金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

2015

李永乐·王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

分阶习题同步训练

数学二

主编◎李永乐　王式安　季文铎

编委◎王式安　刘喜波　李永乐　季文铎　武忠祥　胡金德　蔡燧林

本习题集将每章习题，按难度分为三类

分别是基础单项训练、基础综合训练和思维拓展训练

赠送

ISBN 978-7-5150-1056-4

定价：52.80元

书

E 1997

2015

李永乐·王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

分阶习题同步训练

数学二

主编◎李永乐　王式安　季文铎

编委◎王式安　刘喜波　李永乐　季文铎　武忠祥　胡金德　蔡燧林

国家行政学院出版社

说 明

本习题集将每章习题，按难度分为三类，分别是基础单项训练、基础综合训练和思维拓展训练。题型包括选择题、填空题和解答题。选择题均为单项选择题，只有一个最适合的选项。解答题要求写出解题步骤、过程和必要的说明。

基础单项训练

此类题难度较低，属于菜鸟级。题目内容都是所在章节的基本概念、定理和方法的简单重现。为熟悉所学内容而进行的必要练习。

基础综合训练

所在章节的综合练习题，题目涉及的知识点不再是单个的概念，具有一定的综合性，条件设置较隐蔽，需要进行一定探索研究才能得到结果。增加练习的效果。

思维拓展训练

此类题目具有难度和综合性，目的是使学生的数学知识转化成思维模式上来。让学生随着练习逐步深化、拓展知识结构。这类题，结合前后章节的知识，具有开放性，解题方法不统一，变换一些条件就会转化成新的题目。需要学生积极思考，能从不同方法中寻求解题最佳方法。

尽管我们为以上所有的习题都配了答案，但希望同学不要被所提供的答案束缚，积极思考，尽量通过自己的思考得出答案。顺便提一下，如果你被菜鸟题虐的很惨。请记住，不是你不够聪明，而是老师出的题太刁钻。

目录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

习题参考答案与解析

第一篇 高等数学

第一章 函数 极限 连续

基础单项训练 难度：★☆ 通关称号：菜鸟

1. 设 $f(x)=\dfrac{(1-\cos x)(x^3+x+1)}{x^3+x^2}$，则

(A) 存在 $\delta>0$ 及 $X>0$，$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界，在 $(X,+\infty)$ 内无界.

(B) 存在 $\delta>0$ 及 $X>0$，$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内无界，在 $(X,+\infty)$ 内有界.

(C) 对任意 $X>0$，$f(x)$ 在 $(0,X)$ 内有界，在 $(0,+\infty)$ 内无界.

(D) $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界.

2. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，则

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 必不存在.

(B) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 必存在.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ 必不存在.

(D) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ 必存在.

3. 下列命题

① 设 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 连续，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 必连续.

② 设 $\lim\limits_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 必连续.

③ 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，$g(x)$ 在 $x=x_0$ 不连续，则 $f(x)g(x)$ 在 $x=x_0$ 必不连续.

④ 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 都不连续，则 $f(x)+g(x)$ 在 $x=x_0$ 必不连续.

其中正确的命题个数为

(A) 0 个. (B) 1 个. (C) 2 个. (D) 至少 3 个.

4. 设当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 均为 $(x-x_0)$ 的同阶无穷小，则

(A) $f(x)-g(x)$ 必是 $x-x_0$ 的同阶无穷小.

(B) $f(x)-g(x)$ 必是 $x-x_0$ 的高阶无穷小.

(C) $f(x)g(x)$ 必是 $x-x_0$ 的高阶无穷小.

(D) $f(x)g(x)$ 必是 $x-x_0$ 的同阶无穷小.

5. 设 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\neq 0\\ 0, & 当\ x=0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & 当\ x\neq 0\\ 1, & 当\ x=0\end{cases}$，则在点 $x=0$ 处有间断点的函数是

(A) $\max\{f(x),g(x)\}$.

(B) $\min\{f(x),g(x)\}$.

(C) $f(x)-g(x)$.

(D) $f(x)+g(x)$.

7. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$

(A) 不存在间断点.

(B) 存在间断点 $x=1$.

(C) 存在间断点 $x=0$.

(D) 存在间断点 $x=-1$.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}-x, x\geqslant 0\\ \dfrac{1}{1-x}, x<0\end{cases}$，则 $f(f(x))=$ ________.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=$ ________.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 2x}=$ ________.

11. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+e^{\frac{1}{x}})^{\ln(1+x)}=$ ________.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x+1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

13. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sin^2\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=$ ________.

14. $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

15. $\lim\limits_{n\to \infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$ ________.

16. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x-\sin x}$.

基础综合训练 **难度：★★☆** **通关称号：小达人**

1. 下述命题正确的是

(A) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 x_0 处不连续，则 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处必不连续.

(B) 设 $g(x)$ 在 x_0 处连续，$f(x_0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$.

(C) 设在 $x=x_0$ 的去心左邻域内 $f(x)<g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)=b$，则必有 $a<b$.

(D) 设 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)=b$，$a<b$，则必存在 $x=x_0$ 的去心左邻域，使 $f(x)<g(x)$.

2. $f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$，当 $x\neq 0$ 时，$f(0)=-1$，则

(A) 有可去间断点. (B) 有跳跃间断点. (C) 有无穷间断点. (D) 连续.

3. 在区间$[0,1]$上函数 $f(x)=nx(1-x)^n$ 的最大值记为 $M(n)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)=$ ________.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=$ ________.

5. 设 $y=y(x)$ 满足 $y''+(x-1)y'+x^2y=e^x$ 且 $y(0)=0$，$y'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)-x}{x^2}=$ ________.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{-1}^{2}\arctan(nx)\mathrm{d}x=$ ________.

7. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$，则 $f(x)$ 有间断点 $x=$ ______，是______型，间断点 $x=$ ______，是______型.

8. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-\sin(x-1)}{\sqrt[3]{2x-x^2}-1}$.

9. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\cos 3x}{e^x-1-x}$.

10. 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

11. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x}+\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)$.

12. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]$.

13. 设 $u_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+i}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

14. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(n+k)(n+k+1)}$.

思维拓展训练 **难度：★★★★** **通关称号：小牛人**

1. 设 $f(x)=\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，$a_i>0$，$a_i\neq 1$，$i=1,2\cdots,n$；$n\geqslant 2$ 为确定的整数. 求

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$； ② $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$； ③ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. 已知常数 $a>0$，$b\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx}-2}{x^2}=-\dfrac{3}{2}$，求 a 与 b.

3. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(1+bx+cx^2)-1-ax}{x^4}$ 存在，求常数 a,b,c 的值并求此极限值.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x^2}-1}=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

5. 设当 $0 < x \leqslant 1$ 时 $f(x) = x^{\sin x}$，对于其它 x，$f(x)$ 满足 $f(x) + k = 2f(x+1)$，求常数 k 使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

6. 设 $x_1 > 0$，$x_{n+1} = 3 + \dfrac{4}{x_n}(n = 1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求此极限值.

7. 设对任意 x 和 y，函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$，并且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. 试证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

8. 设常数 $a \neq -1$，$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n+1} + ax^n - 1}{x^{2n} - (a+1)x^n - 1}$，讨论 a 的取值，确定 $f(x)$ 的间断点及其类型.

第二章　一元函数微分学

基础单项训练　　**难度：★☆**　　**通关称号：菜鸟**

1. 设 $f(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(0)\neq 0$. 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=$

(A) $\dfrac{1}{2}$.　(B) $\dfrac{1}{3}$.　(C) $\dfrac{1}{4}$.　(D) $\dfrac{1}{5}$.

2. 设 $f(x)$ 满足 $f''(x)+x[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^{-x}$，且 $f'(0)=0$. 则

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(C) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 左侧邻近是凹的，右侧邻近是凸的.

(D) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 左侧邻近是凸的，右侧邻近是凹的.

3. 曲线 $y=\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}$ 有渐近线

(A)0 条.　(B)1 条.　(C)2 条.　(D)3 条.

4. 下述论断正确的是

(A) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，除 $x=0$ 外均可导，且 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格单调增加的.

(B) 设 $f(x)$ 为偶函数且 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(0)=0$.

(C) 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶导数存在，且 $f''(x_0)>0$，则 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(D) 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处三阶导数存在，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$，则 $x=x_0$ 一定不是 $f(x)$ 的极值点.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶导数存在，且 $f''(x_0)<0$，$f'(x_0)=0$，则必存在 $\delta>0$，使得

(A) 曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上是凸的.

(B) 曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上是凹的.

(C) 函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0]$ 是严格单调增，在区间 $[x_0,x_0+\delta)$ 是严格单调减.

(D) 函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0]$ 是严格单调减，在区间 $[x_0,x_0+\delta)$ 是严格单调增.

6. 设 $f(x)$ 二阶导数存在，下述结论正确的是

(A) 若 $f(x)$ 只有 2 个零点，则 $f''(x)$ 必定没有零点.

(B) 若 $f''(x)$ 至少有 1 个零点，则 $f(x)$ 必至少有 3 个零点.

(C) 若 $f(x)$ 没有零点，则 $f''(x)$ 至多有 2 个零点.

(D) 若 $f''(x)$ 没有零点，则 $f(x)$ 至多有 2 个零点.

7. 下述命题

① 设 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ 均存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续.

② 设 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 均存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续.

③ 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在等于 A，则 $f'(x_0)$ 存在等于 A.

④ 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域可导，且 $f'(x_0)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在等于 A.

则正确的是

(A)① 与 ②.　(B)③ 与 ④.　(C)② 与 ③.　(D)① 与 ④.

8. $f(x)=(x^3+1)^{\frac{1}{3}}\,|x^3-x|$ 的不可导的点的个数为

(A)3.　(B)2.　(C)1.　(D)0.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f'(a)>0$，$f'(b)<0$. 则下述命题不正确的是

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)=\dfrac{1}{2}(f(a)+f(b))$.

10. 设 $x=\int_0^t 2e^{-s^2}\,ds$，$y=\int_0^t \sin(t-s)^2\,ds$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\pi}}=$ ______.

11. 设 $f''(a)$ 存在，$f'(a)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{f'(a)(x-a)}-\dfrac{1}{f(x)-f(a)}\right]=$ ______.

12. 设曲线 $y=ax^2+bx+c$ 与曲线 $\begin{cases}x=\dfrac{4}{\pi}\arctan t\\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$ 在 $t=1$ 处相切并有相同的曲率圆，则常数 $(a,b,c)=$ ______.

13. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\ln(1+x)}{x^2}=A(A\neq 0)$，则 $f(0)=$ ______，$f'(0)=$ ______.

14. 椭圆 $x^2+2xy+2y^2-4y=0$ 与直线 $x+y-6=0$ 之间的最短距离为______.

15. 曲线 $y=x+\sqrt{x^2-x+1}$ 的渐近线方程为 $y=$ ______及 $y=$ ______.

16. 设 $y=y(x)$ 由 $x^3+y^3-3axy=0$ 确定，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ ______.

17. 设 $f(u)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$F(x)=\int_0^{x^2} tf(x^2-t)\,dt$，并设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^n}$ 存在且不为零，求 n 及此极限值.

基础综合训练　　难度：★★☆　　通关称号：小达人

1. 下列 4 个命题

① 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，且 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处必可导.

② 设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ 存在，则 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处必可导.

③ 设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ 存在，则 $f(x)=|(x-a)|\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导.

④ 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处必可导.

正确的命题为

(A)① 与 ②.　　(B)③ 与 ④.　　(C)① 与 ③.　　(D)② 与 ④.

2. 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内存在二阶导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=a$，$a>0$，则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(C) 在点 $(0,f(0))$ 的左侧邻近，曲线 $y=f(x)$ 是凹的，右侧邻近是凸的.

(D) 在点 $(0,f(0))$ 的左侧邻近，曲线 $y=f(x)$ 是凸的，右侧邻近是凹的.

4. 设 $f(x)=x^2\sin ax$，$a>0$，则对于 $n\geqslant1$，$f^{(2n+1)}(0)=$ ______.

5. 设 $f(x)$ 有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，$f(0)=2$，$n\geqslant2$，则 $f^{(n)}(0)=$ ______.

6. 在曲线 $y=1-x^2$ 上在第一象限内的点作该曲线的切线，使该切线与两坐标轴围成的三角形面积为最小，求切点坐标.

7. 在极坐标曲线 $r=e^\theta$ 的 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 范围内曲线上找一点，使经过它的切线与 x 轴、y 轴的正向所围成的三角形的面积为最小，并求出此面积的值.

8. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(x)>0$. 在曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $(x,f(x))$ $(x\neq 0)$ 处作此曲线的切线，交 x 轴于点 $(u,0)$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(u)}{uf(x)}$.

9. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，且对于任意 $x\in(0,+\infty)$，$y\in(0,+\infty)$ 有 $f(xy)=f(x)+f(y)+(x-1)(y-1)$，又 $f'(1)=a\neq 1$. 证明对任意 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)$ 存在并求之.

10. 设 $b>a>0$，证明：$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$.

11. 证明：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\geqslant (x-1)^2$，且仅当 $x=1$ 时成立等号.

12. 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内存在二阶导数，且 $f''(x)<0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，证明：当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$f(x)\leqslant 2x$，且仅在 $x=0$ 时成立等号.

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内存在二阶导数，且 $f''(x)<0$，$f(0)=0$. 证明：对任意 $x_1>0$，$x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

14. 设 $x>0$，证明：$(x-4)e^{\frac{x}{2}}-(x-2)e^x+2<0$.

15. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $f(0)<0$，$f'(x)\geqslant k>0$. 试证明存在唯一的 $\xi\in(0,+\infty)$ 使 $f(\xi)=0$.

16. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$\int_0^{\frac{2}{\pi}} e^{f(x)}\arctan x\,dx=\frac{1}{2}$，$f(1)=0$，试证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $(1+\xi^2)\arctan\xi\cdot f'(\xi)=-1$.

17. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在一阶导数，在 (a,b) 内存在二阶导数，且 $f(a)=f(b)$，$f'(a)f'(b)>0$. 试证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f''(\xi)=0$.

思维拓展训练　　难度：★★★★　　通关称号：小牛人

1. 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上存在二阶导数，$f(0)<0$，$f''(x)>0$. 试证明：(1) 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)$ 至多有两个零点，至少有一个零点；(2) 若的确有两个零点 x_1 与 x_2，则 $x_1x_2<0$.

2. 讨论当 $x>0$ 时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 的根的个数.

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内存在二阶导数，且与某直线至少交于 3 个点. 试证明，至少存在一点 ξ 使 $f''(\xi)=0$.

4. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且对一切 x，$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq 0$，并设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有 2 个零点，试证明至少存在一点 ξ 介于 $f(x)$ 的 2 个零点之间，使 $g(\xi)=0$.

5. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a,b) 内可导，并且 $f'(x)+f(x)g'(x)\neq 0$，试证明 $f(x)$ 在 (a,b) 至多有 1 个零点(特例：设 $f'(x)+f(x)\neq 0$，则 $f(x)$ 至多有 1 个零点).

6. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=0$. 求 $f(0)$，$f'(0)$ 及 $f''(0)$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$. 试证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $|f''(\xi)|\geqslant 8\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，$f(a)>0$，$f(b)>0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)>0$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$. 试证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使

$$\frac{ab}{b-a}[bf(b)-af(a)]=\xi^2[f(\xi)+\xi f'(\xi)].$$

10. 证明：当 $0\leqslant x<+\infty$ 时 $\arctan 3x\leqslant\ln(1+4x)$.