轴上的点来表示.

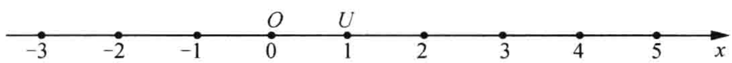

图 1－1

实数和数轴上的点是一一对应的. 也就是说，数轴上的每一个点都表示某一个实数. 反过来，每一个实数都是数轴上某个点的坐标. 为了叙述简便，可以把数轴上坐标为 0 的点 O 称为 0 点，把坐标为实数 x 的点称为 x 点.

除了实数外，还有虚数. $\mathrm{i}^2=-1$，则称 i 为虚数单位，形如 $a+b\mathrm{i}$ 的数称为复数，其中 a，b 为实数. 复数是实数的重要扩充，不过在本书中，除非特别声明，涉及的数都是实数.

今后常常要谈到由若干有限个或者无限多个实数组成的总体，称为实数的集合，简称数集. 数集一般用大写字母 A，B，C，…表示. 所有非负整数构成的集合称为自然数集，常用大写字母 $\mathbf{N}$ 表示（自然数集 $\mathbf{N}$ 包括 0）；所有整数的集合称为整数集，用

$\mathbf{Z}$ 表示整数集. 此外，一般用 $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数组成的集合，称为有理数集；用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数组成的集合，称为实数集.

由无限多个数组成的数集称为无限数集. 例如，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$ 以及集合

$$B=\{2, 4, 6, \cdots\}$$

等都是无限数集.

由有限多个数组成的数集称为有限数集. 例如，由 1，2，3，4 组成的数集记为

$$A=\{1, 2, 3, 4\},$$

是有限数集.

一个数集中也可以不包含任何数，称这样的数集为空集，记为 $\varnothing$.

数集 A 中的数称为 A 的元素. 如果某个数 x 是数集 A 的元素，称 x 属于 A，记为 $x\in A$. 如果 x 不是 A 的元素，就称 x 不属于 A，记为 $x\notin A$.

例如，$3\in\mathbf{Z}$，$-2\in\mathbf{R}$，$1+\mathrm{i}\notin\mathbf{R}$.

设 A 与 B 都是数集，如果 A 中所有的元素也都是 B 的元素，称数集 A 为 B 的子集，也称 A 包含于 B（或称 B 包含 A），记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

如果既有 $A\subseteq B$ 又有 $B\subseteq A$，则认为集合 A 与集合 B 为同一个集合，也称集合 A 与集合 B 相等，记为 $A=B$.

由数集 A 中的所有元素与数集 B 中的所有元素构成的数集 C 称为数集 A 与数集 B 的并集，记为 $C=A\cup B$；由既属于数集 A 又属于数集 B 的所有元素构成的数集 D 称为数集 A 与数集 B 的交集，记为 $D=A\cap B$.

本书在以后某些问题的讨论过程中，常常限定在实数集 $\mathbf{R}$ 的某个子集 A 内. 如果 A 中的所有元素（数）刚好是介于某两个实数 a 和 $b(a<b)$ 之间的所有实数，也称数集 A 为一个区间.

满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的全体称为开区间，记为 (a, b).

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的全体称为闭区间，记为 $[a, b]$.

满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的全体实数称为半开区间，分别记为 $(a, b]$ 和 $[a, b)$.

从数轴上看，上面的几种区间是介于 a，b 两点之间的一条线段，a 点和 b 点是线段的端点，分别称为区间的左端点和右端点，区间上其余的点称为区间的内点. 称两数差 $b-a$ 为区间的长度.

以后在不需要辨明所讨论的区间是否包含端点时就简单地说“区间”. 区间还可以用一个大写字母（如 I）表示.

除了上面的区间（通常称为有限区间）外，还有无穷区间. 下面给出无穷区间的表示方法.

$(-\infty, +\infty)$ 表示实数的全体，其含义与 $\mathbf{R}$ 相同；$(a, +\infty)$ 表示大于 a 的实数的全体；$(-\infty, a)$ 表示小于 a 的实数的全体.

$[a, +\infty)$ 与 $(-\infty, a]$ 具有类似的含义.

应该注意，上面使用的符号“$-\infty$”和“$+\infty$”并不是实数集中具体的数，分别读作“负无穷大”和“正无穷大”.

有时也用不等式$-\infty<x<+\infty$，$a<x<+\infty$等来表示区间.

显然，任何区间都是 $\mathbf{R}$ 的子集，且是含有无限多个元素的无限子集.

1.1.2　绝对值、邻域

1. 绝对值

实数 x 的绝对值定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}.$$

$|x|$的几何意义是在数轴上表示 x 点到原点的距离．根据绝对值的定义，应该有

$$|a|=\sqrt{a^2}\text{ 和 }-|a|\leqslant a\leqslant |a|.$$

当 $a>0$ 时，关系式$|x|<a$ 与$-a<x<a$ 是等价的．也就是说，如果$|x|<a$，则有$-a<x<a$；反之，如果已知$-a<x<a$，也有$|x|<a$ 成立.

同样，$a>0$ 时，关系式$|x|\leqslant a$ 与$-a\leqslant x\leqslant a$ 也是等价的.

实数的绝对值还具有以下性质.

（1）两个数和的绝对值不大于其绝对值的和，即

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|, \tag{1.1.1}$$

式（1.1.1）被称为三角不等式；

（2）两个数差的绝对值不小于绝对值的差，即

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|; \tag{1.1.2}$$

（3）两个数乘积的绝对值等于绝对值的乘积，即

$$|xy|=|x||y|; \tag{1.1.3}$$

（4）两个数商的绝对值等于绝对值的商，即当 $y\neq 0$ 时，

$$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}. \tag{1.1.4}$$

2. 算术平均值——几何平均值不等式

设 a_1，a_2，…，a_n 均为非负实数，则它们的几何平均值不超过其算术平均值，即

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}. \tag{1.1.5}$$

3. 邻域

设 a 与 δ 为实数，且 $\delta>0$．满足不等式

$$|x-a|<\delta \tag{1.1.6}$$

的实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a,\delta)$ 或 $U(a)$．其中 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径．式（1.1.6）与不等式

$$-\delta<x-a<\delta\quad\text{和}\quad a-\delta<x<a+\delta \tag{1.1.7}$$

都是等价的.

由于满足不等式（1.1.7）的实数 x 构成了区间 $(a-\delta, a+\delta)$（图 1 - 2），所以点

a 的 δ 邻域也就是以点 a 为中心、区间长度为 2δ 的开区间.

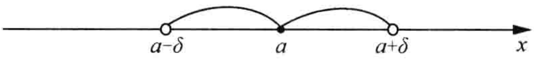

图 1－2

用集合的记号表示点 a 的 δ 邻域，则有

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

此外，还把集合 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域. 记为

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

或简记为 $\mathring{U}(a)$. 点 a 的去心 δ 邻域包括开区间（$a-\delta$，a）与（a，$a+\delta$）的所有点.

1.1.3 函数的定义

在研究某些问题的过程中，会遇到各种不同的量，如长度、面积、体积、质量、温度、压力、时间、速度等. 在某一特定的情况下，有些量始终保持着同一数值，这种量称为常量. 但有的量是变化的，也就是说，可以取不同的数值，这种量称为变量.

例如，一个质点（物体）在真空中自由下落，根据物理学的知识，下落的曲线方程为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

重力加速度 g 是常量；而时间 t 和路程 s 可以取不同的数值，是变量.

应该注意，一个量是常量还是变量，并不是绝对不变的. 同一个量在某种条件下是常量，在另一条件下也可能是变量. 例如，重力加速度 g 一般认为是常量，但是如果在地球的赤道和两极之间变换位置，g 就不再是常量，而是变量了.

常量通常用字母 a，b，c，…表示；变量多用 x，y，z，…表示.

在数学中侧重研究的是量的数值表现，而舍去量的其他属性. 上述字母表示的实际上只是量的数值，所以常量也称为常数，变量也称为变数. 常数在数轴上对应一个固定的点，变量表现在数轴上则是可以取不同位置的点，也称为动点.

在研究某一问题的过程中，往往不只有一个变量，而各个变量之间也不是彼此孤立的，它们是相互联系、相互制约的. 为了研究变量之间互相制约的规律，我们引入函数的定义.

定义 1.1.1 设在同一问题的研究过程中有两个变量 x 和 y. 如果对于变量 x 在它的变化范围内所取的每一个值，变量 y（依据某种对应关系）都有唯一确定的值与之对应，就称变量 y 为变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$. 这里，变量 x 称为函数 $y=f(x)$ 的自变量，变量 y 称为因变量.

函数 $y=f(x)$ 自变量的变化范围称为函数的定义域，因变量的变化范围称为函数的值域.

这里，“y 是 x 的函数”这个事实被表示为

$$y=f(x),\ x\in D.$$

如果同时考虑自变量 x 的几个函数（不同的函数关系），在括号前必须分别使用不同的字母来表示这些不同的函数关系．例如，可以记为 $y=f(x)=x^2+1$，$y=g(x)=\sin x$ 等．

当自变量取某个值 $x=a$ 时，函数 $f(x)$ 的对应值叫作 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的函数值，记为 $f(a)$．

例 1.1.1　真空中的自由落体运动，下落时间 t 和下落路程 s 是两个相互联系的变量．如果物体距地面的初始高度为 h，对任意时间 t 需满足

$$t\in\left[0,\ \sqrt{\frac{2h}{g}}\right],$$

因变量 s 表示的是对应于时间 t 的路程，它们的函数关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\ t\in\left[0,\ \sqrt{\frac{2h}{g}}\right].$$

这个函数的定义域为$\left[0,\ \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$，值域为 $[0,\ h]$

例 1.1.2　某地某日的气温 T 是时间 t 的函数，可以记 $T=f(t)$．对于 t 的每一个值，从气温记录仪输出的气温曲线上可以读出温度 T 的对应值（图 1－3）．

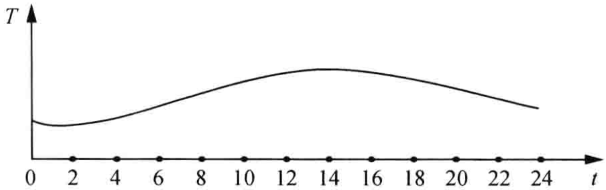

图 1－3

如果把气温记录仪放在恒温的室内，则总有 $T=T_0$．它仍然是时间 t 的函数，因为对于每个确定的时间值 $t_0\in[0,\ 24]$，仍然恰有某个温度值 T_0 与之对应．因此，常量总可以看成是某自变量的函数，即常函数．

通常情况下，一个函数 $y=f(x)$ 可以用坐标平面 Oxy 内的一条曲线来表示．如果当自变量 $x=x_0$ 时，对应的函数值为 $f(x_0)$，在直角坐标系 Oxy 中描出点 $(x_0,\ f(x_0))$．当 x 取遍定义域中的所有数值时，对应直角坐标系 Oxy 中的点便构成一条曲线 c（图 1－4），称这条曲线 c 为函数 $y=f(x)$ 的图像，也称曲线 c 为曲线 $y=f(x)$．

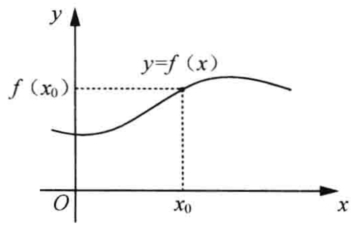

图 1－4

变量之间的函数关系有时可以用数学表达式来表示（如例 1.1.1），有时则用图像的方式来表示（如例 1.1.2）．用数学表达式表示函数关系的方法称为解析法，用图像表示函数关系的方法称为图像法．

有很多函数的函数关系既可以用解析法来表示，也可以用图像法来表示．这时，表示函数关系的解析式和图像（曲线）是以不同的方式反映着同一个对应关系．两种方式各有所长，解析式便于在数量上精确计算函数值，图像则有助于直观上观察

函数的某些特征．在以后的学习过程中，有些函数虽然已经有了形如 $y=f(x)$ 的明确解析表达式，常常还要大致描绘出函数的图像来，这有助于加深对函数的直观认识．

用解析法表示函数关系时，应该同时标明函数的定义域，如例 1.1.1．我们约定，凡是给出函数表达式 $y=f(x)$ 而未标明定义域的情形，就认为自变量 x 可以取使函数表达式有意义的任何实数值，或者说是能使表达式有意义的自变量 x 可取值的最大集合．此时，也称函数具有自然定义域．

例 1.1.3 试指出下列函数的定义域（自然定义域）：

（1）$y=\sqrt{9-x}$；（2）$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$；（3）$y=\arcsin(x-2)$．

解 （1）应有

$$9-x\geqslant 0，即\ x\leqslant 9，$$

故函数的定义域为 $(-\infty, 9]$；

（2）解不等式

$$x^2-x-2>0，即(x-2)(x+1)>0，$$

可知函数定义域为 $x>2$ 或 $x<-1$，也可以表示为 $(-\infty, -1)\cup(2, +\infty)$（称为两个区间的并集）；

（3）解不等式

$$|x-2|\leqslant 1，即-1\leqslant x-2\leqslant 1，$$

得

$$1\leqslant x\leqslant 3.$$

函数的定义域为 $[1, 3]$．

有一种特殊的函数称为数列，它的表示形式为

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots.$$

这类函数的定义域为自然数集．当自变量 n 依次取 1，2，…，n，…时，相应的函数值按自变量取值从小到大的顺序排列出来就得到了数列．数列还可以表示为

$$x_n=f(n)(n=1, 2, \cdots).$$

当自变量 n 依次取 1，2，…，n，…时，对应的函数值 x_1，x_2，…，x_n，…依次称为数列的第 1 项，第 2 项，…，第 n 项，…．这里，具有一般意义的第 n 项 x_n 称为数列的通项或一般项．数列用列表的方式来表述它的通项 x_n 与序数 n 的函数关系，数列这种特定函数表示方式也可以简单地写成函数值的集合 $\{x_n\}$ 的形式．例如，数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots$$

所表示的函数关系可以写成

$$x_n=\frac{1}{2^{n-1}}\ (n=1, 2, \cdots).$$

也可以更加简单地记为 $\left\{\dfrac{1}{2^{n-1}}\right\}$．

习题 1-1

1. 指出满足下列不等式的 x 所在区间：

(1) $|x|\leqslant 3$；　　(2) $|x-1|<1$；

(3) $|x|>5$；　　(4) $\left|x+\frac{1}{2}\right|\geqslant\frac{1}{2}$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-1}$；　　(2) $y=\arcsin\sqrt{2x}$；

(3) $y=\frac{1}{1+x^2}$；　　(4) $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$；

(5) $y=x^3+\sqrt{x-1}-\frac{\ln(x-2)}{(x-4)^2}$.

3. 下列函数是否为同一函数？为什么？

(1) $f(x)=\frac{x}{x}$ 与 $\varphi(x)=1$；

(2) $f(x)=2\ln x$ 与 $\varphi(x)=\ln x^2$；

(3) $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$ 与 $\varphi(x)=x-3$；

(4) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $\varphi(x)=|x|$.

4. 设 $f(x)=x^3-4x+20$，求 $f(1)$，$f(t+1)$.

5. 已知数列的一般项（通项）为 $x_n=\frac{1}{2n+1}$，写出数列的前五项.

6. 解下列不等式：

(1) $|x-5|<8$；　　(2) $|2x+4|\geqslant 10$；

(3) $|x|>|x+1|$；　　(4) $|x+1|+|x-1|\leqslant 4$.

7. 证明下列不等式：

(1) 当 $|x+1|<\frac{1}{2}$ 时，$|x-2|<\frac{7}{2}$；

(2) 当 $|x-1|\leqslant 1$ 时，$|x^2-1|\leqslant 3|x-1|$.

1.2　初 等 函 数

在中学数学中已经接触到很多用解析法表示的函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是对自变量施加某些运算而形成的式子，如 $y=x^2+2$，$y=2\sin(2x+1)$ 等. 以下对这样的函数进行简单的分类.

1.2.1　复合函数

如果在研究某个问题的过程中有三个变量 x，u 和 y，其中 y 和 x 之间的关系通过