

航空宇航学院

第二分册



航空宇航学院2007年学术论文清单 (0121)

序号	姓名	职称	单位	论文题目	刊物、会议名称	年、卷、期
1	王永健 赵宁	博士 教授	0121 0121	一类Lagrange坐标系下的ENO有限体积格式	数值计算与计算机应用	2007. 28. 04
2	王永健 赵宁	博士 教授	0121 0121	一类自适应运动网格的ALE方法	计算物理	2007. 24. 03
3	杨瑞芳 赵宁	博士 教授	0121 0121	一类半线性抛物型方程组解的 L_∞ 估计	南京航空航天大学学报	2007. 39. 05
4	张学莹 赵宁	博士 教授	0121 0121	求解多介质流体界面不稳定性问题的高精度WENO数值模拟方法	数值计算与计算机应用	2007. 28. 02
5	朱君 赵宁	博士 教授	0121 0121	Euler方程非结构网格分布式并行计算	数值计算与计算机应用	2007. 28. 03
6	朱君 赵宁	博士 教授	0121 0121	结构网格MWENO-7 格式的构造和应用	南京航空航天大学学报	2007. 39. 04
7	彭钧 陆志良 李文正	博士 教授 研究员	0121 0121 0121	乘波体气动性能综合优化	南京航空航天大学学报	2007. 39. 03
8	龚正 沈宏良	博士 副教授	0121 0121	非定常气动力的结构自适应神经网络建模方法	飞行力学	2007. 25. 04
9	Emad. N 陈红全	博士后 教授	0121 0121	A IRCRAFT L IFT AND LONGITUD INAL RESPONSE ENHANCEMENT BY OPTIM IZATION OF LEADING EDGE EXTENSION CONFIGURATION	Transact ions of Nanjing University of Aeronautics &Astronautics	2007. 24. 03
10	饶玲 陈红全	博士 教授	0121 0121	A continuum of solutions to variational inequality with nonlinear constraints: Existence and simplicial algorithm	Nonlinear Analysis: RealWorld Applications	2007. 08. 02
11	周春华 舒昌 伍贻兆	教授 教授 教授	0121 外校 0121	Extension of domain-free discretization method to simulate compressible flows over fixed and moving bodies	International Journal For Numerical Methods in Fluids	2007. 53
12	王江峰 伍贻兆	副教授 教授	0121 0121	Paralleized upwind flux splitting scheme for supersonic reacting flows on unstructured hybrid meshes	南京航空航天大学学报英文版	2007. 24. 03
13	王江峰 伍贻兆	副教授 教授	0121 0121	非结构混合网格高超生速绕流与磁场干扰数值模拟	计算力学学报	2007. 24. 01
14	潘勇 王江峰 伍贻兆	博士 副教授 教授	0121 0121 0121	非结构网格二维理想MHD绕流逆风格式解法 Upwind Schene for Ideal 2-D MHD Flows based on Unstructured Mesh	南京航空航天大学学报英文版	2007. 24. 01
15	顾蕴松 明晓 张召明	副教授 教授	0121 0121	全机模型大迎角侧向力控制的实验研究	空气动力学报	2007. 25. 增
16	史志伟 李晨 昂海松	副教授 硕士 教授	0121 0112 0112	微型飞行器低雷诺数流场显示实验研究	第一届近代实验空气动力学会议	2007
17	史志伟 耿存杰 明晓 王同光	副教授 硕士 教授 教授	0121 0121 0121 0121	旋翼翼型俯仰沉浮运动非定常气动特性实验研究	实验流体力学	2007. 21. 03
18	闫再友 才漪	副教授 助教	0121	立体角的计算与棱角的识别	浙江科技学院学报	2007. 19. 02
19	唐智礼	讲师	0121	Multicriterion aerodynamic shape design optimization and inverse problems using control theory and Nash games	Journal of Optimization Theory and Applications	2007. 135. 03
20	唐智礼	讲师	0121	ON COUPLINGS IN MULTI-CRITERION AERODYNAMIC DESIGN OPTIMIZATION PROBLEMS USING ADJOINT METHODS AND GAME STRATEGIES	Int. Conf. on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering (COUPLED PROBLEM2007)	2007
21	唐智礼	讲师	0121	含有非确定性的大型民机鲁棒气动优化设计方法	中国航空学会年会暨大型飞机关键技术论坛	2007
22	唐智礼	讲师	0121	基于非确定性的翼型鲁棒反设计方法	南京航空航天大学学报	2007. 39. 01
23	唐智礼	讲师	0121	约束最优控制理论及其在气动优化中的应用	力学学报	2007. 39. 02
24	陈永亮 沈宏良 刘 昶	教授 副教授 教授	0121 0121 0121	飞机深失速改出特性分析与控制	南京航空航天大学学报	2007. 39. 04
25	秦波	讲师	0121	Effective medium method of slightly compressible elastic media permeated with air-filled bubbles	Front. Phys. China	2006. 01. 04
26	李启 张强 刘建付	硕士 副高 硕士	0121	直升机尾桨定常载荷噪声的工程计算方法	南京航空航天大学学报	2006. 38. 02

航空宇航学院2007年学术论文清单 (0122)

序号	姓名	职称	单位	论文题目	刊物、会议名称	年、卷、期
1	姚 裕 吴洪涛 张召明	0122 053 0122	副教授 教授 研究员	并联风洞天平应用研究	南京航空航天大学学报	2007. 39. 01
2	姚 裕 吴洪涛 张召明	0122 053 0122	副教授 教授 研究员	并联天平静态标定研究	南京理工大学学报	2007. 31. 02
3	姚 裕 吴洪涛 张召明	0122 053 0122	副教授 教授 研究员	并联天平设计、制造及标定	机械科学与技术	2007. 26. 03
4	姚 裕 张召明	0122 0122	副教授 研究员	基于CATIA的盒式应变天平有限元分析	中国空气动力学会五届三次测控	2007
5	姚 裕 吴洪涛	0122 053	副教授 教授	新型风洞测力实验一体化装备研究展望	第一届近代实验空气动力学	2007
6	王成鹏 张红英 孙姝 王江峰 程克明	副教授 助研 博士后 副教授 研究员	0122 0122 0122 0122 0122	高超飞行器进气道/内流道流动特性试验	航空动力学报	2007. 22. 10
7	张红英 孙姝 程克明 伍贻兆	助研 博士后 研究员 教授	0122 0122 0122 0121	进气道工作状态对吸气式高超声速飞行器 气动力特性影响的实验研究	宇航学报	2007. 28. 06
8	孙姝 郭荣伟 伍贻兆	博士后 教授 教授	0122 021 0122	Characterization and Performance Enhancement of Submerged Inlet with Flush-Mounted Planar Side Entrance	Journal of Propulsion and Power	2007. 23. 05
9	孙姝 张红英 程克明 伍贻兆	博士后 助研 教授 教授	0122 0122 0122 0122	The Full Flowpath Analysis of a Hypersonic Vehicle	Chinese Journal of Aeronautics(航空学报英文版)	2007. 20. 05
10	孙姝 张红英 王成鹏 吕英伟 程克明 伍贻兆	博士后 助研 副教授 高工 教授 教授	0122 0122 0122 0122 0122 0122	高超声速轴对称流道冷流特征及气动力特 性研究	航空动力学报	2007. 22. 06
11	孙姝 张红英 程克明 伍贻兆	博士后 助研 教授 教授	0122 0122 0122 0122	喷流反压模拟技术及在高超声速进气道实 验中的应用	航空动力学报	2007. 22. 10
12	孙姝 郭荣伟 伍贻兆	博士后 教授 教授	0122 021 0122	一种平面埋入式进气道的地面工作特性及 流态特征	航空动力学报	2007. 22. 03

航空宇航学院2007年学术论文清单 (0131)

序号	姓名	职称	单位	论文题目	刊物、会议名称	年、卷、期
1	靳艳飞 胡海岩	博士后 教授	0131 0131	Coherence and Stochastic Resonance in a Delayed Bistable System	Physica A: Statistical Mechanics and its Applications	2007.382.02
2	靳艳飞 胡海岩	博士后 教授	0131 0131	Principal Resonance of a Duffing Oscillator with Delayed State Feedback under Narrow-Band Random Parametric Excitation	Nonlinear Dynamics	2007.50.1-2
3	徐旭 胡海岩 王怀磊	博士后 教授 副教授	0131 0131 0131	Stability, Bifurcation and Chaos of a Delayed Oscillator with Negative Damping and Delayed Feedback control	Nonlinear Dynamics	2007.49.01
4	韩维 胡海岩	博士 教授	0131 0131	Experimental Study on an Oblique-Impact Vibrating System of Two Degrees of Freedom	Nonlinear Dynamics	2007.50.03
5	尹群 陈永念 张健 胡海岩	博士 博士 博士 教授	0131 0131 0131 0131	水下爆炸载荷作用下舰船结构响应及新型防护结构	中国造船	2007.48.04
6	原口正和 胡海岩	博士 教授	0131 0131	Vibration suppression of flexible beam with delayed boundary feedback via discrete-time optimal controller	Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation	2007
7	高峰 王怀磊 王在华	副教授 副教授 教授	外校 0131 0131	Hopf bifurcation of a nonlinear delayed system of machine tool vibration via pseudo-oscillator analysis	Nonlinear Analysis	2007.00.08
8	陈前 K Worden	教授 教授	0131 外校	Genetic Algorithm with an Improved Fitness Function for (N)ARX Modelling	Journal of Mechanical Systems and Signal Processing	2007.21.02
9	陈前 潘昱昱	教授 硕士	0131 0131	协整理论应用于非平稳FCCU系统的状态监测与故障诊断	石油学报 (石油加工)	2007.23.01
10	L K Abbas 陈前	博士后 教授	外校 0131	Aircraft lift and maneuverability enhancement by genetic geometry optimization of LEX Configuration	Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics (TNUAA)	2007.24.04
11	L K Abbas 陈前	博士后 教授	外校 0131	Bifurcations and Chaotic Behavior of Hypersonic Lifting Surfaces with Freeplay including the Stiffness and Damping Nonlinearities	48 th Structures, Structural Dynamics, & Materials Conference	2007.04
12	L K Abbas 陈前	博士后 教授	外校 0131	Non-linear aeroelastic analysis of hypersonic two-degree-of-freedom airfoil with structural, aerodynamic-stiffness-damping and freeplay nonlinearities	International Journal of Bifurcation and Chaos (IJBC).	2008.18.04
13	L K Abbas 陈前	博士后 教授	0131 0131	Non-Linear Aerothermoelastic Modeling and Behavior of a Double-Wedge Lifting Surface	The Thermal Stresses 2007 Conference (TS2007)	2007
14	L K Abbas 陈前	博士后 教授	外校 0131	Numerical studies of a non-linear aeroelastic system with plunging and pitching freeplays in supersonic/hypersonic	Journal of Aerospace Science and Technology,	2007.00.11
15	蒋华 陈前	硕士 教授	0131 0131	恢复力曲面法在颗粒阻尼器研究中的应用	《振动冲击与诊断》	2007.27.03
16	王青梅 陈前	硕士 教授	0131 0131	基于碰撞理论的颗粒阻尼计算模型及试验研究	《振动冲击与诊断》	2007.27.04
17	游伟清 陈怀海 贺旭东	0131 0131 0131	博士 教授 讲师	振动控制系统中几种范数及其应用研究	南京航空航天大学学报	2007.39.03
18	王在华 胡海岩	教授 教授	0131 0131	Pseudo-Oscillator Analysis of Scalar Nonlinear Systems with Time-Delay near A Hopf Bifurcation	International Journal of Bifurcation and Chaos	2007.17.08
19	王在华 胡海岩	教授 教授	0131 0131	Robust stability of time-delay systems with uncertain parameters	IUTAM Symposium on Dynamics and Control of Nonlinear Systems with Uncertainty	2007
20	陈卫东 容启亮	教授 教授	0131 外校	Robust adaptive control scheme for improving low-speed profile tracking performance of hybrid stepping motor servo drive	Transaction of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics	2007.24.01
21	陈卫东 邵敏强 杨兴华 路波 徐庆华	教授 博士生 工程师 高工 高工	0131 0131 外单位 外单位 0131	跨声速风洞测力模型主动减振系统的试验研究	中国振动工程学会	2007.20.01
22	杨毅	硕士	0131	基础做定轴转动薄板的一些模态特性	2007年第二届浙沪固体力学与应用学术研讨会暨第三届江苏省固体力学学术年会	2007.10

一类 Lagrange 坐标系下的 ENO 有限体积格式^{*1)}

王永健¹ 赵 宁^{2,3} 王东红¹ 王春武¹ 毛晋峰²

(1. 南京航空航天大学理学院, 南京 210016)

(2. 南京航空航天大学航空宇航学院, 南京 210016)

(3. 中国工程物理研究院流体物理研究所, 四川绵阳 621900)

摘 要

本文首先从积分形式的二维 Lagrange 流体力学方程组出发, 使用 ENO 高阶插值多项式, 推广了四边形结构网格下的一阶有限体积格式, 构造得到了一类结构网格下的高精度有限体积格式. 该格式针对单介质问题具有良好的计算效果, 同时在处理多介质问题时, 不会产生物质界面附近强烈的震荡. 结合有效的守恒重映方法, 用 ALE 方法进行数值模拟, 得到了预期的效果.

关键词: 重映技术, ALE 方法, ENO 插值, 有限体积格式, Lagrange 坐标系

MR (2000) 主题分类: 74S10, 76M25

A KIND OF ESSENTIALLY NON-OSCILLATORY FINITE VOLUME SCHEME IN LAGRANGIAN COORDINATE

Wang Yongjian¹ Zhao Ning^{2,3} Wang Donghong¹ Wang Chunwu¹ Mao Junfeng²

(1. College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,
Nanjing 210016, China)

(2. College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,
Nanjing, 210016, China)

(3. Institute of Nuclear Physics and Chemistry, CAEP, Mianyang 621900, Sichuan, China)

Abstract

In this paper, a new kind of finite volume scheme is developed for Lagrangian equations of hydrodynamics. By use of ENO (Essentially Non-oscillatory) interpolating polynomials on structure grids, the high accurate finite volume scheme has been constructed by modifying a first order finite volume scheme on rectangular mesh. This scheme not only does well in single material calculations, but also eliminates the oscillations due to common conservative scheme in multimaterial calculations. Finally, with the remapping method, some numerical experiments are made with an arbitrary Lagrangian-Eulerian method and results show that the method is effective.

Keywords: remapping technique, ALE method, ENO interpolation, finite volume scheme, Lagrangian coordinate

2000 Mathematics Subject Classification: 74S10, 76M25

* 2005 年 8 月 16 日收到.

¹⁾ 资助项目: 国家自然科学基金 (10601023), 中国工程物理研究院科学技术基金 (20050649), 计算物理重点实验室基金 (2005), 南京航空航天大学青年创新基金, 南京航空航天大学理学院创新基金.

1. 引言

流体力学计算方法按其采用 Euler 坐标系还是 Lagrange 坐标系可分为 Euler 方法和 Lagrange 方法两大类. Lagrange 方法中网格跟随流体运动, 对于许多有界面或自由面的问题是一种理想的方法. Euler 方法中的网格是固定的, 对大变形问题比较理想, 但是不能对界面和自由面有十分清晰的分辨能力. 为了克服各自的限制, 发展了两种方法相结合的方法, 具有代表性的是 1974 年 Hirt 等人提出的 ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 方法^[1]. 该方法的计算分两步, 首先是 Lagrange 步, 即只考虑压力梯度分布对速度和能量改变的影响, 在动量方程中压力取前一时刻的量. 然后是重映步. 重映过程是指将网格进行重分后利用旧网格上的物理量来插值得到新网格上的物理量的过程. 此后, 国内外关于 ALE 方法开展了大量的研究工作^[2-6]. 然而一般的守恒型的 ALE 格式应用到计算多介质问题会出现类似 Euler 方法计算中的物质界面附近的震荡^[7-9]. 本文从积分形式的二维 Lagrange 流体力学方程组出发, 采用已经在 Euler 方程求解中得到成功运用的高精度 ENO (Essentially Non-oscillatory) 有限体积格式的构造思想, 推导了一类 Lagrange 有限体积格式, 并结合 ENO 思想的近似积分守恒重映方法^[10,11], 进行了单介质和多介质问题的计算. 结果表明该格式不仅对单介质的问题具有良好的计算效果, 而且可以在多介质问题的计算中, 避免物理界面附近的强烈震荡.

2. ENO 有限体积格式的构造

2.1. 控制方程

考虑理想流体, 即无粘性、无热传导的流体, 并且没有外源, 同时还可以忽略彻体力, 则 Lagrange 坐标系下质量、动量、能量守恒方程可以简化为:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_L} \rho dV = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_L} \rho \vec{v} dV + \int_{V_L} \text{grad} p dV = 0, \quad (1b)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_L} \rho E dV + \int_{S_L} p \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0, \quad (1c)$$

这里 V_L 是 Lagrange 控制体积, S_L 是它的边界表面, $\frac{d}{dt}$ 是随体微商, $\vec{n}$ 是表面的外法向单位向量, ρ 是密度, $\vec{v}$ 是速度, E 是比总能, $E = e + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}$, e 是比内能, p 为压强, $p = (\gamma - 1) \rho e$. 这些方程是守恒型数值格式的出发点, 采用格心型有限体积法时, 所有物理量均取在网格中心, 控制体为网格单元本身.

2.2. ENO 插值多项式构造

插值点的选取是构造插值多项式的一个重要组成部分, 插值点的选取方式应尽量少, 以减少计算时间, 在光滑区域应减少插值的依赖区域, 而且插值区域应不包含间断.

给定函数 $v(x)$ 在 $k+1$ 个点 $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ 上的值, 则

(1) 如果函数 $v(x)$ 在区间 (x_i, x_{i+k}) 上是光滑的, 则 $v(x)$ 满足

$$v[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{v^{(k)}(\xi)}{k!}, \quad \text{其中 } \xi \in (x_i, x_{i+k}). \quad (2)$$

(2) 如果函数 $v(x)$ 在区间 (x_i, x_{i+k}) 上出现间断, 则有

$$v[x_i, \dots, x_{i+k}] = O\left(\frac{1}{\Delta x^k}\right). \quad (3)$$

可见, 在光滑区域, 差商是有界的, 而在含有间断的区域, 差商随 $\Delta x \rightarrow 0$ 而趋于无穷大, 所以可以用差商来测试函数的光滑性.

以网格单元为控制体 Ω_i , 构造 ENO 插值多项式. 如果我们构造控制体 Ω_1 上的插值多项式^[12,13], 记 $\Omega_i (i=1, 2, 3)$ 上的网格平均值为 $\bar{U}_i$. 设在单元 Ω_i 上, 函数 $f(x, y)$ 的平均值记为:

$$\langle f(x, y) \rangle_{\Omega_i} = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} f(x, y) dx dy, \quad \text{其中 } |\Omega_i| \text{ 为控制体 } \Omega_i \text{ 的面积.} \quad (4)$$

对于线性插值多项式, 设为:

$$p_1(x, y) = q_0 + q_x x + q_y y, \quad (5)$$

则此时有

$$\begin{cases} \langle p_1(x, y) \rangle_{\Omega_1} = \bar{U}_1 \\ \langle p_1(x, y) \rangle_{\Omega_2} = \bar{U}_2 \\ \langle p_1(x, y) \rangle_{\Omega_3} = \bar{U}_3 \end{cases}, \quad (6)$$

在系数矩阵非病态的情况下, 可唯一确定一组系数 q_0, q_x, q_y .

一般情况下, $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ 无论是结构网格还是非结构网格, 都有多种选择的可能. 这里, 我们选择其中的一组 $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$, 使 $|q_x| + |q_y|$ 的值为最小. 通过以上方法构造的插值多项式是构造计算格式的重要基础. 同理, 对于二次插值多项式, 设为:

$$p_1(x, y) = q_0 + q_x x + q_y y + q_{xy} xy + q_{xx} x^2 + q_{yy} y^2 \quad (7)$$

其中 $q_0, q_x, q_y, q_{xy}, q_{xx}, q_{yy}$ 为待定系数, 六个未知量需要有六个方程来解, 所以需要选取除自身以外的五个控制体.

3. 结构网格下高精度 ENO 计算格式构造

针对积分方程 (1) 进行结构网格下的高精度格式构造. 结构网格划分: $x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, t_n = n\Delta t$. 由于网格随流体运动, 所以单个网格内质量始终不变, 质量方程不需要离散化. 由于能量与速度所取控制体不同, 所以将能量方程和动量方程分开来讨论各自的离散化.

首先考虑能量方程的离散. 对于一个特定的网格单元 Ω_l , 记 $F = (pu, pv)$ 有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_l} \rho E dx dy = - \sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_k} F \cdot n_k ds \quad (8)$$

其中 Γ_k 表示第 k 条边, n_k 为 Γ_k 的单位外法向.

记

$$\langle U \rangle_{\Omega_i} = \bar{U}_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} U dx dy \quad (9)$$

其中 $|\Omega_i|$ 为多边形 Ω_i 的面积, 从文 [2] 公式 (5.1.8) 得

$$-Q_{\Omega_i}^k = \int_{\Gamma_k} F \cdot n_k ds \approx -p_{k,k+1} u_{n,k,k+1} s_{k,k+1} \quad (10)$$

其中 $p_{k,k+1}$ 为网格边界上压强, k 为组成控制体的四个顶点的序号, 以逆时针为序. 由于有限体积方法得到的是网格平均值 $\bar{p}$, 由 $\bar{p}$ 可以构造高阶插值多项式 $p(x, y)$ 来近似 $\bar{p}$. 由于不能保证 $p(x, y)$ 在网格边界上是连续的, 因此 $p_{k,k+1}$ 不能直接从构造的插值多项式 $p(x, y)$ 求得, 这里需要解一个 Riemann 问题, 通过求解精确 Riemann 解, 可以得到 $p_{k,k+1}$ 的值. 而法向速度 u_n 和网格侧面积的乘积取为:

$$u_{n,k,k+1} s_{k,k+1} = \frac{1}{2} [(u_k + u_{k+1})(y_{k+1} - y_k) - (v_k + v_{k+1})(x_{k+1} - x_k)] \quad (11)$$

其中 u_k 表示序号为 k 的顶点的 x 方向速度, v_k 表示序号为 k 的顶点的 y 方向速度, (x_k, y_k) 表示序号为 k 的顶点的坐标值.

则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho E \rangle_{\Omega_i} &= \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^4 Q_{\Omega_i}^k \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^4 p_{k,k+1} [(u_k + u_{k+1})(y_{k+1} - y_k) - (v_k + v_{k+1})(x_{k+1} - x_k)]. \end{aligned} \quad (12)$$

再讨论动量方程的离散. 对速度的控制体 Ω_i 进行积分, 得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho u \rangle_{\Omega_i} = \frac{1}{|\Omega_i|} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_i} \rho u dx dy = -\frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \frac{\partial p}{\partial x} dx dy = -\frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_k} p_{k,k+1} dy, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho v \rangle_{\Omega_i} = \frac{1}{|\Omega_i|} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_i} \rho v dx dy = -\frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \frac{\partial p}{\partial y} dx dy = -\frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_k} p_{k,k+1} dx. \quad (14)$$

利用 (12)-(14) 可以求得 Δt 时间后, 新的能量 $\bar{E}$, 网格中心的速度 $\bar{u}$, $\bar{v}$, 为了能够计算出网格中心新的密度值, 必须知道 Δt 时间后网格角点新的位置, 但是网格角点的新速度并不知道, 对于一维问题我们可以使用 Riemann 解得出网格点上的速度, 但是对于二维问题我们只能得出网格边上速度, 无法确定网格角点的速度. 为了解决这一问题, 我们借用格点型格式的思想, 通过计算格式直接计算出网格角点的速度, 控制体 Ω_i' 的选择和计算方法如下:

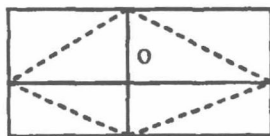


图 1 速度的控制体

构造网格角点 O 处速度的控制体为图 1 中虚线所围. 这样, 通过类似文 [2] 中动量方程的离散, 我们可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho u \rangle_{\Omega'_i} = \frac{1}{|\Omega'_i|} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega'_i} \rho u dx dy = -\frac{1}{|\Omega'_i|} \int_{\Omega'_i} \frac{\partial p}{\partial x} dx dy = -\frac{1}{|\Omega'_i|} \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} p dy, \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho v \rangle_{\Omega'_i} = \frac{1}{|\Omega'_i|} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega'_i} \rho v dx dy = -\frac{1}{|\Omega'_i|} \int_{\Omega'_i} \frac{\partial p}{\partial y} dx dy = -\frac{1}{|\Omega'_i|} \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} p dx \quad (16)$$

其中 Γ_k 是构成控制体 Ω'_i 的边, n 是控制体的边的数目, 而且每条边都一定属于某个网格单元中, 本文中 n 等于 4. 如果已经在整个网格系统构造了针对网格平均压强 $\bar{p}$ 的插值多项式 $p(x, y)$, 则有如下结论:

假设边 Γ_k 所在网格内的插值多项式为 $p(x, y) = q_0 + q_x x + q_y y$, 那么把线段用参数方程 $x = x_1 + (x_2 - x_1)t$, $y = y_1 + (y_2 - y_1)t$ 表示, 可得

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_k} p dy &= \int_{\Gamma_k} p(x, y) dy = \int_{\Gamma_k} (q_0 + q_x x + q_y y) dy \\ &= (y_2 - y_1) \left((q_x x_1 + q_y y_1 + q_0) + \frac{1}{2} (q_x (x_2 - x_1) + q_y (y_2 - y_1)) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

同理得:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_k} p dx &= \int_{\Gamma_k} p(x, y) dx = \int_{\Gamma_k} (q_0 + q_x x + q_y y) dx \\ &= (x_2 - x_1) \left((q_x x_1 + q_y y_1 + q_0) + \frac{1}{2} (q_x (x_2 - x_1) + q_y (y_2 - y_1)) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

其中点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 为边 Γ_k 的起点和终点. 这里的起点和终点是针对区域 Ω'_i 而言的, 从线段的起点走向终点时, 区域总是位于线段的左侧.

经过 (17)-(18) 的计算, 得出了网格角点的速度, 可以求出网格角点运动的位置

$$\tilde{x}_{ij} = x_{ij} + \Delta t \tilde{u}_{ij}, \quad (19)$$

$$\tilde{y}_{ij} = y_{ij} + \Delta t \tilde{v}_{ij}, \quad (20)$$

从每个网格角点的新位置 $(\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{ij})$, 可以求得每个网格单元的新的体积量 $\tilde{V}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$, 从而可以求出新的密度,

$$\tilde{\rho}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = M_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} / \tilde{V}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \quad (21)$$

其中 $M_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$ 为网格单元的质量.

联立方程 (12)-(14)、(17)-(21), 结构网格下的 ENO 高精度格式的表达式可以写成如下形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{U}_l = L(\bar{U}_l) \quad (22)$$

其中 $U = (\rho u, \rho v, \rho E)^T$, $p = (\gamma - 1) \rho (E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2))$.

这样方程 (1) 的求解问题已经转化为一个常微分方程组的求解问题, 常微分方程组的数值求解可以利用 Runge-Kutta 方法, 采用三阶 TVD Runge-Kutta 方法 [13], 计算公式如下

$$\bar{U}_l^{(0)} = \bar{U}_l, \quad (23)$$

$$\bar{U}_i^{(1)} = \bar{U}_i^{(0)} + \Delta t L(\bar{U}_i^{(0)}), \quad (24)$$

$$\bar{U}_i^{(2)} = \frac{3}{4}\bar{U}_i^{(0)} + \frac{1}{4}\bar{U}_i^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(\bar{U}_i^{(1)}), \quad (25)$$

$$\bar{U}_i^{(new)} = \frac{1}{3}\bar{U}_i^{(0)} + \frac{2}{3}\bar{U}_i^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(\bar{U}_i^{(2)}). \quad (26)$$

这样就完成了一步 Lagrange 计算. 如果采用三阶的 ENO 插值多项式就能构造出空间三阶、时间三阶的高精度 ENO 有限体积格式.

4. 数值模拟

针对一维问题, 网格角点速度的计算有两种选择方法, 一种是通过求解 Riemann 解获得, 另一种是通过波动方程离散, 用格式计算获得. 我们分别来进行数值模拟, 然后分析和比较结果.

$$\text{问题一: } \begin{cases} (\rho, u, p) = (1, 0, 1) & x < 0.5 \\ (\rho, u, p) = (0.125, 0, 0.1) & x \geq 0.5 \end{cases}$$

左右多方指数记为 γ_L, γ_R , 单介质时取 $\gamma_L = \gamma_R = 1.4$, 多介质时取 $\gamma_L = 1.4, \gamma_R = 1.67$, 使用二阶 ENO 高精度计算格式, 在区域 $[0, 1]$ 上取 200 个点, 时间 $t=0.18$ 时, 网格角点速度用 Riemann 解, 计算结果见图 2, 多介质时, 计算结果见图 3.

同样的问题, 用格式计算获得角点的速度, 结果见图 4, 5.

从数值试验的结果我们可以看出用格式计算求角点速度的方法计算结果在界面处的震荡比使用 Riemann 解求角点速度的结果要小. 而且用格式计算求角点速度的方法非常容易推广到多维情况, 而用 Riemann 解求角点速度的方法要推广到多维, 需要考虑边的移动, 然后获得网格角点的新位置, 相对而言较复杂. 故而, 本文选择使用格式计算求角点速度的方法.

$$\text{问题二: } \begin{cases} (\rho, u, p, \gamma) = (0.445, 0.698, 3.528, 1.4) & x < 0.5 \\ (\rho, u, p, \gamma) = (0.5, 0, 0.571, 1.67) & x \geq 0.5 \end{cases}$$

使用二阶 ENO 高精度计算格式和 ENO 近似积分重映方法, 区域 $[0, 1]$ 上取 400 个点, 时间 $t=0.14$ 时计算结果见图 6, 界面处没有产生明显的震荡.

$$\text{问题三: 二维 Riemann 问题} \begin{cases} (\rho, u, v, p) = (0.8, 0, 0, 1.0) & x < 0, y < 0 \\ (\rho, u, v, p) = (1.0, 0.7276, 0, 1.0) & x < 0, y > 0 \\ (\rho, u, v, p) = (1.0, 0, 0.7276, 1.0) & x > 0, y < 0 \\ (\rho, u, v, p) = (0.5313, 0, 0, 0.40) & x > 0, y > 0 \end{cases}$$

其中 $\gamma = 1.4$, 使用二阶 ENO 高精度计算格式和 ENO 近似积分守恒重映方法, 区域 $[0, 2] \times [0, 2]$, 网格 200×200 , 时间 $t=0.52$ 时密度等值线见图 7.

$$\text{问题四 [15]: } \begin{cases} (\rho, u, v, p, \gamma) = (1, 0, 0, 1, 1.6) & (x-1)^2 + (y-1)^2 > 0.25 \\ (\rho, u, v, p, \gamma) = (0.125, 0, 0, 0.1, 1.2) & (x-1)^2 + (y-1)^2 < 0.25 \end{cases}$$

使用 ENO 高精度计算格式和 ENO 近似积分守恒重映方法, 区域 $[0, 2] \times [0, 2]$, 网格 200×200 , 时间 $t = 0.2$ 时密度等值线见图 8. 数值模拟的结果与文 [15] 中的引入 Level-set^[16] 方法后的计算结果相当.

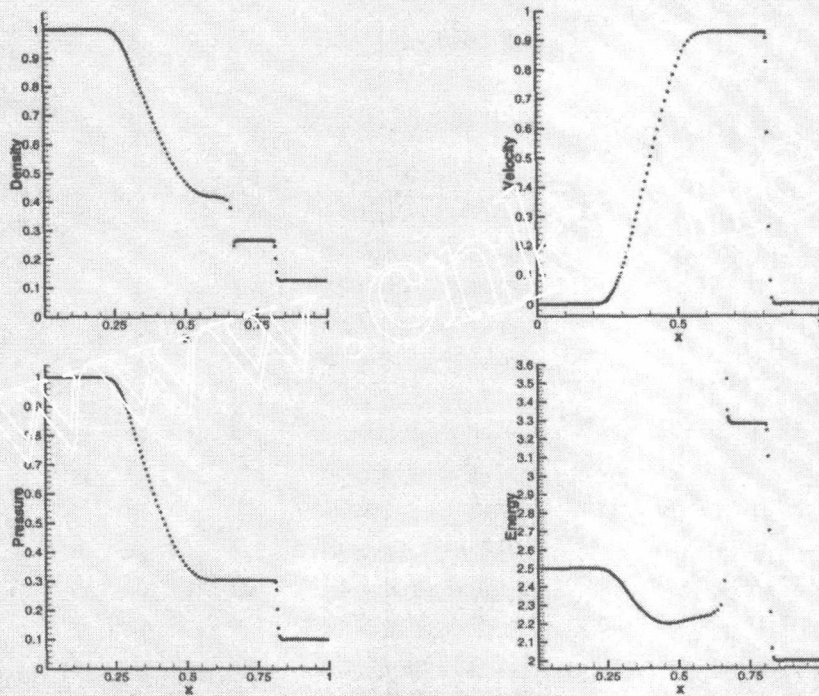


图 2 单介质 Sod 问题 (用 Riemann 解求角点速度)

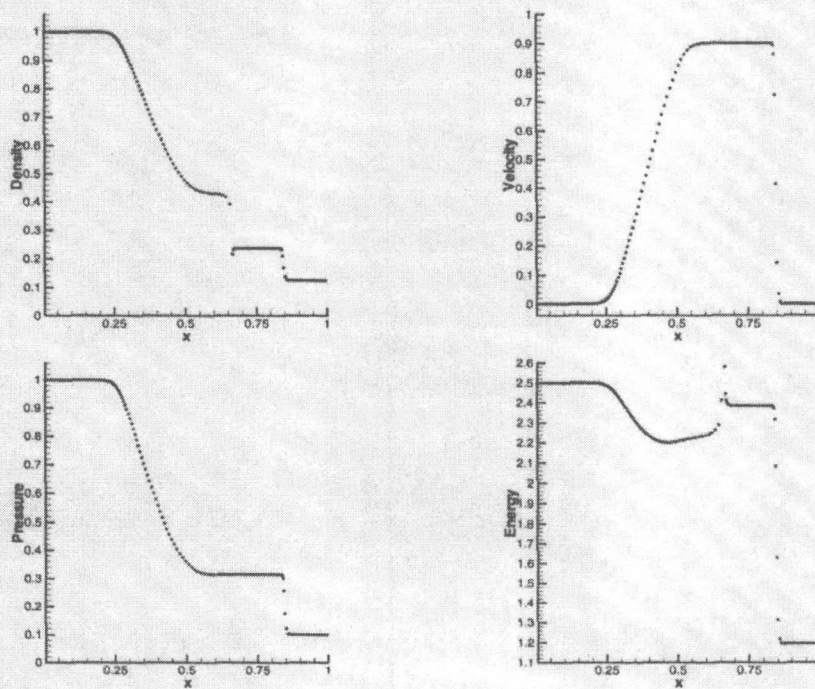


图 3 多介质 Sod 问题 (用 Riemann 解求角点速度)

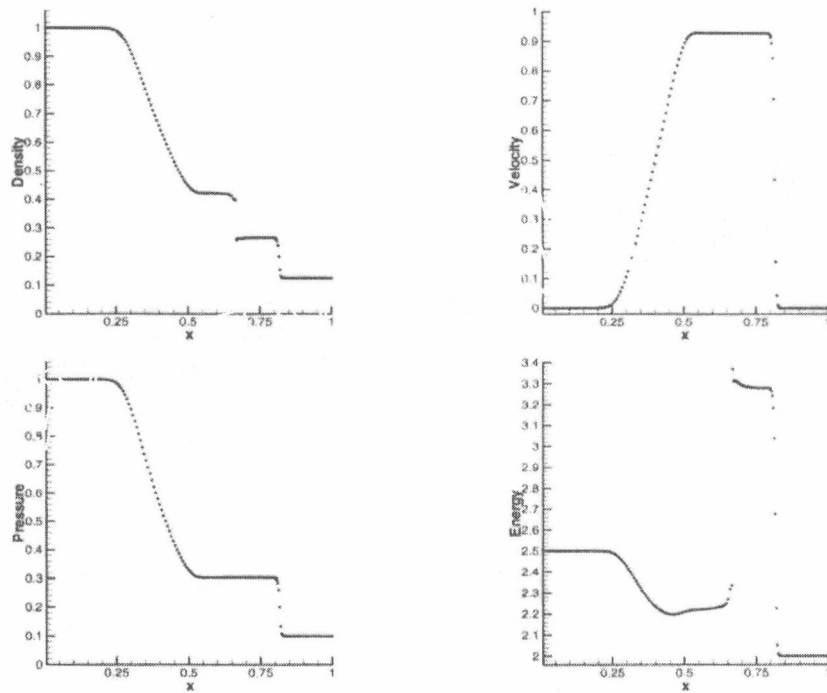


图 4 单介质 Sod 问题 (用格式计算求角点速度)

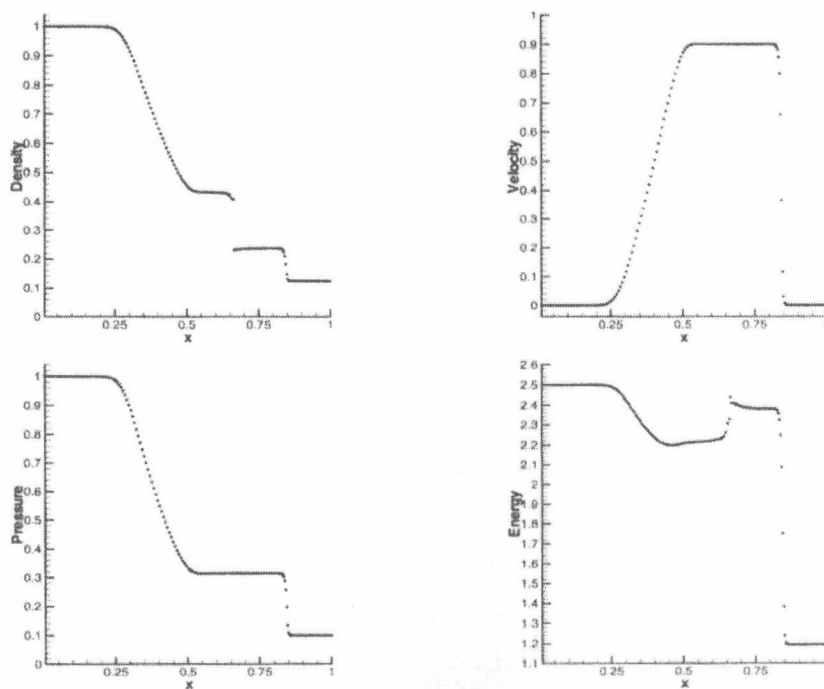


图 5 多介质 Sod 问题 (用格式计算求角点速度)

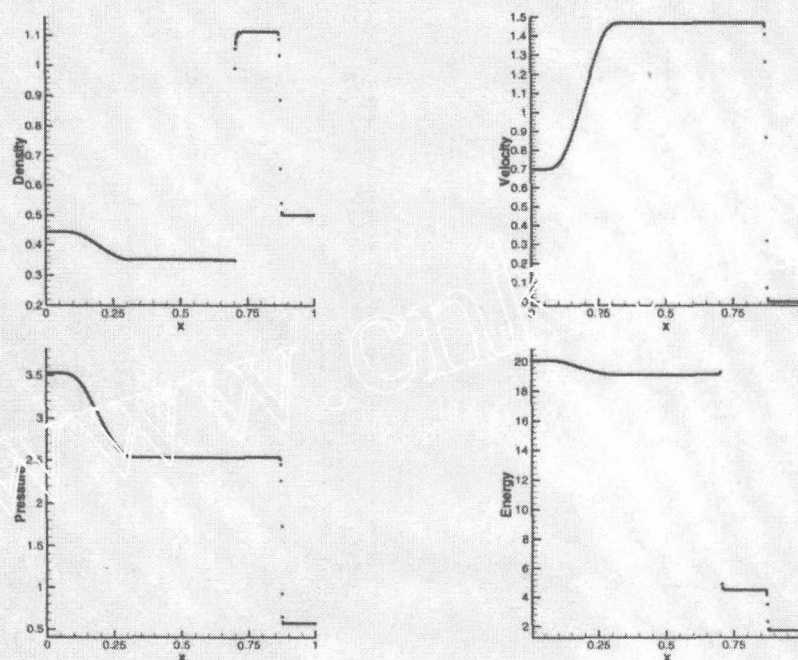


图6 多介质 Harten 问题

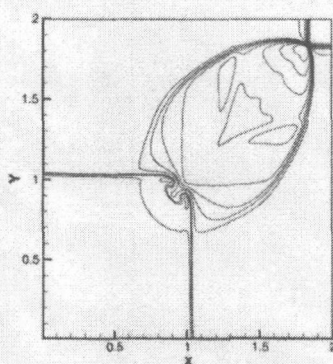


图7 二维 Riemann 问题

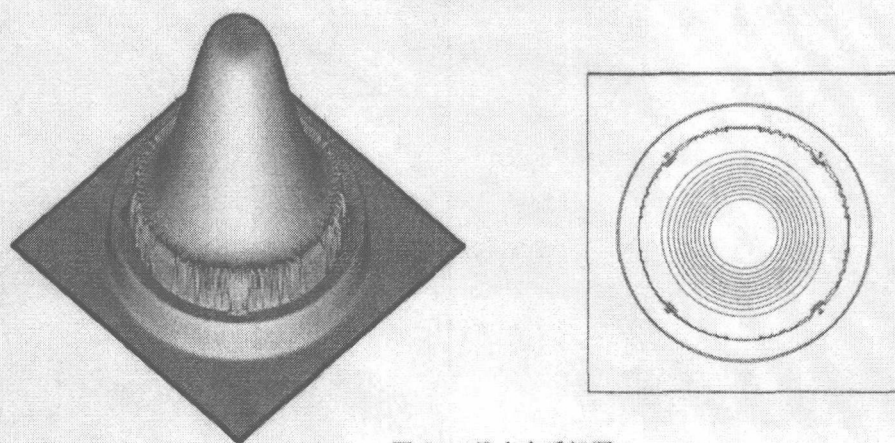


图8 二维多介质问题

5. 结 论

本文从构造 Lagrange 坐标系下的高精度 ENO 守恒格式出发, 针对计算新的网格密度值的要求, 引入了在网格角点进行动量方程离散, 直接获得网格角点运动速度的方法, 成功地构造了一类新的 ALE 方法下的守恒型格式. 该格式不仅可以较好地模拟单介质问题, 同时针对多介质问题的界面计算能够消除普遍存在的守恒型格式计算时的界面附近的震荡. 从数值模拟的结果可以看出, 本文构造的 ENO 有限体积格式是可行的, 结合有效的重映方法, 实现了 ALE 方法的数值模拟计算. 为进一步将该方法推广到非结构网格奠定了良好的基础.

参 考 文 献

- [1] Hirt C W, Amsden A. A and Cook J L. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds[J]. Journal of Computational Physics, 1974, 14: 76-85.
- [2] 李德元, 徐国荣, 水鸿寿等. 二维非定常流体力学数值方法 [M]. 科学出版社, 1987.
- [3] Benson D J. Momentum advection on a staggered mesh[J]. Journal of Computational Physics, 1992, 100.
- [4] Amsden A A, Ruppel H M, Hirt C W. SALE: A simplified ALE Computer Program for FLuid Flow at All Speeds[R]. LA-8095, Los Alamos Nation Laboratory, Los Alamos, NM, 1980.
- [5] Benson D J. An efficient accurate, simple ALE method for nonlinear finite element programs[J]. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., 1989, 72.
- [6] Budge K G. ALE shock calculations using a stabilized serendipity rezoning scheme[J]. Shock Compress. Condens. Matt., 1991.
- [7] Remi Abgrall, Smadar Karni, Computations of compressible multifluids[J]. Journal of Computational Physics, 2001, 169: 594-623.
- [8] Samdar Karni, Multicomponent flow calculations by a consistent primitive algorithm[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 112: 31-43.
- [9] 李德元等. 多介质流体力学计算的高分辨格式 [J]. 计算物理, 1996, 13(1): 57-64.
- [10] 王永健, 赵宁. 一类二阶守恒单调重映算法 [J]. 南京航空航天大学学报, 2004, 36(5): 653-657.
- [11] 王永健, 赵宁. 一类基于 ENO 插值的守恒重映算法 [J]. 计算物理, 2004, 21(4): 329-334.
- [12] 王春武. 高精度 ENO 格式的构造及并行计算研究 [J]. 南京航空航天大学, 2000.
- [13] 刘儒勋, 舒其望. 计算流体力学的若干新方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [14] Hu and Shu. Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes on Triangular Meshes[R]. NASA/CR-1998-208459.
- [15] Bailey D A, Sweby P K, Glaister P. A ghost fluid, moving finite volume plus remap method for compressible Euler flows[C]. ICFD conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics, Oxford, UK. 2004.
- [16] Fedkiw R P, Aslam T, Merriman B and Osher S A. Non-oscillatory Eulerian approach to interface in multimaterial flows (the ghost fluid method)[J]. J. Comput. Phys., 1999, 152(2): 457-492.

[文章编号] 1001-246X(2007)03-0261-07

一类自适应运动网格的 ALE 方法

王永健¹, 赵 宁², 毛君峰², 王东红¹

(1. 南京航空航天大学理学院, 江苏 南京 210016; 2. 南京航空航天大学空气动力学系, 江苏 南京 210016)

[摘 要] 从积分形式的二维 Lagrange 流体力学方程组出发, 使用 ENO 高阶插值多项式, 推广了四边形结构网格下的一阶有限体积格式, 构造一类结构网格下的高精度有限体积格式. 结合有效的守恒重映方法, 发展一类高精度的 ALE 方法, 并结合自适应运动网格技术, 进行 ALE 方法的数值模拟, 得到预期的效果.

[关键词] 重映技术; ALE 方法; ENO 插值; 有限体积格式; 自适应运动网格

[中图分类号] O241.5

[文献标识码] A

0 引言

流体力学计算方法按其采用坐标系不同, 可分为 Euler 方法和 Lagrange 方法两大类. Lagrange 方法中网格跟随流体运动, 对于许多有界面或自由面的问题是一种理想的方法. 然而多维的 Lagrange 方法仅能计算有限的步数, 网格的扭曲甚至相交终止了计算过程. Euler 方法的网格是固定的, 对大变形问题比较理想, 但是对界面和自由面没有十分清晰的分辨能力. 为了克服各自的限制, 发展了两种方法相结合的方法, 具有代表性的是文[1]提出的 ALE(Arbitrary Lagrangian Eulerian)方法. 该方法的计算分两步: ①Lagrange 步, 即只考虑压力梯度分布对速度和能量改变的影响, 在动量方程中压力取前一时刻的量; ②重映步, 指将网格进行重分后, 利用旧网格上的物理量插值得到新网格上的物理量. 此后, 国内外关于 ALE 方法开展了大量的研究工作^[2-6]. 然而一般的守恒型的 ALE 格式应用到计算多介质问题会出现类似 Euler 方法计算中的物质界面附近的震荡^[7-9]. 本文从积分形式的二维 Lagrange 流体力学方程组出发, 采用已经在 Euler 方程求解中得到成功运用的高精度 ENO(Essentially Nonoscillatory)有限体积格式的构造思想, 推导一类 Lagrange 有限体积格式, 并结合 ENO 思想的近似积分守恒重映方法^[10,11], 进行一维单介质和多介质问题的计算. 结果表明该格式不仅对单介质问题具有良好的计算效果, 且在多介质问题的计算中, 可避免物理界面附近的强烈震荡. 在此基础上, 结合自适应运动网格的思想, 进行自适应运动网格的 ALE 方法的数值模拟. 计算结果表明, 使用该方法不仅能够提高计算精度, 而且提高了计算效率.

1 ENO 有限体积格式的构造

1.1 控制方程

考虑理想流体, 即无粘性、无热传导的流体, 且没有外源, 同时还可以忽略质量, 则 Lagrange 坐标系下质量、动量、能量守恒方程可以简化为

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v dV + \int_V \text{grad} p dV = 0, \quad (1b)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho E dV + \int_V p v \cdot n dS = 0, \quad (1c)$$

[收稿日期] 2006-02-27; [修回日期] 2006-06-12

[基金项目] 计算物理重点实验室基金(2005年)南京航空航天大学理学院青年基金资助项目

[作者简介] 王永健(1979-), 男, 江苏太仓, 博士生, 从事计算流体力学方面的研究.

这里 V_L 是 Lagrange 控制体积, S_L 是它的边界表面, $\frac{d}{dt}$ 是随体微商, n 是表面的外法向单位向量, ρ 是密度, v 是速度, E 是比总能量, $E = e + \frac{1}{2} v \cdot v$, e 是比内能, p 为压强, $p = (\gamma - 1) \rho e$. 这些方程是守恒型数值格式的出发点, 采用格心型有限体积法时, 所有物理量均取在网格中心, 控制体为网格单元本身.

2 结构网格下高精度 ENO 计算格式构造

针对积分方程(1)进行结构网格下的高精度格式构造. 结构网格划分: $x_i = i\Delta x$, $y_j = j\Delta y$, $t_n = n\Delta t$. 由于网格随流体运动, 所以单个网格内质量始终不变, 质量方程不需要离散化. 由于能量与速度所取控制体不同, 所以分别讨论能量方程和动量方程各自的离散化.

首先考虑能量方程的离散. 对于一个特定的网格单元 Ω_i , 记 $F = (pu, pv)$, 有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_i} \rho E dx dy = - \sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_k} F \cdot n_k ds, \quad (8)$$

其中 Γ_k 表示第 k 条边, n_k 为 Γ_k 的单位外法向.

记

$$\langle U \rangle_{\Omega_i} = \bar{U}_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} U dx dy, \quad (9)$$

其中 $|\Omega_i|$ 为多边形 Ω_i 的面积, 从文[2]公式(5.1.8)得

$$- \mathcal{Q}_{\Omega_i}^k = \int_{\Gamma_k} F \cdot n_k ds \approx - p_{k,k+1} u_{n,k,k+1} S_{k,k+1}, \quad (10)$$

其中 $p_{k,k+1}$ 为网格边界上压强, k 为组成控制体的 4 个顶点的序号, 以逆时针为序. 由于有限体积方法得到的是网格平均值 $\bar{p}$, 由 $\bar{p}$ 可以构造高阶插值多项式 $p(x, y)$ 来近似 $\bar{p}$. 由于不能保证 $p(x, y)$ 在网格边界上是连续的, 因此 $p_{k,k+1}$ 不能直接从构造的插值多项式 $p(x, y)$ 求得, 对于单介质问题比较简单, 常用的方法是 Roe 平均, 对于多介质问题需要解一个 Riemann 问题. 通过求解精确 Riemann 解, 可以得到 $p_{k,k+1}$ 的值. 而法向速度 u_n 和网格侧面积的乘积取为

$$u_{n,k,k+1} S_{k,k+1} = [(u_k + u_{k+1})(y_{k+1} - y_k) - (v_k + v_{k+1})(x_{k+1} - x_k)]/2, \quad (11)$$

其中 u_k 表示序号为 k 的顶点的 x 方向速度, v_k 表示序号为 k 的顶点的 y 方向速度, (x_k, y_k) 表示序号为 k 的顶点的坐标值. 则有

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho E \rangle_{\Omega_i} = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^4 \mathcal{Q}_{\Omega_i}^k = \frac{1}{2} \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^4 p_{k,k+1} [(u_k + u_{k+1})(y_{k+1} - y_k) - (v_k + v_{k+1})(x_{k+1} - x_k)]. \quad (12)$$

再讨论动量方程的离散. 对速度的控制体 Ω_i 进行积分, 得

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho u \rangle_{\Omega_i} = \frac{1}{|\Omega_i|} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_i} \rho u dx dy = - \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \frac{\partial p}{\partial x} dx dy = - \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_k} p_{k,k+1} dy, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho v \rangle_{\Omega_i} = \frac{1}{|\Omega_i|} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_i} \rho v dx dy = - \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \frac{\partial p}{\partial y} dx dy = - \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_k} p_{k,k+1} dx. \quad (14)$$

利用式(12)~(14)可求得 Δt 时间后, 新的能量 $\tilde{E}$, 网格中心的速度 $\tilde{u}, \tilde{v}$. 为了计算出网格中心新的密度值, 必须知道 Δt 时间后网格角点新的位置, 但网格角点的新速度并不知道. 对一维问题可以用 Riemann 解得出网格点上的速度; 对二维问题只能得出网格边上速度, 无法确定网格角点的速度. 为解决该问题, 我们借用格点型格式的思想, 通过计算格式直接计算出网格角点的速度. 控制体 Ω_i' 的选择和计算方法如下.

构造网格角点 O 处速度的控制体为图 1 中虚线所围. 通过类似文[2]中动量方程的离散, 可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho u \rangle_{\Omega_i'} = \frac{1}{|\Omega_i'|} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_i'} \rho u dx dy = - \frac{1}{|\Omega_i'|} \int_{\Omega_i'} \frac{\partial p}{\partial x} dx dy = - \frac{1}{|\Omega_i'|} \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} p dy, \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho v \rangle_{\Omega_i'} = \frac{1}{|\Omega_i'|} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_i'} \rho v dx dy = - \frac{1}{|\Omega_i'|} \int_{\Omega_i'} \frac{\partial p}{\partial y} dx dy = - \frac{1}{|\Omega_i'|} \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} p dx, \quad (16)$$