本书由131幅“无需语言的证明”的图片组成，每幅图片的下面列出了该图片要“证明”的数学结论。当从一幅图片中悟出为何该图片证明了相应的数学结论时，读者便能够体会到数学绝妙的美，所以这本书叫做数学写真集。书中的素材选取自国际顶尖数学杂志。

本书可作为数学爱好者的休闲读物，也可作为学生的课外参考书，还可作为中学和大学数学教师的教学素材。

图书在版编目（CIP）数据

数学写真集．第1季，无需语言的证明/（美）尼尔森编；肖占魁，徐沙凤译．—北京：机械工业出版社，2014.1

ISBN 978-7-111-44774-0

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①尼…②肖…③徐…　Ⅲ．①数学－通俗读物　Ⅳ．①O1－49

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第270751号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　汤　嘉
版式设计：霍永明　责任校对：姜　婷
封面设计：路恩中　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2014年7月第1版第1次印刷
169mm×239mm·10印张·189千字
标准书号：ISBN 978-7-111-44774-0
定价：29.00元

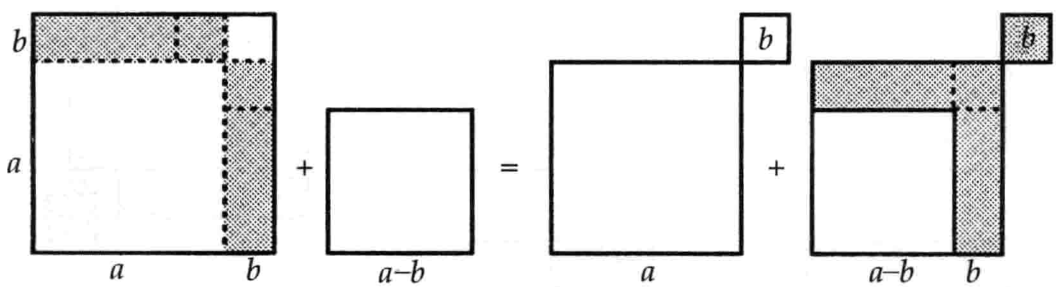
凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010)88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：(010)68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：(010)88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：(010)88379203	**封面无防伪标均为盗版**

目　　录

代数面积 I

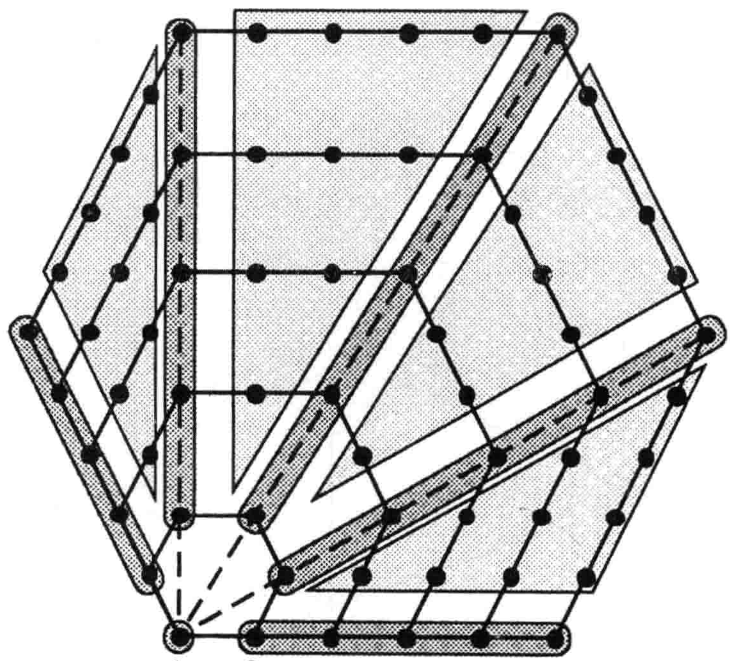
$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$$



——雪莉 A. 威肯（Shirley Wakin）

第 k 个 n-边形的点数

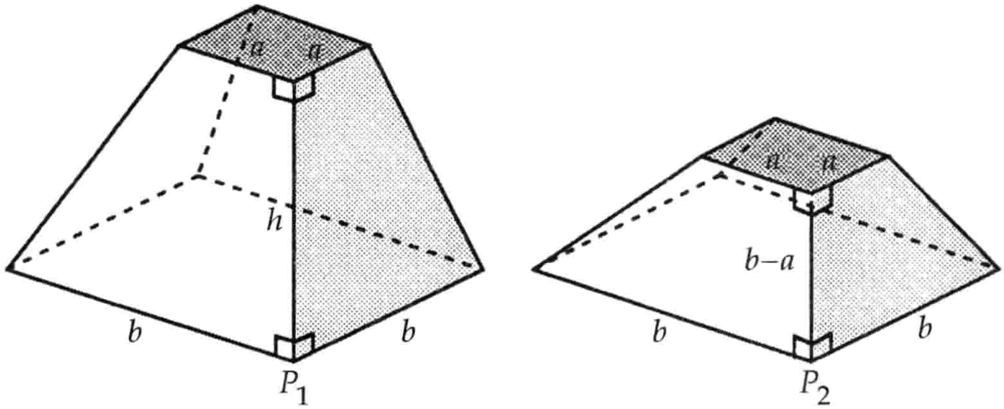
$$1+(k-1)(n-1)+\frac{1}{2}(k-2)(k-1)(n-2)$$

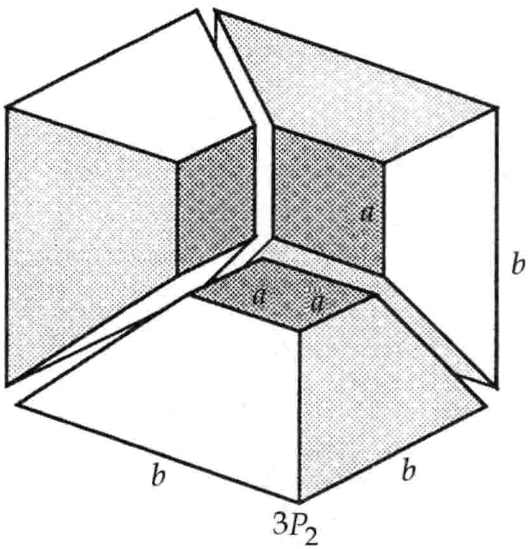


——戴夫·罗果塞提（Dave Logothetti）

一个四棱台的体积

［问题 14，莫斯科纸草，大约公元前 1850 年］





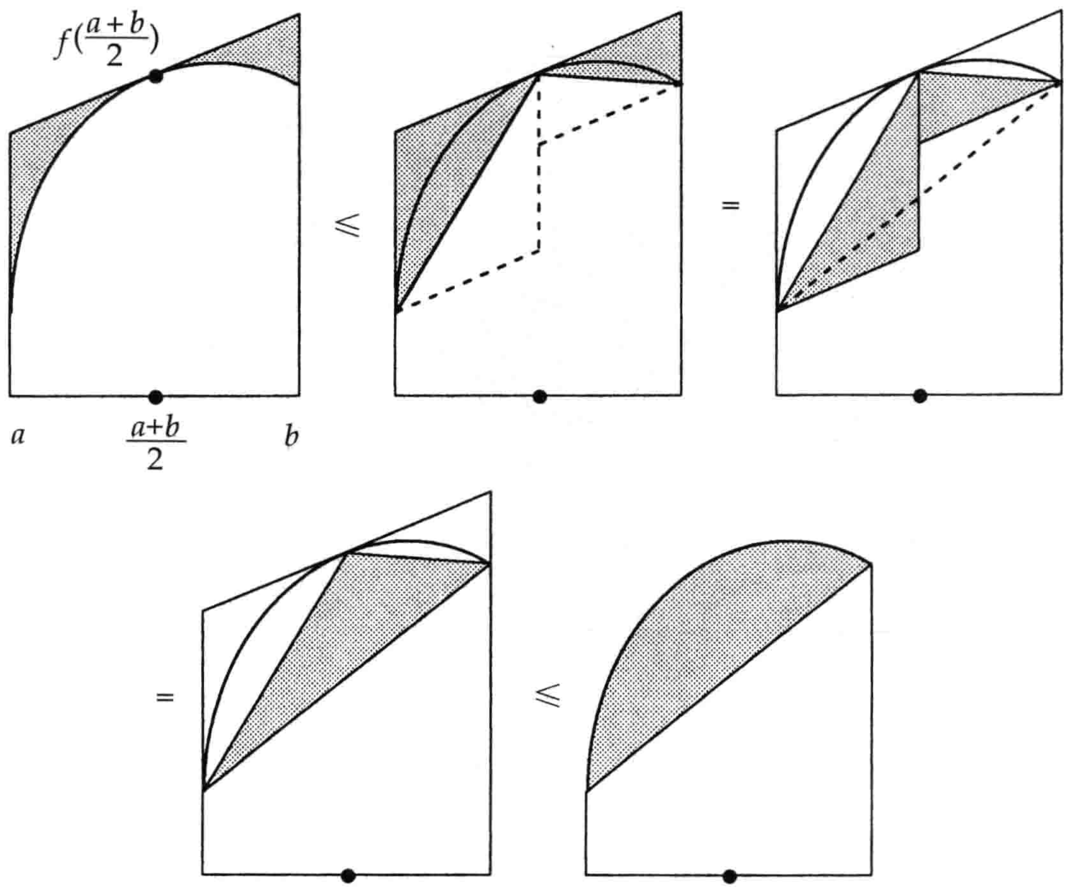
$$V(P_1)=\frac{h}{b-a}V(P_2)=\frac{h}{b-a}\cdot\frac{1}{3}(b^3-a^3)=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$$

——RBN

REFERENCES

1. C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1968, pp. 20-22
2. R. J. Gillings, *Mathematics in the Time of the Pharaohs*, The MIT Press, Cambridge, 1972, pp. 187-193.

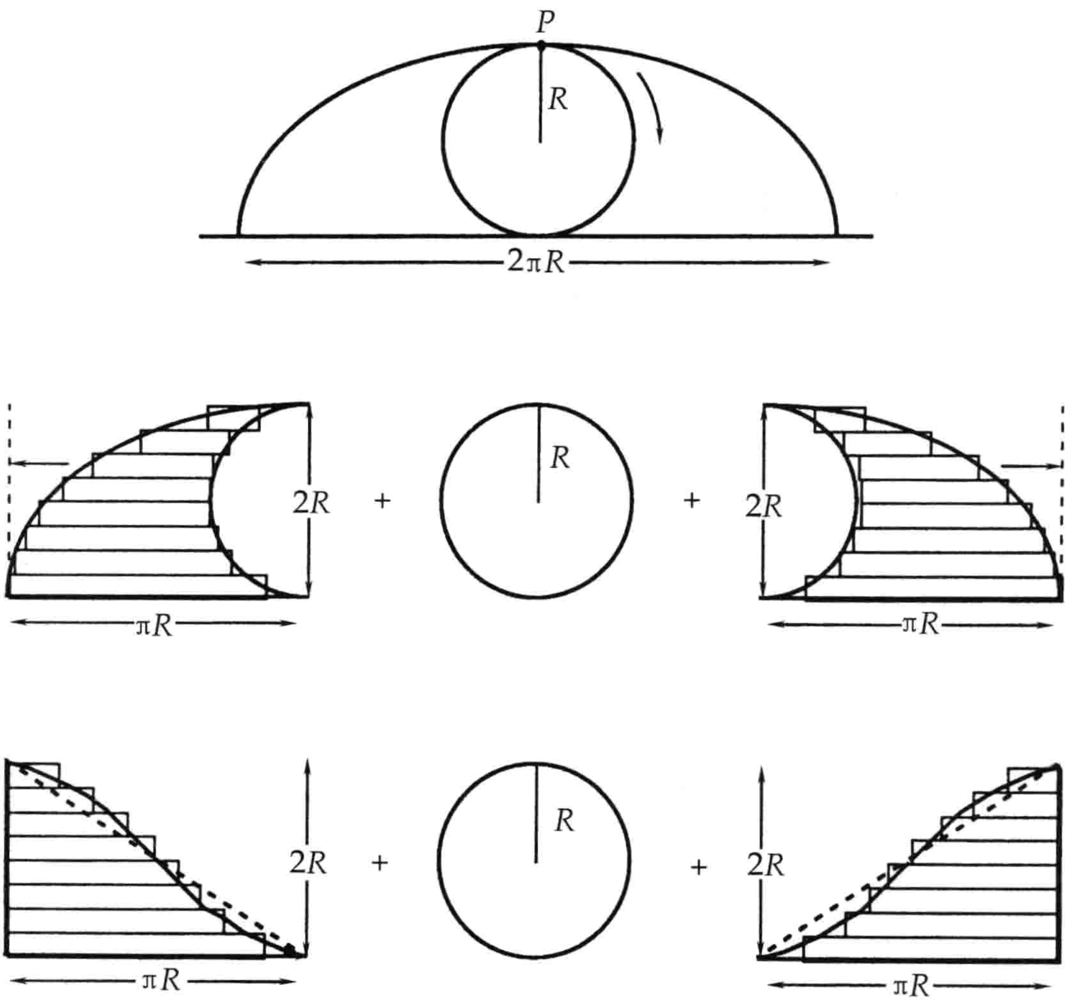
对于凹函数中点规则优于梯形规则



——弗兰克 · 伯克（Frank Burk）

译注：凹函数为 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$。

摆线拱的面积



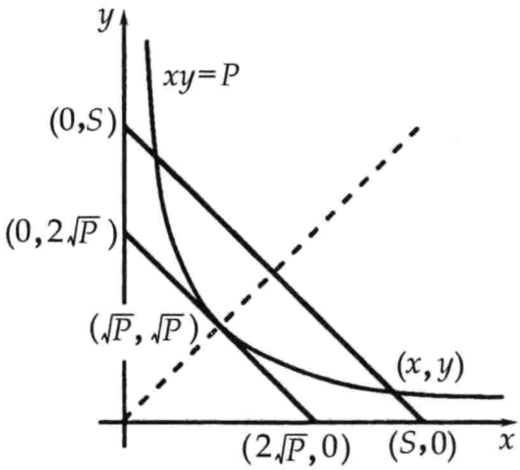
$$\frac{1}{2}\pi R\cdot 2R+\pi R^2+\frac{1}{2}\pi R\cdot 2R$$

$$\Rightarrow A=3\pi R^2$$

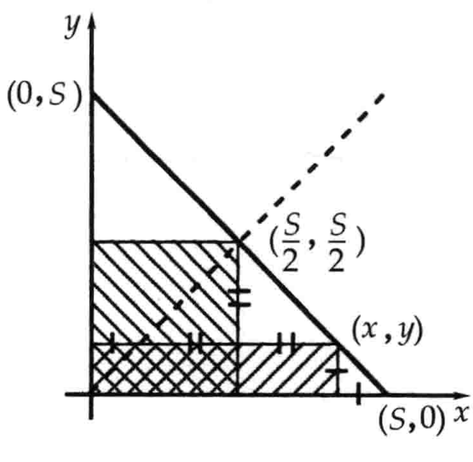
——理查德 M. 比克曼（Richard M. Beekman）

两个极值问题

给定积 $P(xy=P)$，则两个正数之和 $x+y\geqslant 2\sqrt{P}$，当 $x=y$ 时等式成立。



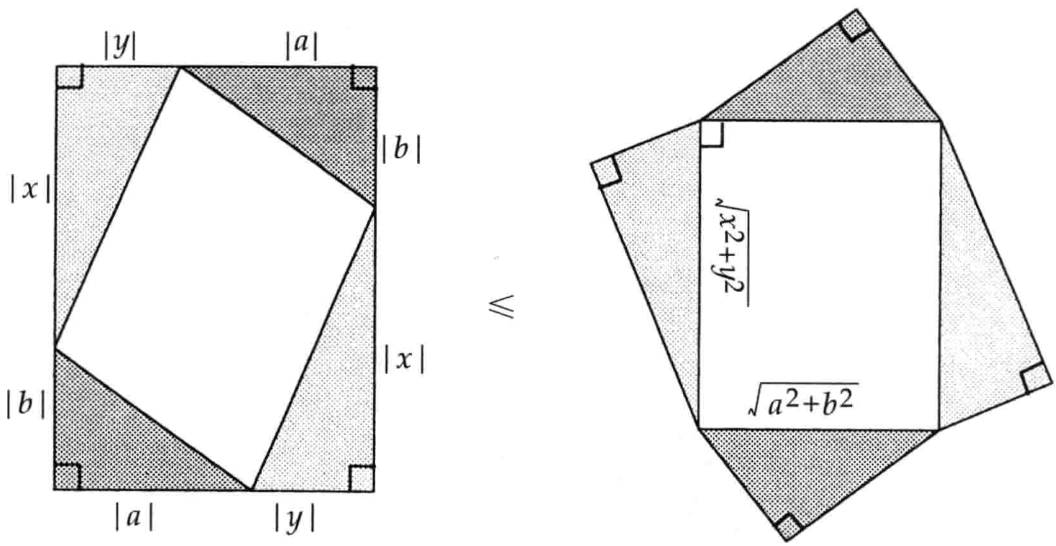
给定和 $P(x+y=P)$，则两个正数之积 $xy\leqslant\frac{P^2}{4}$，当 $x=y$ 时等式成立。



——保罗·满图奇和沃伦·佩奇（Paolo Montuchi and Warren Page）

柯西—施瓦茨不等式

$$|\langle a, b\rangle \cdot \langle x, y\rangle| \leqslant \|\langle a, b\rangle\| \cdot \|\langle x, y\rangle\|$$



$$(|a|+|y|)(|b|+|x|) \leqslant 2\left(\frac{1}{2}|a||b|+\frac{1}{2}|x||y|\right)+\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

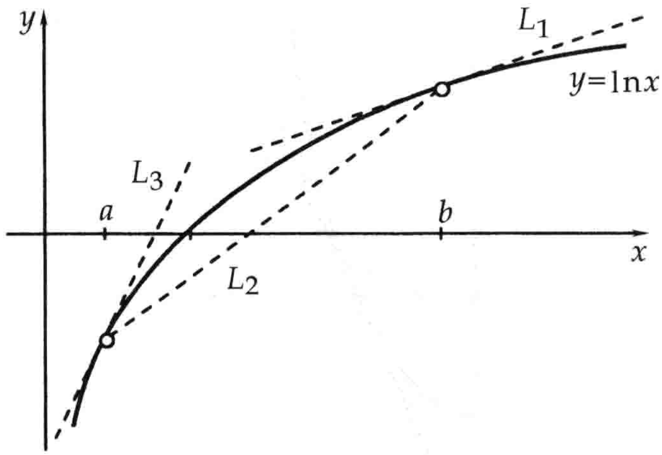
$$\therefore\ |ax+by| \leqslant |a||x|+|b||y| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

——RBN

纳皮尔不等式（两个证明）

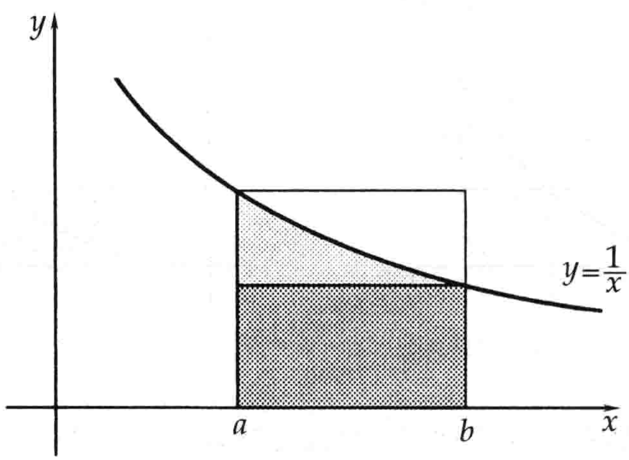
$$b > a > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}$$

I.（第一学期微积分）



$$m(L_1) < m(L_2) < m(L_3)$$

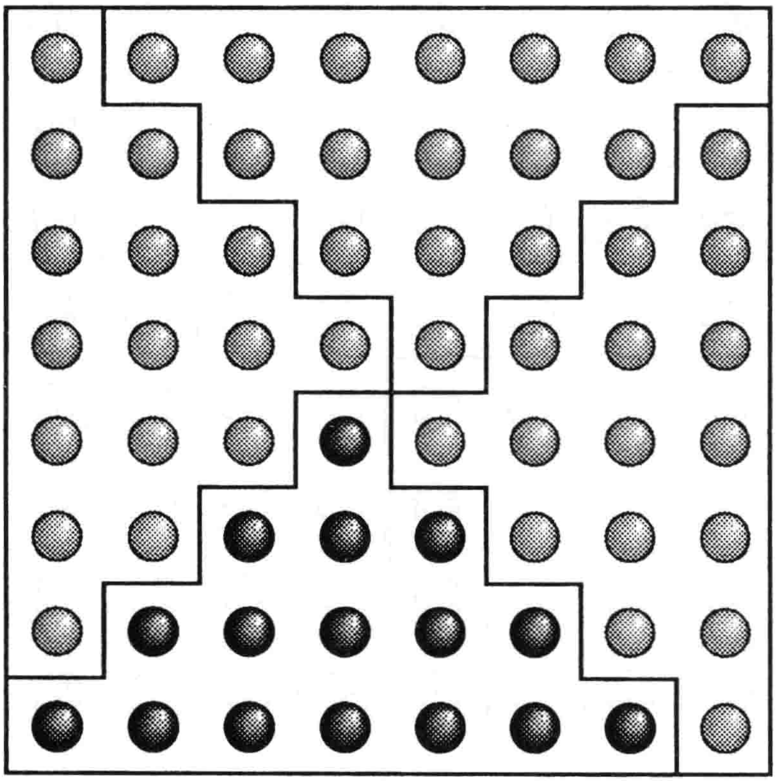
II.（第二学期微积分）



$$\frac{1}{b}(b-a) < \int_a^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x < \frac{1}{a}(b-a)$$

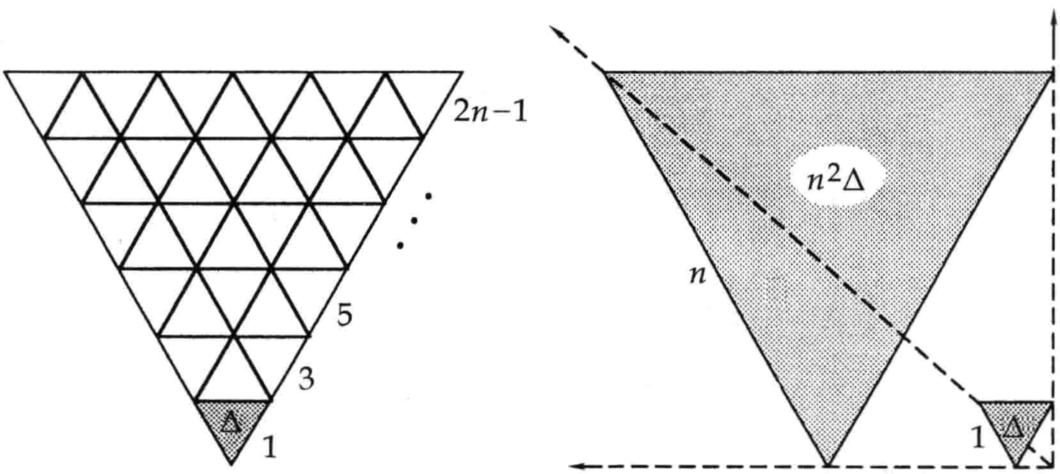
——RBN

奇数求和 II



$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{1}{4}(2n)^2=n^2$$

奇数求和Ⅲ



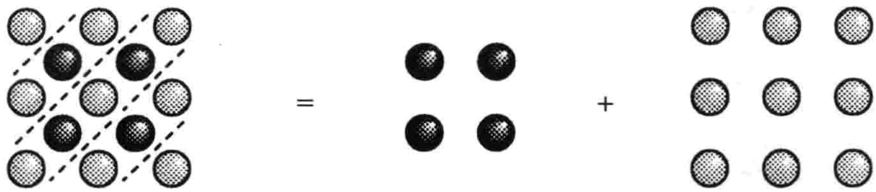
$$\Delta + 3\cdot\Delta + \cdots + (2n-1)\cdot\Delta = A = n^2\cdot\Delta$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

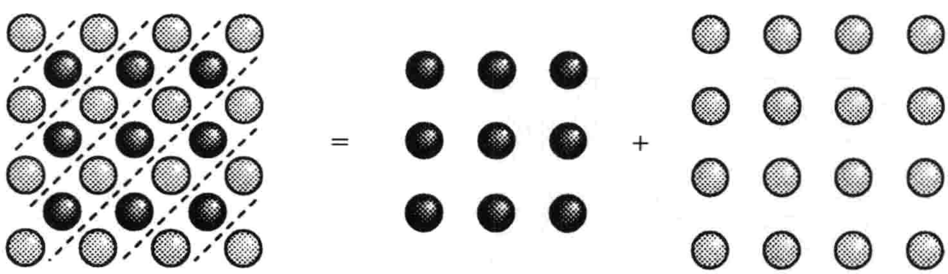
——杰诺·莱赫（Jenő Lehel）

Ⅱ.

$$1+3+1=1^2+2^2$$



$$1+3+5+3+1=2^2+3^2$$



$$1+3+5+7+5+3+1=3^2+4^2$$

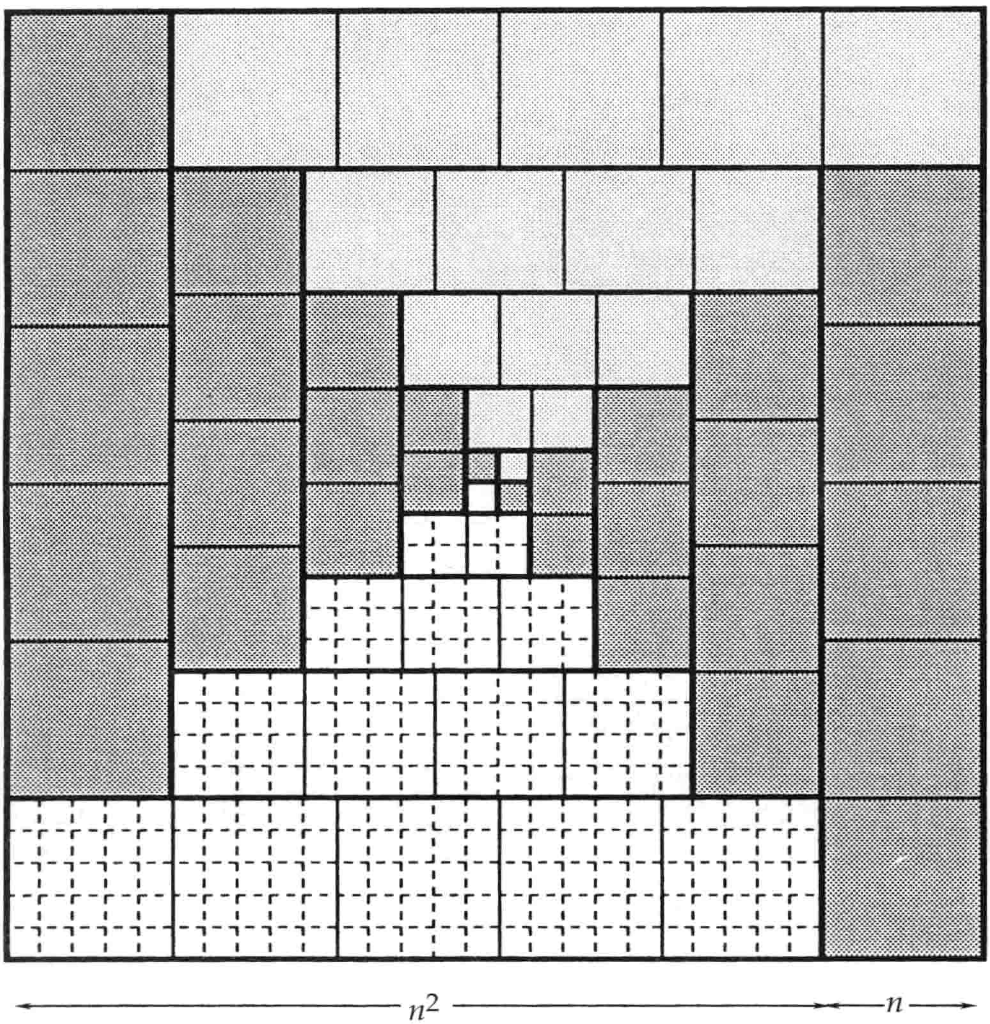
$$\vdots$$

$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1)+(2n-1)+\cdots+3+1=n^2+(n+1)^2$$

——金熙植（Hee Sik Kim）

立方求和Ⅳ

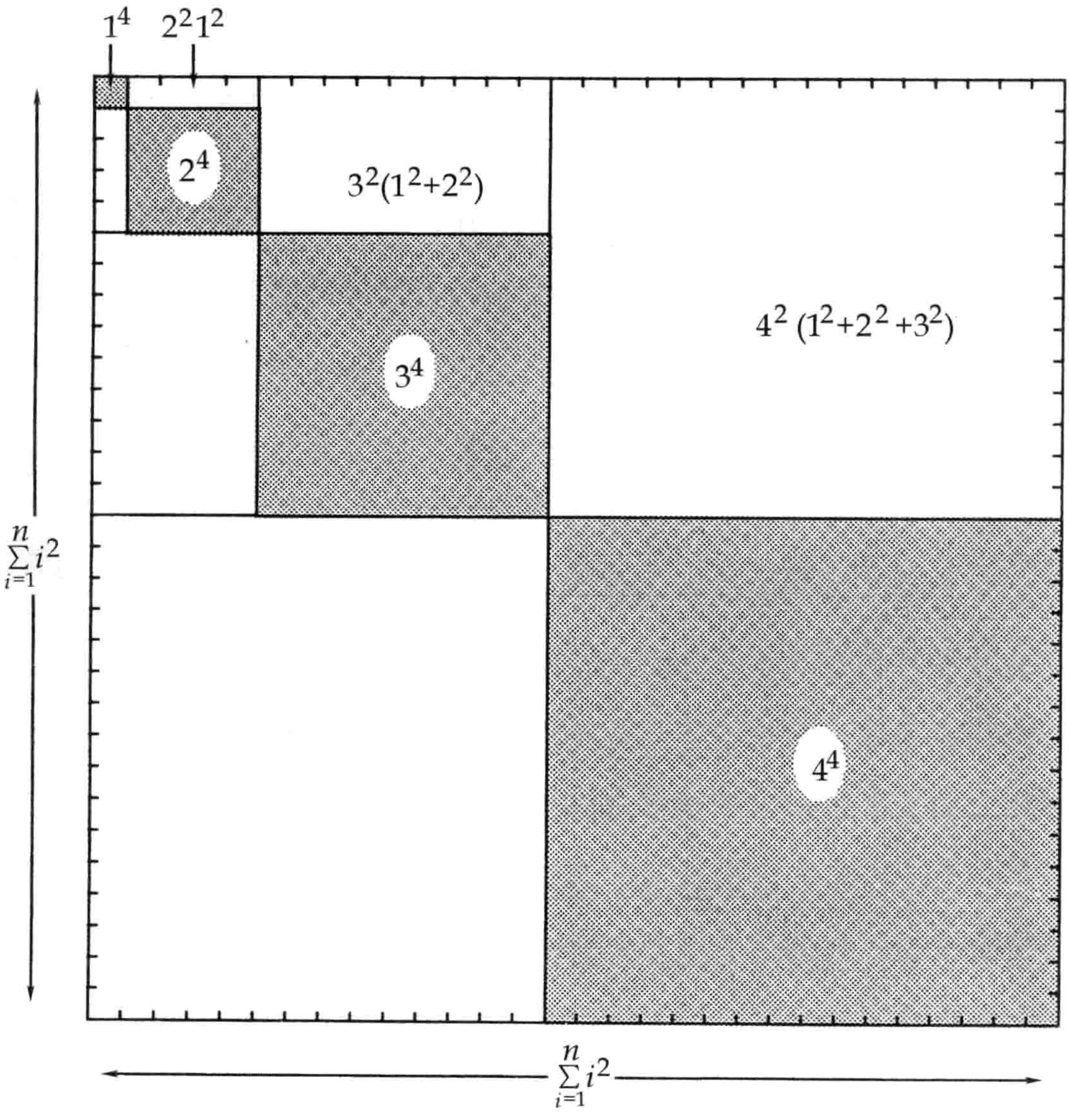
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}[n(n+1)]^2$$



——安东内拉·卡普拉瑞和沃伦·拉西芭
(Antonella Cupillari and Warren Lushbaugh)
(独立发现)

四次方的求和

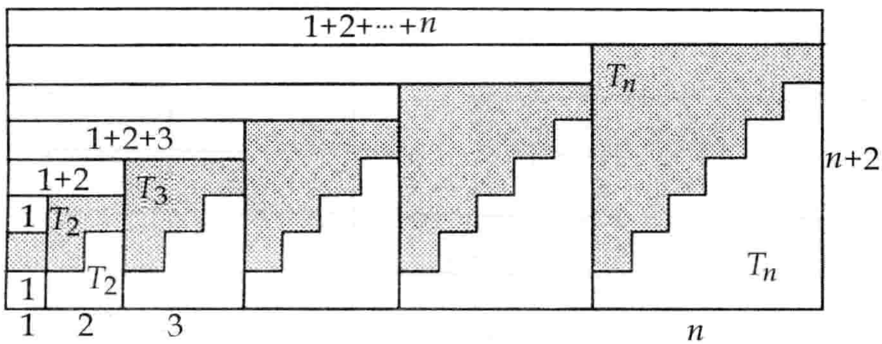
$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)^2 - 2\left[\sum_{k=2}^{n}\left(k^2 \sum_{i=1}^{k-1} i^2\right)\right]$$



——伊丽莎白 M. 马克姆（Elizabeth M. Markham）

三角数的求和 I

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n \Rightarrow T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$



$$3(T_1 + T_2 + \cdots + T_n) = (n+2) \cdot T_n$$

$$T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \frac{(n+2)}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

——蒙特 J. 泽格（Monte J. Zerger）

三角数的求和Ⅲ

$$T_k=1+2+\cdots+k \Rightarrow 3\sum_{k=1}^{n} T_k=\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$$

$$\begin{array}{lllll} 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{array} + \begin{array}{lllll} 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{array} + \begin{array}{lllll} n \\ n-1 & n-1 \\ n-2 & n-2 & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array}$$

$$= \begin{array}{lllll} n+2 \\ n+2 & n+2 \\ n+2 & n+2 & n+2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n+2 & n+2 & \cdots & n+2 \\ n+2 & n+2 & \cdots & n+2 & n+2 \end{array}$$

$$3(T_1+T_2+\cdots+T_n)=T_n\cdot(n+2)$$