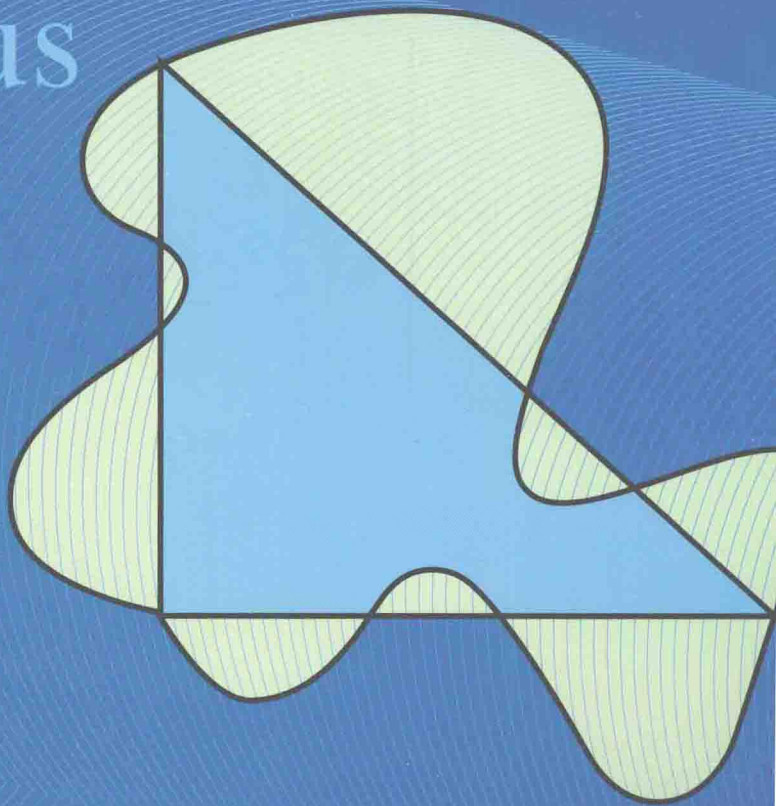


# 微积分 (上)

方源 王元

Calculus



高等教育出版社

WEIJIFEN

# 微积分 (上)

方源 王元

高等教育出版社·北京

### 图书在版编目(CIP)数据

微积分. 上 / 方源, 王元编著. -- 北京: 高等教育出版社, 2014. 7

ISBN 978-7-04-040350-3

I. ①微… II. ①方… ②王… III. ①微积分 - 高等学校 - 教材 IV. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第133316号

策划编辑 王丽萍  
责任校对 陈旭颖

责任编辑 李华英  
责任印制 刘思涵

封面设计 王凌波

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100120  
印 刷 北京人卫印刷厂  
开 本 850 mm × 1168 mm 1/16  
印 张 20  
字 数 400千字  
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
版 次 2014年7月第1版  
印 次 2014年7月第1次印刷  
定 价 39.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物 料 号 40350-00

微觀博覽知萬物  
自有群分  
積學穹經悉規矩  
各如其分

# 序

本书的英文版 *Calculus* (Fong Yuen, Wang Yuan) 于 2000 年在德国 Springer 出版社出版, 畅销全球. 其内容是为所有当代理、工、商等专业大学生设计的. 本书之论点是以轻松但不失严谨的态度去书写. 内容先以丰富的范例作启示, 进而引进严谨的概念及定理. 全书一气呵成, 共 13 章.

阅读及了解数学是一种艺术, 它与其他各种阅读文献不同! 数学典籍之阅读者必须作出大量的实践——那就是要解答书中的所有习题. 故本书亦提供了大量的习题, 以提升学习的效果. 在过去 10 余年间, 本书不只获得同业教授们的好评, 同时亦被德国之《数学评论》(Zentralblatt für Mathematik) 评为微积分教材或自学课本的良好选择.

最后, 本书两位作者皆由衷地感谢分社长王丽萍女士大力支持原著以中文版在国内面世. 同时亦感谢 Springer 出版社的邝志鸿副执行总裁把本书的中文版权无条件归还给作者, 让神州大地之学子能一窥初等分析 (微积分) 的玄奥.

方源、王元

2014 年 3 月 3 日于北京

# 前言

1995年我应台湾“中研院”之邀,访问了该院数学研究所两个月.数论学家于靖负责接待我.为了让我更广泛地了解台湾的数学与数学家,于靖特别安排我到台湾不少大学作一两天的短暂访问与停留,其中在台南的成功大学停留了10天.这是仅有的一次长时间的外访.在成功大学期间,由代数学家方源接待我.

在成功大学期间,方源曾提议与我合写一本“微积分”(Calculus)教材,我同意了.我原本以为他有一个初稿(或讲义),由我来作些补充.待看到他的稿子后,才知道是一本用英语撰写的完美的书,我已无事可做了.剩下的工作只有将他的手稿译成中文,并将习题演算一遍,我就承担了这项工作.

英文稿在1996年由Springer出版社出版了一个预印版,共两千册,仅限于在台湾发行.封面及每一页上均印有“Uncorrected proofs not to be copied”的字样,预印版很快销售完,反映不错.2000年,Springer出版社正式出版了英文版.

方源有不少好的心得,例如第二章“极限与连续”讲到 $\varepsilon$ - $\delta$ 理论时,对于给定的 $\varepsilon$ ,他用具体地算出 $\delta$ 的办法来讲,这样就将这个通常使初学者颇感“抽象”的内容,变成了可计算的事情.这与中学的定量数学基本上相同了.又如在第五章“积分法”中,方源举了商高定理(或毕达哥拉斯定理)的推广,以激发读者看到微积分与初等数学的本质差异,等等.

我想本书的中文版及其习题集的出版还是必要的.这将有利于我国更多的青年,特别是自学者,以本书为入门,进入高等数学的学习.我要借此机会衷心感谢高等教育出版社及王丽萍分社长、李华英编辑和李鹏编辑的大力支持,以及他们完美的编辑工作.

王元

2013年12月1日于北京

# 王元



中国著名数学家, 中国科学院院士. 1930年生, 江苏镇江市人. 1952年毕业于浙江大学数学系, 经数学家陈建功院士及苏步青院士推荐到中国科学院数学研究所工作. 在华罗庚院士亲自指导下研究数论, 成绩卓越. 他首先研究了著名的“哥德巴赫猜想”, 其成果领先全世界. 在1980年和同门师兄弟陈景润、潘承洞共同获得国家自然科学一等奖.

王元院士曾任中国科学院数学研究所所长、研究员、中国数学会理事长、数学学报主编、联邦德国分析杂志编委、新加坡世界科技出版公司顾问、中国奥林匹克数学会理事长. 主要著作有《哥德巴赫猜想》文集、《数论在近似分析中的应用》(与华罗庚合著) 和 *Calculus* (与方源合著的英文版《微积分》), 专业研究论文百余篇均发表在当代世界著名的数学期刊.

# 方源



台湾著名数学家, 1948 年生于香港, 1979 年获英国爱丁堡大学数学博士. 专攻代数学、数学教育及代数自动机理论. 现就职于广东技术师范学院. 曾任台湾成功大学应用数学研究所特聘教授 34 年 (终身职)、成功大学高等数学研究中心主任、国际学术组主任、大学出版中心主任. 于 1984 年及 1989 年先后受聘为爱丁堡大学及奥地利开普勒 (Kepler) 大学客座教授各为期 1 年, 讲授近世代数及分析学.

1991 年获台湾教育主管部门颁发特优数学讲座教授大奖 (全台湾仅 1 人), 同年获聘为开普勒大学终身亚洲首席顾问教授, 1993/94 年名列美国 Marquis 世界名人录, 1993 — 2012 年任代数集刊副主编 (中国科学院数学研究所主办). 著有专书 10 册及近百篇研究论文发表于当代国际知名的出版社及数学期刊.



# 目录

## 上册

<b>1</b>	<b>导引</b>	<b>1</b>
1.1	什么是微积分?	1
1.2	集合与函数	4
1.3	数系	15
1.4	数学归纳法	23
1.5	平面解析几何	26
1.5.1	距离公式	27
1.5.2	圆公式	28
1.5.3	直线公式	29
1.5.4	斜截式	31
<b>2</b>	<b>极限与连续</b>	<b>35</b>
2.1	极限的概念	35
2.2	一些极限定理	55
2.3	连续	70
2.4	连续函数的几个定理	79
2.5	一致连续性	83
<b>3</b>	<b>微分法</b>	<b>85</b>
3.1	微商的一些定义	85
3.1.1	切线问题	85
3.1.2	瞬间速度问题	86
3.2	微商的一些公式	95
3.3	链式法则	103
3.4	三角函数的微商	109
3.5	隐函数微分法与高阶微商	117
3.6	微分与牛顿-拉弗森逼近	127

<b>4</b>	<b>微商的应用</b> . . . . .	<b>136</b>
4.1	罗尔定理与中值定理 . . . . .	136
4.2	单调函数 . . . . .	141
4.3	函数的相对极值 . . . . .	144
4.4	函数的凸性 . . . . .	151
4.5	绘制图形 . . . . .	167
<b>5</b>	<b>积分法</b> . . . . .	<b>174</b>
5.1	一个面积问题 . . . . .	175
5.2	定积分的定义 . . . . .	179
5.3	积分学的一些定理 . . . . .	197
5.4	微积分的基本定理 . . . . .	204
5.5	曲线间的面积 . . . . .	213
5.6	应用: 毕达哥拉斯定理的推广 . . . . .	219
5.7	进一步的应用 . . . . .	228
5.7.1	体积 . . . . .	228
5.7.2	弧长和旋转曲面的面积 . . . . .	236
5.7.3	功 . . . . .	241
5.7.4	质量中心 . . . . .	242
<b>6</b>	<b>某些特殊函数</b> . . . . .	<b>249</b>
6.1	反函数 . . . . .	249
6.2	反三角函数 . . . . .	255
6.3	指数与对数函数 . . . . .	267
6.3.1	经典的方法 . . . . .	267
6.3.2	另一种处理方法 . . . . .	277
6.4	双曲与反双曲函数 . . . . .	284
6.4.1	双曲函数 . . . . .	284
6.4.2	反双曲函数 . . . . .	289
	<b>表</b> . . . . .	<b>296</b>
	<b>索引</b> . . . . .	<b>301</b>

## 下 册

<b>7 形式积分法</b> . . . . .	<b>1</b>
7.1 不定积分 . . . . .	1
7.2 分部积分法 . . . . .	7
7.3 三角积分 . . . . .	16
7.4 三角代换积分法及和 $\sqrt{x^2 - a^2}$ 与 $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ 有关的被积函数 . . . . .	25
7.5 部分分式 . . . . .	35
<b>8 数值积分法</b> . . . . .	<b>42</b>
8.1 梯形法则 . . . . .	42
8.2 辛普森法则 . . . . .	49
<b>9 再论极限及反常积分</b> . . . . .	<b>56</b>
9.1 实数序列与序列的极限 . . . . .	56
9.2 一些重要极限 . . . . .	66
9.3 关于不定式的洛必达法则 . . . . .	69
9.3.1 不定式 $0/0$ 与 $\infty/\infty$ 的洛必达法则 . . . . .	70
9.3.2 不定式 $0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 与 $\infty - \infty$ 的洛必达法则 . . . . .	74
9.4 反常积分 . . . . .	80
<b>10 无穷级数</b> . . . . .	<b>94</b>
10.1 无穷级数 . . . . .	94
10.2 正项级数: 比较检验与积分检验 . . . . .	104
10.3 交错级数, 绝对收敛, 比值与根值检验 . . . . .	112
10.4 幂级数, 麦克劳林级数与泰勒级数 . . . . .	124
<b>11 极坐标</b> . . . . .	<b>139</b>
11.1 极坐标 . . . . .	139
11.1.1 极方程 $r = f(\theta)$ 的图形 . . . . .	143
11.1.2 极曲线的切线 . . . . .	145
11.2 极坐标下的面积 . . . . .	149
11.3 参数路径与长度 . . . . .	153

<b>12 多变量函数的微分学</b> . . . . .	<b>156</b>
12.1 $n$ -变量函数 . . . . .	156
12.2 偏微商 . . . . .	165
12.2.1 多于三个变量的函数 . . . . .	170
12.2.2 高阶偏微商 . . . . .	171
12.3 极限与连续 . . . . .	174
12.3.1 极限 . . . . .	174
12.3.2 连续性 . . . . .	180
12.4 链式法则 . . . . .	185
12.5 梯度与方向微商 . . . . .	200
12.6 隐函数微分法 . . . . .	221
12.7 多变量函数的极值 . . . . .	225
<b>13 多重积分</b> . . . . .	<b>240</b>
13.1 矩形上的二重积分 . . . . .	240
13.2 一般区域上的二重积分 . . . . .	254
13.3 极坐标下的二重积分 . . . . .	268
13.4 三重积分及其应用 . . . . .	277
<b>索引</b> . . . . .	<b>293</b>

# 导引

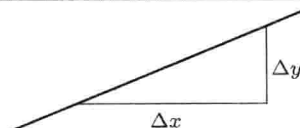
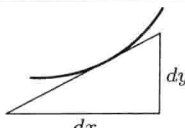
## 1.1 什么是微积分?

对于当今的科学家来说,微积分是用极限过程提升的一种初等数学(指代数、几何与三角),而对于古罗马人来说,微积分则为用于赌博与计算的一种小技术.实际上,微积分是用极限这一基本概念来研究实变量的实函数的一门学问.由极限这一想法立即导出微分与积分的概念.微分与积分在各种学科中都有着很多的应用.例如,一个物理学家可以用积分计算来决定一个变化的力所做的功.一个化学家可以用微分计算来研究各种化学反应的结果.一个生物学家可以用微积分来预测人工培养的细菌的增长率,以及一个经济学家可以将微积分用于企业盈利与亏损的问题.

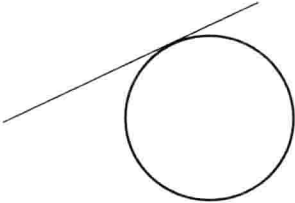
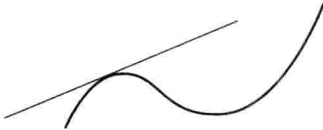
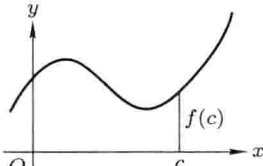
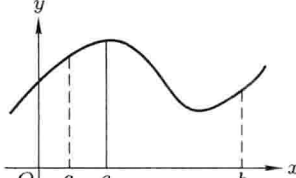
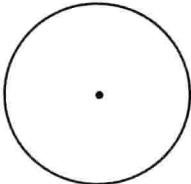
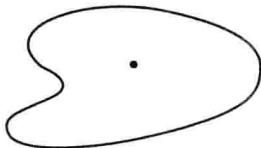
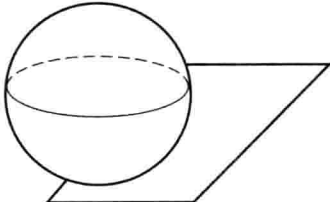
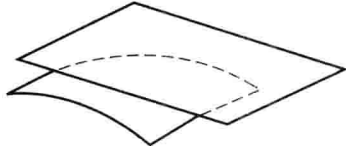


微积分从初等数学中得到它的想法并将其延拓到更一般的情况.表 1.1.1 给出了前微积分(即没有微积分的初等数学)与微积分的比较.

现在我们给出微积分历史的一个简要叙述,按正式说法,微积分的真正发明应该归功于两位伟大的数学家——英国的牛顿(1642—1727)与德国的莱布尼茨(1646—1716).但是我们还可以追溯到 2500 年前的古希

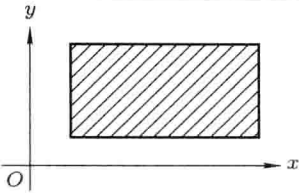
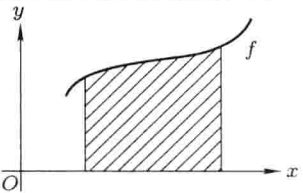
表 1.1.1

前微积分	微积分
 <p><math>m</math>: 直线的斜率  <math>y = mx + c</math>, 其中 <math>m = \Delta y / \Delta x</math></p>	 <p><math>f'(x)</math>: 曲线的斜率  <math>y = f(x)</math>, 其中 <math>f'(x) = dy/dx</math></p>

续表

前微积分	微积分
 <p data-bbox="391 542 485 569">圆的切线</p>	 <p data-bbox="815 542 982 569">一般曲线的切线</p>
 <p data-bbox="391 789 619 817"><math>f(c)</math>: 曲线在点 <math>c</math> 的高</p>	 <p data-bbox="815 789 1165 817"><math>f(c)</math>: 曲线在 <math>c \in [a, b]</math> 中的最大高</p>
 <p data-bbox="391 1033 485 1061">圆的中心</p>	 <p data-bbox="815 1033 936 1061">区域的形心</p>
 <p data-bbox="391 1294 512 1321">球的切平面</p>	 <p data-bbox="815 1294 1009 1321">一般曲面的切平面</p>
$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ <p data-bbox="391 1403 538 1430">有限个数之和</p>	$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ <p data-bbox="815 1403 990 1430">无限多个数之和</p>
 <p data-bbox="391 1572 538 1599">直线段的长度</p>	 <p data-bbox="815 1572 963 1599">曲线段的长度</p>

续表

前微积分	微积分
 <p data-bbox="356 536 477 564">矩形的面积</p>	 <p data-bbox="782 536 1001 564">曲线下方面积</p>

希腊, 那时阿基米德在面积问题研究中, 已经有了微积分的原始概念. 利用“耗尽方法”, 古希腊人可以决定任意多边形的面积, 他们将多边形分割成三角形之和, 然后将三角形的面积加起来, 即得所需的面积  $A$ . 如图 1.1.1 所示.

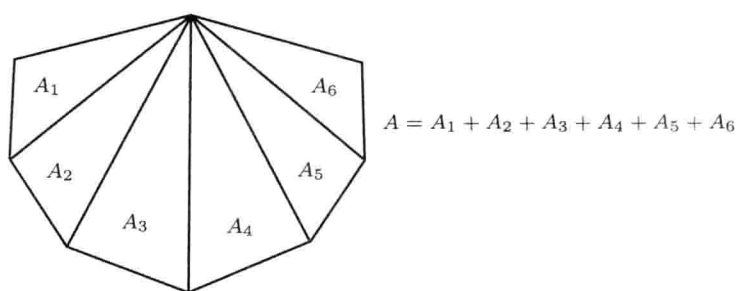


图 1.1.1

欲得到一个曲线包围的区域的面积是一件比较困难的事, 古希腊人的耗尽方法为在曲线包围的区域中作一个内接多边形, 然后让多边形的边数不断增加. 图 1.1.2 就表示一个圆的真正面积事实上可以由圆的内

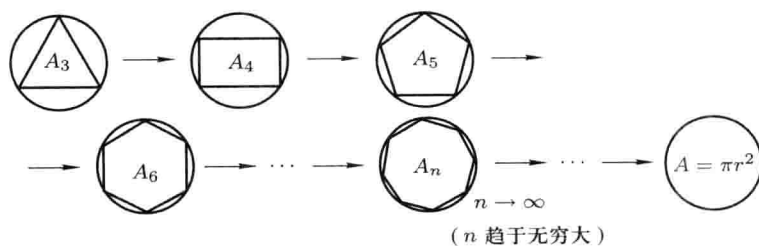


图 1.1.2

接正多边形的面积的极限而得到. 即命  $A_n$  表示圆的内接正  $n$  边形的面积. 当  $n$  增加时,  $A_n$  变得愈来愈接近于圆的面积. 这时, 我们就说圆的面积等于它的内接正多边形面积的极限, 并记之为

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

我们需注意, 不仅古希腊人在使用极限概念时是含糊的, 就是牛顿与莱布尼茨在发展了他们的微分与积分想法时, 亦仅有一个极限的暧昧概念. 一直到一个多世纪之后, 法国著名数学家柯西 (1789—1857) 才给出了我们今天所使用的函数极限的一个精确定义. 从而使微积分的结果可以严格地得到证明. 因此从 19 世纪以后, 它才被普遍地接受了.

## 1.2 集合与函数

尽管在现阶段就涉及集合论并不是必要的, 但对于集合论的基本点有一个直观的了解不但有助于对本书的学习, 而且也有利于跟你们的同学与教授交谈数学. 在此我们要强调集合一词是一个已经广泛接受了的技术名词. 在日常生活中, 我们用这样的措词. 例如, 一组画的集合, 一堆书的集合, 一些节目单的集合等. 无论如何, 在本书中, 我们更有兴趣于数学对象的集合, 例如, 一个实数集合, 一个正整数集合,  $xOy$  平面上一个点的集合等. 因此, 所有这些例子给了我们一个直观的感觉, 即集合是一个有明确定义的物体的全体. 所以我们有下面的定义

### 定义 1.2.1 集合的定义

一个集合是一个有明确定义的物体 (点、元素或会员等) 的全体.

我们注意到由上述定义, 即可以确定适合某些约束条件或性质  $P(x)$  的所有元素  $x$  的集合  $S$ . 但在此需除去适合  $P(x)$  的所有集合  $x$  的集合. 这一区分足以消除逻辑中的悖论. 当这一语义悖论避免掉之后, 则集合  $S$  的存在性就由定义 1.2.1 确定了. 我们将它记为

$$S = \{x|P(x)\}.$$

上面表达式读作“ $S$  为一个集合, 它包含适合性质  $P(x)$  的元素”.

一般, 我们用大写字母  $X, Y, Z$  等来表示集合, 用小写字母  $x, y, z$  等来表示集合的一个元素. 若一个集合  $S$  包含点  $x, y, z, w$ , 则  $S$  就记为

$$S = \{x, y, z, w\}.$$



记号“ $x \in S$ ”表示“ $x$ 为 $S$ 的元素”或“ $x$ 属于 $S$ ”;而记号“ $x \notin S$ ”则表示“ $x$ 不是 $S$ 的元素”或“ $x$ 不属于 $S$ ”.

### 例 1.2.2 集合的例子

- (i)  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  为所有自然数 (或正整数) 的集合.
- (ii)  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  为所有整数的集合.
- (iii)  $\mathbb{Q} = \{m/n | m, n \in \mathbb{Z} \text{ 及 } n \neq 0\}$  为所有有理数的集合.
- (iv)  $\mathbb{R} = \{x | x \text{ 为一个实数}\}$  为所有实数的集合.
- (v)  $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R} \text{ 及 } i^2 = -1\}$  为所有复数的集合.
- (vi)  $S = \{x \in \mathbb{R} | |x - 2| < 3\}$ . 易见  $S$  是所有与 2 的距离小于 3 的实数的集合. 因此

$$S = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 5\}.$$

### 定义 1.2.3 子集的定义

一个集合  $S$  是一个集合  $T$  的子集 (或子集合), 当且仅当  $S$  的每一个元素都是  $T$  的一个元素, 用记号写作

$$S \subseteq T \text{ 或 } T \supseteq S.$$

因此

$$S \subseteq T \Leftrightarrow (x \in S \Rightarrow x \in T).$$

此处记号“ $\Leftrightarrow$ ”表示“当且仅当”.

例 1.2.4 若  $X = \{1, 3, 5\}$  及  $Y = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ , 则  $X \subseteq Y$  或  $Y \supseteq X$ . 见图 1.2.1.

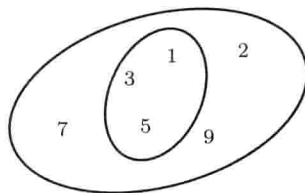


图 1.2.1

若一个集合至少含有一个元素, 则称它为非空的, 否则它就是空的. 因此空集就是不含任何元素的集合. 我们将它记为  $\emptyset$ , 即

$$\emptyset = \{x | x \neq x\}.$$

现在我们从已给集合出发来构筑新集合.