

能量泛函正则化模型 在图像恢复中的应用

李旭超◎著



电子工业出版社·

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

能量泛函正则化模型在图像 恢复中的应用

李旭超 著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书讲述能量泛函正则化模型在图像恢复中的应用, 主要内容包括图像恢复基本原理, 能量泛函变分原理, 有界变差函数原理, 凸分析基本原理, 能量泛函解的存在性、唯一性和稳定性基本原理, 结构化牛顿算法在图像恢复正则化模型中的应用, Primal-Dual 原理及其在图像恢复中的应用。

本书可作为图像处理、计算机科学与技术、电子科学与通信、自动化、生物信息工程和应用数学等专业高年级本科生、研究生的教材和参考书, 也可作为相关领域教师、科研人员、医学工作者和工程技术人员等的参考书。

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有, 侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

能量泛函正则化模型在图像恢复中的应用 / 李旭超著. —北京: 电子工业出版社, 2014.8
ISBN 978-7-121-23986-1

I. ①能… II. ①李… III. ①泛函数—应用—图象恢复—研究 IV. ①TN911.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 179538 号

策划编辑: 徐蔷薇

责任编辑: 张 京

印 刷: 三河市鑫金马印装有限公司

装 订: 三河市鑫金马印装有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 720×1 000 1/16 印张: 12.5 字数: 206 千字

版 次: 2014 年 8 月第 1 版

印 次: 2014 年 8 月第 1 次印刷

定 价: 39.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

前 言

正则化模型是在 20 世纪 70 年代由苏联科学院 Tikhonov 院士提出的，该技术能将不适定问题转化为适定问题，获得反问题的稳定解。近年来，在巨大的市场需求推动下，正则化技术在理论研究和工程技术应用领域取得了飞速发展。

随着空间技术及太空可视化技术的发展，采集未知环境图像来推断目标的属性，获得清晰图像是世界各国关注的研究课题。然而由于成像环境未知，以及采集过程的随机性，获得的图像质量比较差，同时图像恢复本身是不适定的，造成无法获得理想的图像，使得图像应用受到限制。如何建立有效的图像恢复模型，利用计算机对获得的图像进行处理，准确判断目标的形状、位置和属性，提高图像的峰值信噪比，获得理想图像，是值得研究的课题。例如，图像处理技术在无人轰炸机、制导、反导系统及微生物病理分析等领域得到了广泛应用，促使人们对图像复原技术展开研究。

本书在参考大量中外论文和学术专著的基础上（其中包括泛函分析、测度论、调和分析、凸分析、偏微分方程、框架理论及其在图像处理中的应用等研究成果），结合作者多年钻研编写而成。本书内容作者规划多年，然而由于该领域涉及的理论比较复杂，在短时间内很难梳理出思路，同时科研和教学任务繁重，于是写写停停，2013 年公派到美国进行一年多的访学，终于静下心来，潜心研究，数次易稿，最终成书，了却了作者多年的心愿。

在本书素材的准备过程中，江苏师范大学吕中学副院长、中国科学院常谦顺教授对很多相关理论问题进行了分析和讲解，使作者受益匪浅，在此表示衷心的感谢。本书在写作过程中，得到王莹章处长的大力支持，同时得到孙正红书记的

鼓励,以及施帮华副院长提供的打印条件,在此表示感谢。在2013年接受斯坦福大学 Charles K. Chui 教授的热情邀请,对美国进行为期一年多的访问学习期间,密苏里大学 Wenjie He 教授、华盛顿大学 Carl Bender 教授和 Luthy 教授等提出了许多指导与帮助,在此表示诚挚的谢意。

全书共分9章,第1章对图像恢复正则化技术进行理论分析,给出通用正则化模型,介绍正则化模型的国内外发展趋势;第2章介绍图像恢复用到的数学基础知识;第3章介绍变分基本原理及其在能量泛函正则化模型中的应用;第4章介绍图像恢复基本原理及正则化模型在图像恢复中的应用;第5章介绍有界变差函数基本原理及其在图像恢复中的应用;第6章介绍凸分析基本原理及其在图像恢复中的应用;第7章介绍能量泛函正则化模型解的存在性、唯一性和稳定性条件;第8章介绍结构化牛顿算法在图像恢复正则化模型中的应用;第9章介绍 Primal-Dual 原理及其在图像恢复正则化模型中的应用。

本书在编写过程中,陈唤、陈武给出本书部分公式的推导,硕士生付长亮将作者用 Mathtype 排版的公式改为用 Word 排版,同时出版社的编辑为本书出版付出了辛勤劳动,作者在此表示衷心的感谢。本书参考国内外许多专家和研究人员的研究成果,引用其中观点、数据与结论,在此表示诚挚的谢意。

由于作者水平有限,加之时间紧迫,书中不妥与疏漏之处在所难免,敬请各位专家、学者和读者批评指正。

李旭超

2014年8月于江苏师范大学

目 录

第 1 章 图像恢复能量泛函正则化模型分析	1
1.1 不适定问题的起源及例子	1
1.2 图像恢复不适定问题及实例仿真	4
1.3 能量泛函正则化模型建模方法及发展阶段	6
1.4 不同函数空间图像恢复正则化模型分析	7
1.5 图像分解模型能量泛函正则化模型分析	14
1.6 紧框架域能量泛函正则化模型分析	17
1.7 图像恢复正则化模型存在的问题及发展趋势	18
1.8 正则化模型权重确定方法分析与仿真	19
1.9 正则化模型求解方法与仿真	26
本章小结	31
参考文献	31
第 2 章 图像处理中的数学基础	39
2.1 连续的各种定义	39
2.2 泛函分析基础	42
2.3 测度论基础	47
2.4 索伯列夫函数空间基础	52
本章小结	56
参考文献	57
第 3 章 变分原理在能量泛函正则化模型中的应用	59
3.1 梯度算子与散度算子	59

3.2 图像恢复正则化模型变分原理·····	61
3.3 变分原理在图像恢复正则化模型中的应用·····	64
3.4 应用变分原理于能量泛函获得欧拉-拉格朗日方程组·····	70
本章小结·····	72
参考文献·····	72
第4章 变分能量泛函图像恢复原理·····	75
4.1 图像整体坐标与局部坐标的关系·····	75
4.2 正则项各向同性与各向异性扩散原理分析·····	77
4.3 图像恢复正则化模型扩散原理实例分析·····	80
4.4 扩散原理在图像恢复中的应用·····	84
本章小结·····	89
参考文献·····	90
第5章 有界变差函数在图像恢复正则化模型中的应用·····	91
5.1 一维有界变差函数及其性质·····	91
5.2 高维有界变差函数及其性质·····	93
5.3 有界变差函数等价于 Radon 测度及其 Lebesgue 分解·····	98
5.4 有界变差函数在图像恢复中的应用·····	101
本章小结·····	112
参考文献·····	113
第6章 凸分析在图像恢复正则化模型中的应用·····	115
6.1 凸分析的概念及其性质·····	115
6.2 凸函数的共轭变换·····	118
6.3 凸能量泛函松弛逼近问题·····	123
6.4 能量泛函在图像恢复中的应用·····	124
本章小结·····	127

参考文献	128
第 7 章 图像恢复能量泛函模型解的适定性	129
7.1 能量泛函解的存在性判定方法	130
7.2 能量泛函解的唯一性判断方法	132
7.3 能量泛函解的稳定性判断方法	132
本章小结	134
参考文献	134
第 8 章 结构化牛顿算法在图像恢复正则化模型中的应用	137
8.1 图像恢复定量评价指标	137
8.2 图像边界延拓方式对图像恢复的影响	138
8.3 问题的引出	142
8.4 图像恢复能量泛函正则化模型	145
8.5 能量泛函正则化模型求解算法	146
8.6 结构化牛顿投影迭代算法及步长更新准则	149
8.7 实验结果及分析	151
本章小结	159
参考文献	160
第 9 章 Primal-Dual 算法在图像恢复正则化模型中的应用	163
9.1 原始模型求解算法基本原理	165
9.2 对偶模型求解算法的基本原理	167
9.3 原始-对偶模型求解算法基本原理	176
9.4 Primal-Dual 算法在图像恢复中的应用	177
本章小结	186
参考文献	187

第1章 图像恢复能量泛函正则化模型分析

1.1 不适定问题的起源及例子

近半个世纪以来，为描述各种各样的物理现象，如声音传播、热传导和电磁波等，科学家试图寻求精确或逼近函数，建立不同形式的能量泛函模型，通过对能量泛函变分获得偏微分方程，用方程的系数表示传播媒体的特性，然后给定初始状态或边界条件获得能量泛函的解。然而由于精确的传播媒介特性未知或传播媒介的高度非线性特性，导致传播媒介的系数很难确定，未知的方程系数通常表示重要的媒体特性，如密度、电导率、热传导率等，无法直接获得偏微分方程的系数，进而影响能量泛函解的精度。利用已知的采样数据，确定方程的系数，进而得知未知媒介的特性，该类问题称为反问题，问题本身是不适定的，同时由于测量过程的随机性，在数据采集与传输过程中产生不稳定误差，都对方程系数的确定产生不利影响。求解逆问题有利于确定目标位置、形状、结构、缺陷、热源、波源和污染源等，具有重要的研究意义和实际应用价值^[66-70]。对于人类来说，当我们看到场景中的目标时，大脑利用以前的先验知识可以轻松地重构三维场景，并对目标进行识别与判断，但对于计算机来说，这是一个非常难的课题。

究竟什么是不适定问题呢？目前没有统一的定义形式。一般来说，如果一个问题没有预期的解，或者一个问题有许多解，或者求解过程不稳定，如测量过程

的微小误差导致最终解产生相当大的误差，或者连续信号到离散采样过程中的转换误差及测量设备的精度等，因此，不适定就是求得的解不确定。

如何描述不适定问题呢？不适定问题与适定问题之间有什么关系呢？为了解决上述疑惑，先明确适定问题，也就是直接问题，如寻求一个函数，使得该函数能准确描述给定位置和时间的物理过程。一般来说，直接问题由四个要素组成：物理过程的定义域、描述物理过程的方程、描述物理过程（非平稳的）的初始条件、物理过程的边界条件。

例 1.1 用二阶双曲型偏微分方程描述声音传播过程，表达式如下。

声音传播过程的定义域为

$$(x, t) \in \Omega_T = \Omega \times (0, T] \quad (1-1)$$

声音传播过程的偏微分方程表达式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L_t u = f(x, t) \quad (1-2)$$

式中， $L_t u = -\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, t) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u$ ， $f(x, t)$ 是波源， a_{ij} ， b_i ，

c 是波源传播过程中的媒介， $u(x, t)$ 是声波传播函数。

声音传播的初始条件为

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad (1-3)$$

物理过程的边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega \times (0, T]} = g(x, t) \quad (1-4)$$

$$u_{\Omega_T} = f(x, t) \quad (1-5)$$

式中， $\partial \Omega \times (0, T]$ 表示边界。若上述所有的初始条件已知，未知量为描述声波传播函数 $u(x, t)$ ，则此问题是适定的。但是若已知波源，确定方程系数和声波传播函数，则此问题变为不适定问题。描述自然现象和工程技术的方程有很多，主要有以下几类^[65-70]：单个线性方程中的调和方程、扩散方程、Helmholtz 方程和薛定

谓方程等；单个非线性偏微分方程中的 p -Laplacian 方程、Hamilton-Jacobi 方程、最小曲面方程和非线性泊松方程等；线性偏微分方程组有 Maxwell 方程、线性热弹性方程；非线性方程组有流体力学可压和不可压的 Navier-Stokes 方程、反应扩散方程和 Einstein 方程，以及随机偏微分方程和由能量泛函变分获得的欧拉-拉格朗日方程等。为描述偏微分方程解的适定与不适定问题之间的转换关系，以图像恢复中的常用方程为例，归结为表 1-1。

表 1-1 适定问题与不适定问题

适定问题	不适定问题
算子 A 是紧算子，矩阵的条件数较大 $Au(x) = f(x)$	紧算子 A 是不适定的，退化的，或者是长矩阵，使得解 $u(x)$ 不唯一 $u(x) = A^{-1}f(x)$
Fredholm 方程	
第二种类的 Fredholm 方程： $u(x) + \int_{\Omega} K(x,s)u(s)ds = f(x)$	第一种类的 Fredholm 方程： $\int_{\Omega} K(x,s)u(s)ds = f(x)$
椭圆偏微分方程，算子 $Lu = -\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_j})u_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c(x)u$	
椭圆偏微分方程三类边值问题： $Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega$ Dirichlet 问题： $u(x) _{\partial\Omega} = g(x)$ Neumann 问题： $\frac{\partial u}{\partial n} _{\partial\Omega} = g(x)$ Robin 问题： $\left(a\frac{\partial u}{\partial n} + bu\right) _{\partial\Omega} = g(x)$	椭圆方程 Cauchy 问题： $Lu(x) = f(x)$ 部分边界 $\Sigma_1 \subset \Sigma = \partial\Omega$ 的初始值已知，初始边界值问题： $u(x) _{\Sigma_1} = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n} _{\Sigma_1} = g(x),$ $\left(a\frac{\partial u}{\partial n} + bu\right) _{\Sigma_1} = g(x)$
抛物型偏微分方程，算子 $L_t u = -\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_j})u_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c(x)u$	
$\frac{\partial u}{\partial t} + L_t u(x,t) = f(x,t)$ Cauchy 问题： $u _{t=0} = g(x)$ 初始边界值问题： $u _{t=0} = 0, \quad u _{\partial\Omega} = g(x,t)$	逆时间 Cauchy 问题： $-\frac{\partial u}{\partial t} + L_t u(x,t) = f(x,t), \quad u _{t=0} = g(x)$ 部分初始边界值问题： $u _{\Sigma_1} = g_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} _{\Sigma_1} = g_2$
双曲型偏微分方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L_t u(x,t) = f(x,t)$	
Cauchy 问题： $u _{t=0} = \varphi(x), \quad u_t _{t=0} = \psi(x)$ 初始边界值问题： $u _{\partial\Omega} = g(x)$	Dirichlet、Neumann 问题，类似时间表面的 Cauchy 问题： $u _{\Sigma_1} = g_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} _{\Sigma_1} = g_2$

1.2 图像恢复不适定问题及实例仿真

在自然科学与工程技术领域,如宇航成像、放射显微镜成像、原子放射成像(PET)、压缩感知^[18]、生物器官分析、资源勘探等,许多问题可以表述为第一类 Fredholm 积分方程^[19],表达式为

$$f(x, y) = \int_{\Omega} k(x, y, x', y') u(x', y') dx' dy' \quad (1-6)$$

式中, Ω 是实平面的一个有界开子集, $f(x, y)$ 表示获得的采样数据,即降质的图像, $u(x', y')$ 表示原始图像, $k(x, y, x', y')$ 表示成像过程中的核函数,也称为点扩散函数,对式(1-6)进行离散化,获得的图像退化模型表达式为

$$f = Ku + \varepsilon \quad (1-7)$$

式中, ε 表示噪声, K 表示线性紧算子,该算子的条件数较大,造成无法获得式(1-7)的准确解。此外,成像设备的电路转化误差、大气扰动及测量的随机性都对式(1-7)的理想图像产生不利影响,很难获得精确图像,这就促使人们对不适定问题进行研究。图像恢复就是要尽可能地降低或消除观察图像的失真,得到理想的图像 $u(x', y')$ 。为获得理想图像,用能量泛函表示式(1-7),表达式为

$$\inf \left\{ E_0(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f - Ku|^2 d\mu \right\} \quad (1-8)$$

若式(1-8)的最小值存在,则通过变分获得欧拉-拉格朗日方程,表达式为

$$K^* f - K^* Ku = 0 \quad (1-9)$$

式中, K^* 表示 K 的伴随矩阵。因为 K 是紧线性算子,所以 $K^* K$ 不可能总是满秩矩阵,造成式(1-9)的解不唯一;即使 $K^* K$ 是满秩矩阵,若矩阵的条件数较大,也会造成数值解 u 不稳定,此问题在 Hadamard 意义下是典型的不适定问题。目前解决式(1-8)不适定问题最好的方法是 Tikhonov 正则化^[18],利用图像的附加信

息引入正则项, 使能量泛函具有唯一稳定解, 将图像处理的病态问题转化为适定性问题, 表达式为

$$E(u) = E_0(u) + \lambda \Phi(Du) \quad (1-10)$$

式中, $E_0(u)$ 是逼近项, $\Phi(Du)$ 是正则项, D 是线性微分算子, λ 是正则项参数。下面给出图像恢复中的典型不适定例子。

例 1.2 由第一类积分方程引出的不适定问题。

让 $u(x, y)$ 表示原始未知图像, 用矢量来表示, $f(x, y)$ 表示获得的退化图像, $K_{m \times n}$ 表示从原始图像到退化图像的变换矩阵, 具体形式由研究问题决定。例如, 在计算机断层扫描 (Computerized Tomography) 成像过程中, K 是离散的 Radon 变换, 矩阵每一行表示沿某一直线的积分。

由于图像是二维信号, 因此必须用二维连续的 Radon 变换对图像 $f(x, y)$ 进行变换^[71-72]。假设平面上的直线用参数方程 $x \cos \theta + y \sin \theta = t$ 来表示, 则在 (θ, t) 域将原始图像 $u(x, y)$ 沿直线投影为 $g(\theta, t)$, 此类方程的形式正好符合第一类积分方程, 表达式为

$$g(\theta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \quad (1-11)$$

式中, δ 是 Dirac delta 采样函数, 支撑在直线 $x \cos \theta + y \sin \theta = t$ 上。在二维离散情形下, $u(x, y)$ 表示离散图像矩阵, $g(\theta, t)$ 表示已知退化有限数量采样 (θ_i, t_i) 。在计算机断层扫描成像过程中, 必须从投影 $g(\theta, t)$ 恢复未知的图像 $u(x, y)$, 即给定核函数 $\delta(\theta, t)$ 和退化图像 $g(\theta, t)$, 确定真实图像 $u(x, y)$ 。

图 1-1 (a) 为 256×256 的 Modified Shepp-Logan 原始图像, 图 1-1 (b) 为经逆 Radon 变换获得的重构图像, 图 1-1 (c) 为没有滤波使用后向投影算法获得的重构图像, 图 1-2 为利用后向投影算法沿不同方向投影重构原始图像。

从图 1-1 (b) 中可以看出, 利用逆 Radon 变换可以重构理想的图像, 而没有经滤波逆 Radon 变换重构图像的质量比较差。

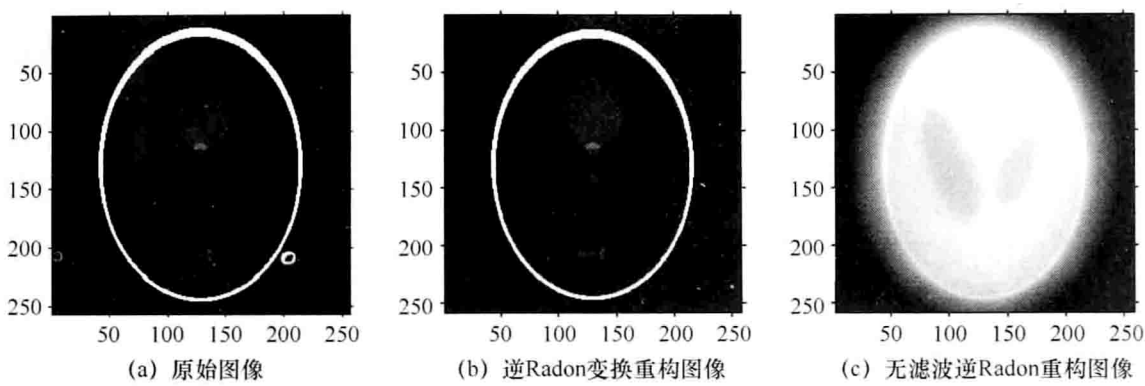


图 1-1 Modified Shepp-Logan 图像

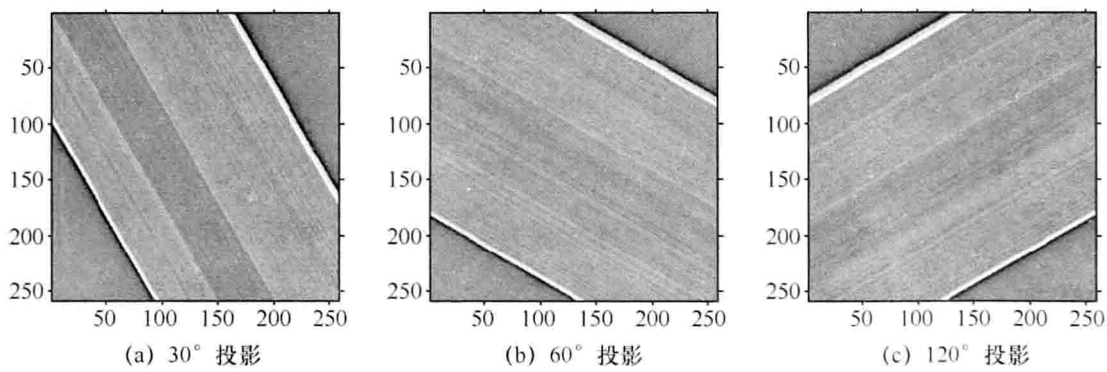


图 1-2 利用后向投影算法重构原始 Modified Shepp-Logan 图像沿不同方向的投影

1.3 能量泛函正则化模型建模方法及发展阶段

近十年来，能量泛函正则化模型在反问题处理中获得了较大的发展^[1]，逐渐成为一个十分具有吸引力的研究领域^[2]。能量泛函正则化模型处理技术经历了线性到非线性^[3]、各向同性到各向异性^[4]、常指数函数空间到变指数函数空间的发展^[5]，在图像处理^[6]、最小秩矩阵恢复^[7]、医疗成像、宇宙资源探测和计算机视觉领域得到了广泛应用^[8]。一方面，得益于能量泛函变分和变分后获得的偏微分方程（Partial Differential Equation，PDE）已成为数学分析的重要分支^[9]，理论体系和数值计算方法已经初步形成；另一方面，图像恢复正则化模型的建立得益于传

统图像处理所积累的经验。

变分能量泛函正则化模型常用的建模方法有以下几种。①将图像看成一个函数, 选择合理的函数空间、图像特征和势函数建立图像恢复正则化模型, 变分能量泛函获得 PDE 方程, 利用数值代数计算 PDE 的解^[10]。此类方法比较灵活, 难点是建立的能量泛函正则化模型能否保证解的唯一性和数值解演化的稳定性。②借鉴已有的数学物理方程建立新的能量泛函模型, 如椭圆型方程^[11]、抛物型方程^[12]和流体力学 Navier-Stokes 方程^[13]等, 它们都在图像处理中得到了成功应用。但此种方法受制于方程形式, 难点是如何使方程的物理含义与图像特征有机地结合。

能量泛函正则化模型的主要优点如下。①具有较强的局部自适应性。能量泛函模型是在连续函数空间上建立的, 图像的离散变换被视为连续的微分算子, 像素的值依赖于时间的一个无穷小邻域, 具有“无穷”的局部自适应能力, 使得非线性分析易于实现^[14]。②利用连续函数逼近数字图像, 其处理精度远超过图像的分辨率, 而小波变换的分辨率受尺度的制约^[15]。③函数空间选择的多样性^[16], 使得扩散函数的各向异性易于实现, 能有效地保护图像的边缘、纹理等特征。④建立的能量泛函具有明确的物理意义。根据所研究的问题, 恰当地选择势函数, 将图像的几何性质如梯度、曲率和水平集等与能量泛函正则化模型有机地结合在一起^[17]。⑤获得的 PDE 被离散化得到几个线性或非线性方程组, 方程的求解易于用数值代数算法实现。

按能量泛函正则化模型发展的先后顺序来说, 它经历了三个阶段: 不同函数空间正则化模型阶段、图像分解正则化模型阶段和紧框架域正则化模型阶段。

1.4 不同函数空间图像恢复正则化模型分析

将式 (1-7) 转化为通用能量泛函正则化模型, 表达式为

$$\inf \left\{ E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f - Ku|^2 d\mu + \lambda \int_{\Omega} \phi(|\nabla^m u|^p) d\mu \right\} \quad (1-12)$$

式中, $u \in W^{m,p}$, $W^{m,p}(\Omega) = \{u | u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$, 第一项是逼近项, 拟合图像的统计分布。第二项是正则项, 主要有两个作用: 一是保证图像恢复的光滑性, 消除噪声; 二是保证式 (1-12) 的解是适定的。 λ 调节正则项和逼近项的权重, ∇^m 为 m 阶弱导数 (weak derivative) 算子, 若经典意义下的导数存在, 则 ∇ 为梯度算子, $d\mu$ 为 Lebesgue 测度, $\phi(\bullet) \in C^\infty(\Omega)$ 为选取的势函数, $C^\infty(\Omega)$ 表示函数 $\phi(\bullet)$ 具有任意阶导数集合, $|\bullet|$ 表示范数。当式 (1-12) 中的 $m=1$ 时, ∇ 对应一阶弱导数, 变分式 (1-12) 获得二阶 PDE^[21]; $m=2$ 时, ∇^2 对应的是曲率, 变分获得四阶 PDE^[22]; $m>2$ 时, 对应的是高阶椭圆型或抛物型 PDE^[23]。式 (1-12) 中的 m 与 p 取不同的数值, 可获得不同函数空间能量泛函正则化模型^[24]。

1.4.1 基于经典 Sobolev 空间图像恢复正则化模型

1963 年, 数学家 Sobolev 提出了著名的索伯列夫空间 (Sobolev), 将函数的古典导数推广到意义更广的分布 (弱) 导数, 扩大了 PDE 的解空间, 极大地促进了能量泛函正则化模型的发展。

1977 年, 文献[30]最早提出在 Sobolev 空间 $W^{1,2}(\Omega)$ 中引入正则项, 将式 (1-12) 的正则项设置为 $\phi(|\nabla^m u|^p) = |\nabla u|^2$, 该能量泛函模型的解存在且唯一, 其解 $u \in W^{1,2}(\Omega)$ 就是恢复后的图像, 通过对能量泛函变分, 获得著名的非线性反应——扩散方程^[14], 表达式为

$$T^*Tu - \lambda\Delta u = T^*f \quad (1-13)$$

式中, Δ 为拉普拉斯算子, 具有各向同性, 容易造成图像的边缘模糊。为有利于保护图像的边缘、降低在边缘附近的扩散, 1990 年, 文献[31]提出一种 P-M 图像

恢复模型, 将正则项设置为 $\phi(|\nabla^m u|^p) = \phi(|\nabla u|)$, 变分获得 PDE。若选取的势函数为 $\phi(|\nabla u|) = \exp[-|\nabla u|^2/K]$, K 为大于零的常数, 在平稳区域, P-M 模型对图像进行各向同性扩散; 在边缘附近, P-M 模型具有各向异性。综合这两种情况可知, P-M 模型在滤除噪声的同时在某种程度上保护了图像的边缘。Catte 等人指出 P-M 模型是“病态的”^[32], 当 $|\nabla u| \rightarrow 0$ 时, 切线方向扩散函数 $\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \rightarrow \infty$, 微小的输入变化导致输出完全改变; 当噪声很大时, $|\nabla u|$ 振荡无界, 在实际应用中不稳定。针对 P-M 模型对噪声敏感的特点, 文献[33]将正则项设置为 $\phi(|\nabla^m u|^p) = \phi(|\nabla G_\sigma * u|)$, 通过变分得到如下模型:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left[\phi(|\nabla G_\sigma * u|) \nabla u \right] \quad (1-14)$$

式中, G_σ 是高斯核函数, $*$ 表示卷积。通过调节高斯核函数的尺度 σ , 使得模型对平稳区域与边缘具有自适应平滑能力。若尺度 σ 过小, 则模型退化为 P-M 模型。由于该模型严重地依赖图像的梯度, 容易受到噪声的影响。文献[34]对此进行改进, 将图像恢复中的非线性项变为 $|\nabla G_\sigma * u| \operatorname{div} \left[\frac{\nabla G_\sigma * u}{|\nabla G_\sigma * u|} \right]$, 但此模型对于高斯核函数的尺度 σ 选取比较敏感, 若尺度 σ 过大, 则导致图像过平滑。文献[34]提出一种自适应正则项模型, 将正则项设置为 $|\nabla u| C^{\alpha(x)}$, $\alpha(x)$ 是边缘检测函数, 随着图像区域的变化而变化, 将其应用于图像恢复, 获得了较高的峰值信噪比, 图像边缘保持比较理想。

1.4.2 基于 $BV(\Omega)$ 函数空间的图像恢复正则化模型

针对经典的 Sobolev 函数空间, 正则化模型容易导致图像平滑, 人们对描述图像的函数空间进行了研究, 其中比较有影响的是有界变差函数 $BV(\Omega)$ 。 $BV(\Omega)$ 最早是由 Camille Jordan 在研究傅里叶级数收敛时提出的, Oleinki 将其引入非线性