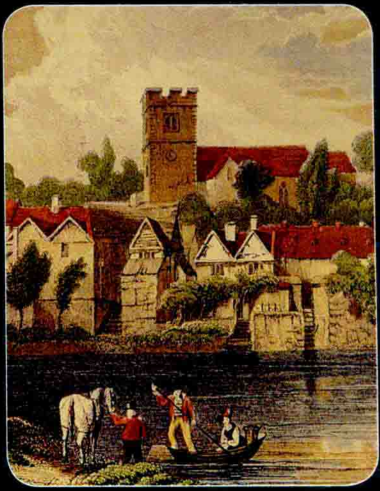
现代数值计算习题指导（第2版）

Solutions to Advanced Numerical Computing
(2nd Edition)

同济大学计算数学教研室 编著

- 覆盖教材章节内容，深入剖析原理方法
- 附带完整解答程序，提供自测模拟考卷
- 题型广泛内容丰富，启发思维增强实践



名家系列

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

现代数值计算习题指导（第2版）

Solutions to Advanced Numerical Computing
(2nd Edition)

同济大学计算数学教研室 编著

名家系列

人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

现代数值计算习题指导 / 同济大学计算数学教研室编著. -- 2版. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2014.9
ISBN 978-7-115-36003-8

Ⅰ. ①现… Ⅱ. ①同… Ⅲ. ①数值计算－高等学校－题解 Ⅳ. ①O241-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第152989号

内 容 提 要

本书为《现代数值计算（第 2 版）》（ISBN 978-7-115-35993-3）的配套教材，是同济大学计算数学教研室老师集体智慧的结晶，全书内容包括主教材中习题的全部解答，同时给出了详细的求解过程；对于实验题，还给出了完整的 MATLAB 程序；最后提供了模拟试卷，并给出了参考答案.

本书适合作为本科生和工科研究生数值计算配套用书，也适合相关教学人员参考.

◆ 编　　著　同济大学计算数学教研室
　责任编辑　武恩玉
　责任印制　彭志环　焦志炜
◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
　邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷
◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：7.5　　2014 年 9 月第 2 版
　字数：181 千字　　2014 年 9 月河北第 1 次印刷

定价：22.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京崇工商广字第 0021 号

前　　言

数值计算是一门非常实用的课程, 完成足够的习题是学习和加深理解课程内容的一个重要环节. 本书是该课程教材《现代数值计算 (第 2 版)》的配套习题解答, 旨在为各位读者提供参考答案, 同时, 本书也是教材中例子的重要补充.

本书给出了主教材中所附习题以及数值实验题的解答, 部分习题给出了多种参考答案. 数值计算的习题除了指定必须用某方法解答的情形外, 大部分题目可能存在多种求解或计算方式, 读者不必拘泥于本解答所给出的解法. 数值实验题的解答程序是按照本书的方法给出的, 由于计算效率等问题, 并不保证该程序在一个真正的实际课题中能够使用, 读者可以参考数值计算更高级的教程. 本书中的名词和符号与主教材《现代数值计算 (第 2 版)》尽量做到一致. 参考答案中的题目编号和教材习题中的习题标号一致.

本书同时附有同济大学数值计算课程考卷若干份, 可以作为读者检测自己学习程度的一个参考, 同时提供这些考卷的简要答案.

本书主要由陈雄达编写, 王琤、陈素琴、殷俊锋、徐承龙提供了部分题目的解答以及全书的一些修改意见. 同济大学数学系的尹亮和齐亚超参与了本习题解答第 1 版的排版工作.

本书的编写得到了同济大学数学系数值计算课程其他老师的关心和指导, 以及人民邮电出版社的关心和支持, 谨在此一并致谢!

由于编者水平有限, 书中若有不妥和错误之处, 恳请广大读者批评指正.

作　者

2014 年 2 月

目 录

第 1 章　科学计算与 MATLAB

§1.1　习　题　一

1. 已知近似数 x^* 的相对误差限为 0.05%, 问它至少有几位有效数字?

解: 设 x^* 的真值为 x, 根据相对误差限的定义, 有

$$\frac{|x-x^*|}{|x|} \leqslant 0.05\% = \frac{1}{2}\times 10^{-3}.$$

若 $x = a\times 10^p$, p 是整数, $1\leqslant |a| < 10$, 则

$$|x-x^*| \leqslant \frac{1}{2}|a|\times 10^{p-3} \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{p-2}.$$

因此容易知道近似数 x^* 至少有 3 位有效数字.

2. 说明当 N 足够大时, 应该如何计算 $\int_N^{N+1}\dfrac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解: 由于

$$\int_N^{N+1}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \arctan(N+1)-\arctan(N),$$

当 N 足够大时, $\arctan(N+1)$ 和 $\arctan(N)$ 过于接近, 两数相减误差太大, 特别当差别小于机器精度时相减为零. 因此我们可以如下改变计算方式: 因为

$$\tan(\arctan(N+1)-\arctan(N)) = \frac{N+1-N}{1+(N+1)\cdot N} = \frac{1}{1+N+N^2},$$

于是可以用

$$\int_N^{N+1}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \arctan\frac{1}{1+N+N^2}$$

来计算.

3. 已知 $\sin 1^\circ = 0.017\,5$, 求 $1-\cos 2^\circ$.

解: 由于

$$1-\cos 2^\circ = 2\sin^2 1^\circ,$$

通过查四位数学用表知 $\sin 1^\circ = 0.017\,5$, 所以可以算得 $1-\cos 2^\circ \approx 0.000\,609\,1$.

4. 假如你有一个四位数的平方根表, 如何计算方程 $x^2+100x-1=0$ 的两个根?

解: 方程的两个根为

$$x_{1,2} = \frac{-100\pm\sqrt{100^2+4}}{2} = -50\pm\sqrt{50^2+1}.$$

则计算 x_1 会出现两个相近数相减的情形, 但由韦达定理 $x_1x_2=-1$. 所以,

$$x_2 = -50-\sqrt{2501} = -100.01,\quad x_1 = -\frac{1}{x_2} = 0.009\,999.$$

§1.2 数值实验一

1. 给出简单的程序完成下列各小题：(1) 给出正整数 n 的十进制位数；(2) 给出正整数 n 的百位数；(3) 给出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小元素；(4) 判断一个向量是否所有元素相同.

解：用 MATLAB 的取整函数 `floor` 和最小值函数 `min` 即可. 其中 `A(:)` 表示将矩阵 `A` 的所有元素排成一列. 各小题命令如下：

```
(1) >> floor( log10(n) ) + 1
(2) >> mod( floor(n/100),10 )
(3) >> min( A(:)  )
(4) >> all( a==a(1) )
```

2. 用向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 代表映射 $f: i \to a_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是整数 1 到 n 的重排, 称此映射为置换. 输入代表置换的向量 $\boldsymbol{a}$, 给出其逆置换.

解：设向量 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 表示映射 f 的逆映射 $g: j \to b_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 由于 f 与 g 的复合映射是恒等映射, 因此可以编写如下简单函数 `test12` 求逆映射 g.

```
function b = test12(a)
   n = length(a);
   for i = 1:n,
       b(a(i)) = i;
   end
```

$\boldsymbol{b}$ 即表示置换 $\boldsymbol{a}$ 的逆置换. 事实上, 可以有以下更简单的方式：

```
>> b(a) = 1:length(a);
```

3. 利用 $\frac{\pi}{6} = \arctan\frac{\sqrt{3}}{3}$, 以及 $\arctan x$ 的泰勒展开, 计算圆周率的近似值.

解：$\arctan x$ 有以下的泰勒展开

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}.$$

编程如下：

```
function v = test13(ep)
   format long g;
   x = 1/sqrt(3);
   t = x;
   s = x;
   n = 1;
   while abs( 6*t/n ) > ep,
       n = n + 2;
       t = - t * x^2;
       s = s + t / n;
   end
   v = 6*s;
```

其中, ep 是计算精度. 若精度为 10 位小数时, 可做以下调用:

```
>> v = test13(1e-10)
v =
          3.1415926535714
```

4. 计算欧拉常数 $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$, 精确到 10 位小数.

解: 通过求级数

$$S(n) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

的前后两项差

$$|S(n-1)-S(n)| = \left|\ln\frac{n}{n-1}-\frac{1}{n}\right| \leqslant 10^{-11},$$

以其为终止条件来确定 n 的大小, 保证算得的欧拉常数有 10 位精确小数. 程序如下:

```
>> n = 2;
   gamma = 1 + 1/2;
   while abs( log(n/(n-1))-1/n ) > 1e-11,
       n     = n + 1;
       gamma = gamma + 1/n;
   end
   gamma = gamma - log(n)
```

算得的欧拉常数结果为: $\gamma = 0.577\,217\,900\,955\,967$.

5. 画出下面函数的图像:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| \leqslant 1, \\ (x-2)^2, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ (x+2)^2, & -2 \leqslant x \leqslant -1, \\ 0, & |x| \geqslant 2. \end{cases}$$

解: 先写好如下的 $f(x)$ 的函数文件, 保存为 f.m,

```
function y = f(x)
   if abs(x) <= 1,
       y = 2 - x^2;
   elseif abs(x) <= 2,
       y = ( abs(x)-2 )^2;
   else
       y = 0;
   end
```

然后输入如下命令:

```
>> x = linspace(-4,4,200);
   for i=1:length(x),
       y(i) = f(x(i));
   end
   plot(x,y);
```

得到的 $f(x)$ 图像如图 1-1 所示.

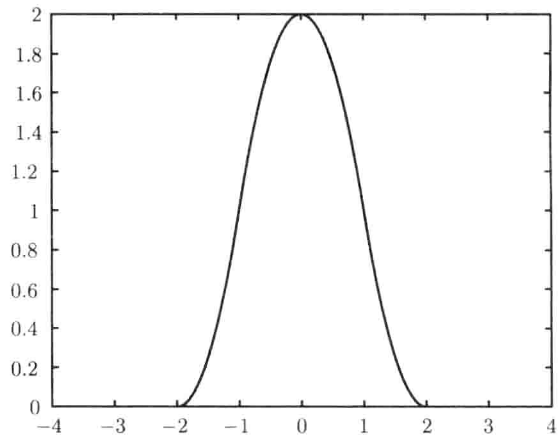


图 1-1

6. 输入一个方阵方阵 $\boldsymbol{A}$, 对 $\boldsymbol{A}$ 做行列相同的调换, 使得 $\boldsymbol{A}$ 的对角元按绝对值从大到小的顺序排列.

解: 我们可以用以下的方式实现,

```
>> [u,v] = sort(-abs(diag(A)));
   A     = A(v,v);
```

其中 $\boldsymbol{A}$ 是给定的方阵. sort 函数返回一个向量的从小到大的排序及其排完序后的分量在原向量中的位置. 我们只需要这个位置就可以对 $\boldsymbol{A}$ 进行重新排序. 第二行的写法是 MATLAB 特有的, 这种写法意味着我们可以随意但有规律地调用 $\boldsymbol{A}$ 的行列生成新的矩阵. 当然, 我们也可以用简单排序法进行以下操作 (虽然并不推荐大家这么用).

```
n = size(A,1);
for  i = 1:n-1,
    for  j = i+1:n,
        if  abs(A(i,i)) < abs(A(j,j)),
            A(:,[i,j]) = A(:,[j,i]);
            A([i,j],:) = A([j,i],:);
        end
    end
end
```

其中, $\boldsymbol{A}$ 矩阵的行列交换仍旧是与其他计算机语言不同的: 这里我们不需要临时变量.

7. 计算一元多项式 $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 有以下的 Horner 方法:

$$\begin{cases} u_n = a_n, \\ u_k = u_{k+1}x + a_k, \quad k = n-1, \cdots, 1, 0, \\ p(x) = u_0. \end{cases}$$

试用 MATLAB 实现该方法.

解: 用 Horner 方法计算多项式的值能减少其计算量. MATLAB 程序如下:

```
function y = test17(a,x)
  y = a(end);
  for i = length(a)-1:-1:1,
      y = y*x + a(i);
  end
```

其中向量 $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 是表示多项式 $p(x)$ 的系数向量, `length` 是求向量长度的函数. 运行函数 `test17(a,x)` 即可算得多项式的值 y.

8. 在一个图形窗口中画出下面几个函数的图像: $f_1(x)=1$, $f_2(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $f_3(x)=\dfrac{\sin x}{e^x+1}$.

解: 用 `hold on` 命令依次画出 3 个函数的图像即可. 命令如下:

```
>> hold on;
  x = linspace(-10,10,200);
  plot(x,ones(length(x)),'g-');
  plot(x,1./(x.^2+1),'r:');
  plot(x,sin(x)./(exp(x)+1),'b-.');
```

可以以下操作, 在一条画图命令中画出所有曲线:

```
>> x  = linspace(-10,10,200);
  f1 = ones(length(x));
  f2 = 1./(x.^2+1);
  f3 = sin(x)./(exp(x)+1);
  plot(x,f1,'g-',x,f2,'r:',x,f3,'b-.');
```

得到的图像如图 1-2 所示.

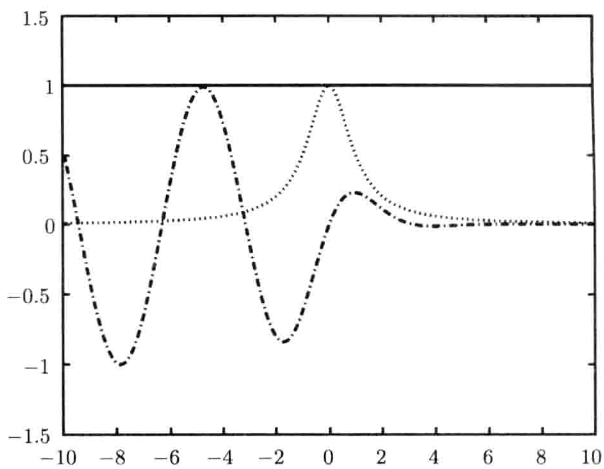


图 1-2

9. 一个向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的欧几里得范数定义为

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

试写一程序计算欧几里得范数, 并说明如何避免上溢和有害的下溢.

解: 我们注意到, 范数可以递归调用如下

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}\right)^2 + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

或按照 MATLAB 记号

$$\|\boldsymbol{x}\| = \big\|\big(\|\boldsymbol{x}(1:n-1)\|, \boldsymbol{x}(n)\big)\big\|,$$

所以只需要讨论两个分量的向量求范数的问题. 对于 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, 可以先做规范化, 即除以一个常数使按模最大分量为 1. 不妨设为 x_1, 我们可以求 $\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right)$ 的范数再乘以 $|x_1|$. (如果该向量非零, 则 x_1 非零.) 递归调用, 并写成以下程序:

```
function  s = nrmv(x)
   x = abs(x(x~=0));
   n = length(x);
   if  n==0,
       s = 0;
   elseif  n==1,
       s = abs(x);
   else
       scale = 0;
       ssq   = 1;
       for j = 1:n,
           if (scale<x(j)),
               ssq = 1 + ssq * (scale/x(j))^2;
               scale = x(j);
           else
               ssq = ssq + (x(j)/scale)^2;
           end
       end
       s = scale * sqrt(ssq);
   end
```

事实上, 这个程序是由 BLAS 包中的 dnrm2 程序改写的, 该程序所用方法也是 MATLAB 求范数的程序的方法. 关于 BLAS 软件包或者 dnrm2 程序的更深入的介绍, 可以查阅以下网页 http://www.netlib.org/blas/dnrm2.f.

第 2 章　线性方程组的直接解法

§2.1　习　题　二

1. 用高斯消去法求解下述线性方程组:

$$\begin{cases} 16x_1 - 12x_2 + 2x_3 + \ \ 4x_4 = 17 \\ 12x_1 - \ \ 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 36 \\ \ \ 3x_1 - 13x_2 + 9x_3 + 23x_4 = -49 \\ -6x_1 + 14x_2 + \ \ x_3 - 28x_4 = -54 \end{cases}$$

解: 第 1 行分别乘以 $m_{21} = -\dfrac{3}{4}$, $m_{31} = -\dfrac{3}{16}$, $m_{41} = \dfrac{3}{8}$ 加到第 2, 3, 4 行上有

$$\begin{cases} 16x_1 - 12x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 17 \\ x_2 + 4.5x_3 + 7x_4 = 23.25 \\ -10.75x_2 + 8.625x_3 + 22.25x_4 = -52.187\,5 \\ 9.5x_2 + 1.75x_3 - 26.5x_4 = -47.625 \end{cases}$$

第 2 行分别乘以 $m_{32} = 10.75$, $m_{42} = -9.5$ 加到第 3, 4 行上有

$$\begin{cases} 16x_1 - 12x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 17 \\ x_2 + 4.5x_3 + 7x_4 = 23.25 \\ 57x_3 + 97.5x_4 = 197.75 \\ -41x_3 - 93x_4 = -268.5 \end{cases}$$

第 3 行乘以 $m_{43} = 41/57 \approx 0.719\,3$ 加到第 4 行上有

$$\begin{cases} 16x_1 - 12x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 17 \\ x_2 + 4.5x_3 + 7x_4 = 23.25 \\ 57x_3 + 97.5x_4 = 197.75 \\ -22.868\,4x_4 = -126.258\,8 \end{cases}$$

回代求得解为 $x_4 = 5.521\,1$, $x_3 = -5.974\,7$, $x_2 = 11.488\,4$, $x_1 = 9.045\,4$.

2. 用列主元素高斯消去法求解下述线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + 13x_2 - 2x_3 - 34x_4 = 13 \\ 2x_1 + \ \ 6x_2 - 7x_3 - 10x_4 = -22 \\ -10x_1 - \ \ x_2 + 5x_3 + \ \ 9x_4 = 14 \\ -3x_1 - \ \ 5x_2 \qquad + 15x_4 = -36 \end{cases}$$

解: 列主元素高斯消去过程如下. 首先第 1 列上主元为 -10, 对调第 1 行和第 3 行, 并

消去第 1 列其他元素, 有

$$\begin{cases}-10x_1-x_2+5x_3+9x_4=14\\ +5.8x_2-6x_3-8.2x_4=-19.2\\ +12.9x_2-1.5x_3-33.1x_4=14.4\\ -4.7x_2-1.5x_3+12.3x_4=-40.2\end{cases}$$

第 2 列主元在第 3 行, 对调第 2 行和第 3 行, 并消去第 2 列上的元素有

$$\begin{cases}-10x_1-x_2+5x_3+9x_4=14\\ 12.9x_2-1.5x_3-33.1x_4=14.4\\ -5.325\,6x_3+6.682\,2x_4=-25.674\,4\\ -2.046\,5x_3+0.240\,3x_4=-34.953\,5\end{cases}$$

第 3 列主元在第 3 行, 不用调换行, 直接消去有

$$\begin{cases}-10x_1-x_2+5x_3+9x_4=14\\ 12.9x_2-1.5x_3-33.1x_4=14.4\\ -5.325\,6x_3+6.682\,2x_4=-25.674\,4\\ -2.327\,5x_4=-25.087\,3\end{cases}$$

代回求解, 最后可得解向量为 $\boldsymbol{x}=(14.382\,7, 30.906\,2, 18.345\,2, 10.778\,6)^{\mathrm{T}}$.

3. 用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的杜利脱尔三角分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$, 求解方程组:

$$\begin{pmatrix}15&7&0&10\\6&18&15&9\\0&10&28&7\\5&0&6&35\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\\4\\+2\end{pmatrix}$$

解: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$, 按照 LU 分解算法可得

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}1&&&\\0.4&1&&\\0&0.657\,9&1&\\0.333\,3&-0.153\,5&0.457\,9&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}15&7&0&10\\&15.2&15&5\\&&18.131\,6&3.710\,5\\&&&30.735\,1\end{pmatrix}.$$

求解 $\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}$ 为右端项, 可得 $\boldsymbol{y}=(8, 2.8, 2.157\,9, -1.225\,0)^{\mathrm{T}}$. 求解 $\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}$, 最后可得解向量: $\boldsymbol{x}=(0.526\,4, 0.071\,8, 0.127\,2, -0.039\,9)^{\mathrm{T}}$.

4. 用乔列斯基分解计算下述线性方程组:

$$\begin{pmatrix}4&-1&&\\-1&4&-1&\\&-1&4&-1\\&&-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\11\\-7\end{pmatrix}$$

解: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}$, 利用乔列斯基分解算法可得

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}2&&&\\-0.5&1.936\,5&&\\&-0.516\,4&1.932\,2&\\&&-0.517\,5&1.931\,9\end{pmatrix}.$$

做两个回代计算：$\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$, 最后可得

$$\boldsymbol{y}=(1.000\,0, 2.323\,8, 6.314\,7, -1.931\,9)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{x}=(1.000\,0, 2.000\,0, 3.000\,0, -1.000\,0)^{\mathrm{T}}.$$

5. 用乔列斯基分解计算下述线性方程组：

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & -1 & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 16 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

解：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}$, 利用乔列斯基分解算法可得

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ -0.5 & 1.936\,5 & & & \\ & -0.516\,4 & 1.932\,2 & & \\ & & -0.517\,5 & 1.931\,9 & \\ & & & -0.517\,6 & 1.931\,9 \end{pmatrix}.$$

做两个回代计算：$\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$, 最后可得

$$\boldsymbol{y}=(2.500\,0, 4.776\,7, 9.557\,4, 14.983\,6, 22.649\,7)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{x}=(2.391\,0, 4.564\,1, 7.865\,4, 10.897\,4, 11.724\,4)^{\mathrm{T}}.$$

6. 用追赶法求解下述线性方程组

$$\begin{pmatrix} 12 & 1 & & & \\ 1 & 12 & 1 & & \\ & 1 & 12 & 1 & \\ & & 1 & 12 & 1 \\ & & & 1 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

解：按照追赶法算法 2.2.9, 设

$$\begin{pmatrix} 12 & 1 & & & \\ 1 & 12 & 1 & & \\ & 1 & 12 & 1 & \\ & & 1 & 12 & 1 \\ & & & 1 & 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_1 & & & & \\ 1 & l_2 & & & \\ & 1 & l_3 & & \\ & & 1 & l_4 & \\ & & & 1 & l_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u_1 & & & \\ & 1 & u_2 & & \\ & & 1 & u_3 & \\ & & & 1 & u_4 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{LU},$$

且 $\boldsymbol{d}=(11,10,10,10,11)^{\mathrm{T}}$. 记 $\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{d}$ 的解, 则原方程 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}$ 的解.

追的过程为：

$$\begin{aligned}
&l_1=b_1=12, && y_1=d_1/l_1=0.916\,7, && u_1=c_1/l_1=0.083\,3,\\
&l_2=b_2-a_2u_1=11.916\,7, && y_2=(d_2-a_2y_1)/l_2=0.762\,2, && u_2=c_2/l_2=0.083\,9,\\
&l_3=b_3-a_3u_2=11.916\,1, && y_3=(d_3-a_3y_2)/l_3=0.775\,2, && u_3=c_3/l_3=0.083\,9,\\
&l_4=b_4-a_4u_3=11.916\,1, && y_4=(d_4-a_4y_3)/l_4=0.774\,1, && u_4=c_4/l_4=0.083\,9,\\
&l_5=b_5-a_5u_4=11.916\,1, && y_5=(d_5-a_5y_4)/l_5=0.858\,2, &&
\end{aligned}$$

赶的过程为：

$$\begin{aligned} x_5 &= y_5 = 0.858\,2, \\ x_4 &= y_4 - u_4 x_5 = 0.702\,1, \\ x_3 &= y_3 - u_3 x_4 = 0.716\,3, \\ x_2 &= y_2 - u_2 x_3 = 0.702\,1, \\ x_1 &= y_1 - u_1 x_2 = 0.858\,2, \end{aligned}$$

最后可得解向量为 $\boldsymbol{x} = (0.858\,2, 0.702\,1, 0.716\,3, 0.702\,1, 0.858\,2)^{\mathrm{T}}$.

7. 给出计算对称正定的三对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乔列斯基分解的计算格式, 其中

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & & \\ & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

解: 乔列斯基分解为: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是三对角矩阵, 利用矩阵的乘法规则, 可得 $\boldsymbol{L}$ 是下述只有两条对角线的下三角矩阵:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \theta_1 & & & & \\ \gamma_1 & \theta_2 & & & \\ & \gamma_2 & \theta_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \gamma_{n-1} & \theta_n \end{pmatrix}.$$

按照矩阵的乘法规则, 可得

$$\begin{aligned} &\theta_1 = \sqrt{\alpha_1}, \\ &\gamma_1 = \beta_1/\theta_1, \qquad \theta_2 = \sqrt{\alpha_2 - \gamma_1^2}, \\ &\gamma_2 = \beta_2/\theta_2, \qquad \theta_3 = \sqrt{\alpha_3 - \gamma_2^2}, \\ &\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\gamma_{n-1} = \beta_{n-1}/\theta_{n-1}, \quad \theta_n = \sqrt{\alpha_n - \gamma_{n-1}^2}. \end{aligned}$$

因此算法可写成

Step 1. $\theta_1 = \sqrt{\alpha_1}$;

Step 2. 对 $i = 1, 2, \cdots, n-1$ 计算

$$\begin{cases} \gamma_i = \beta_i/\theta_i, \\ \theta_{i+1} = \sqrt{\alpha_{i+1} - \gamma_i^2}. \end{cases}$$

8. 求分块矩阵

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

的一个分块三角分解, 其中

$$A=\begin{pmatrix}6&2\\3&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&1\\0&6\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}9&5\\7&4\end{pmatrix}.$$

解: 令

$$\mathcal{A}=\mathcal{L}\mathcal{U}=\begin{pmatrix}I&O\\E&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\O&S\end{pmatrix}.$$

我们有

$$A^{-1}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}5&-2\\-3&6\end{pmatrix},$$

所以

$$E=CA^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&-2\\-3&6\end{pmatrix},$$

$$S=D-CA^{-1}B=\begin{pmatrix}9&5\\7&4\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&-2\\-3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&6\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}39&37\\51&-9\end{pmatrix}.$$

9. 描述用 Givens 变换把上海森伯格 (Hessenberg) 型矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&&a_{2n}\\&a_{32}&&&a_{3n}\\&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{pmatrix}$$

化为上三角矩阵的计算过程.

解: 仿照教材中的例 2.3.2, 我们有以下的算法:

对 $i=1,2,\cdots,n-1$, 实行操作

$$\cos\theta=\frac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2+a_{i+1,i}^2}},$$
$$\sin\theta=\frac{a_{i+1,i}}{\sqrt{a_{ii}^2+a_{i+1,i}^2}},$$
$$A=G(i,i+1,\theta)A.$$

注意到, 第三步的操作实际上只有矩阵 A 的第 i 行和第 $i+1$ 行需要计算.

10. 已知 $x=(4,2,5,-2)^{\mathrm{T}}$, 求 Householder 矩阵 P, 使得 $Px=-7e_1$, 其中 $\|x\|_2=7$.

解: 因为

$$u=x+\mathrm{sgn}(x_1)\|x\|_2e_1=(4,2,5,-2)^{\mathrm{T}}+7(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}=(11,2,5,-2)^{\mathrm{T}},$$

所以

$$P=I-2\frac{uu^{\mathrm{T}}}{\|u\|^2}=I-\frac{2}{154}\begin{pmatrix}121&22&55&-22\\22&4&10&-4\\55&10&25&-10\\-22&-4&-10&4\end{pmatrix}.$$

这样,

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - 2\frac{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \times \frac{77}{154}\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = -7\boldsymbol{e}_1.$$

11. 用 Householder 变换做以下矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 QR 分解

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

解: 记矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$. 因为

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \mathrm{sgn}(\boldsymbol{a}_{11})\|\boldsymbol{a}_1\|\boldsymbol{e}_1 = (3,4,0)^{\mathrm{T}} + 5(1,0,0)^{\mathrm{T}} = (8,4,0)^{\mathrm{T}},$$

所以

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{I} - 2\frac{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}}{\|u_1\|^2} = \boldsymbol{I} - \frac{2}{80}\begin{pmatrix} 64 & 32 & 0 \\ 32 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

我们有

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -5 & 4/5 & -11/5 \\ 0 & 22/5 & 2/5 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

记 $\bar{\boldsymbol{a}}_2 = (22/5, 4)^{\mathrm{T}}$, 因为

$$\bar{\boldsymbol{u}}_2 = \bar{\boldsymbol{a}}_2 + \mathrm{sgn}((\bar{\boldsymbol{a}}_2)_1)\|\bar{\boldsymbol{a}}_2\|\bar{e}_1 = (22/5, 4)^{\mathrm{T}} + \frac{2}{5}\sqrt{221}(1,0)^{\mathrm{T}} = (10.346\,4, 4)^{\mathrm{T}},$$

所以

$$\bar{\boldsymbol{P}}_2 = \boldsymbol{I}_2 - 2\frac{\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2} = \begin{pmatrix} -0.739\,9 & -0.672\,7 \\ -0.672\,7 & 0.739\,9 \end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \bar{\boldsymbol{P}}_2 \end{pmatrix}$, 我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.739\,9 & -0.672\,7 \\ 0 & -0.672\,7 & 0.739\,9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 4/5 & -11/5 \\ 0 & 22/5 & 2/5 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 0.8 & -2.2 \\ 0 & -5.946\,4 & 1.722\,0 \\ 0 & 0 & -2.488\,9 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$