

现代物理基础丛书

62

陕西省普通高校重点学科专项资金建设项目经费资助

量子场论与重整化导论

石康杰 杨文力 杨战营 编著



科学出版社

陕西省普通高校重点学科专项资金建设项目经费资助

现代物理基础丛书 62

量子场论与重整化导论

石康杰 杨文力 杨战营 编著



科学出版社

北京

内 容 简 介

量子场论是理论物理的必备专业基础课。本教材系统地介绍量子场论,特别是重整化理论最基本的知识和方法。第1章和第2章从拉格朗日方程和哈密顿方程出发,引入经典场方程并导出 Noether 定理,介绍正则量子化和费曼路径积分量子化,导出量子 Noether 定理和 Ward 恒等式。第3章用正则量子化给出自旋为 0、1 和 1/2 的几种自由场的量子化,在自旋为 1 的电磁场中介绍 Gupta-Bleuler 方法。第4章和第5章介绍几种场的费曼传播子、相互作用场的微扰展开、维克定理、费曼图规则以及散射截面。第6章是量子电动力学单圈图的重整化的详细计算。第7章介绍重整化的 BPHZ 方案。第8章给出了 Zimmermann 定理和 Weinberg 定理有关部分的详细证明,从而证明了 BPHZ 方案的收敛,并由此证明了量子电动力学传统重整化方案的收敛性。

本教材可作为理论物理、凝聚态物理等专业量子场论初学者的教材和参考书,也可供相关专业科技研究人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

量子场论与重整化导论/石康杰,杨文力,杨战营编著. —北京:科学出版社,2014.6

(现代物理基础丛书;62)

ISBN 978-7-03-040995-9

I. ①量… II. ①石… ②杨… ③杨… III. ①量子场论②重整化
①IV. ①O413.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 123857 号

责任编辑:刘凤娟 尹彦芳/责任校对:张小霞
责任印制:赵德静/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京佳信达欣艺术印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014年6月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2014年6月第一次印刷 印张:22 1/2

字数:437 000

定价:128.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《现代物理基础丛书》编委会

主 编 杨国桢

副主编 阎守胜 聂玉昕

编 委 (按姓氏笔画排序)

王 牧 王鼎盛 朱邦芬 刘寄星

邹振隆 宋菲君 张元仲 张守著

张海澜 张焕乔 张维岩 侯建国

侯晓远 夏建白 黄 涛 解思深

序 言

物理学科是一个综合性大学的重要学科, 它的水平是反映综合性大学实力的一项重要标志. 量子场论研究场的量子理论, 对电磁现象的预言精度达 10^{-7} 数量级, 是物理学科迄今为止最成功的理论之一. 近十几年来, 量子场论不但自身得到了迅猛的发展, 而且已经在量子物理、凝聚态物理、光学、玻色-爱因斯坦凝聚等各个领域得到了非常广泛的应用. 由于量子场论的重要性, 它不仅作为理论物理专业研究生的学位专业基础课程, 而且许多学校已经将它作为物理系其他学生的学位课程. 量子场论的教学是比较难的, 因为它同时具有概念上和计算上的困难, 且它的内容也比较多. 量子场论的书, 包括中外文有很多种, 近年来国外也陆续出版了一些教材和专著, 但是它们往往内容太多, 叙述太简略, 起点太高. 初学者要花很多时间去理解和推导它的结论. 在教学上很难操作. 因此, 我们深深感到应该写一本有关量子场论的理论物理基础教材, 以供理论物理研究生及相关专业科研工作者参考. 如何精选一些既包含最基本的内容, 自成一个逻辑体系, 又能兼顾到今后实际运用的题材, 就是一个很具挑战性的任务. 在本教材的编写中, 我们精选题材, 详细推导, 对最重要而又困难的内容给出完整的、详细的结果. 让学生在有限的时间内掌握量子场论最困难的部分. 为学生从事科学研究打下坚实的理论基础, 以满足本科生和研究生教学的需求.

(1) 本教材是为初学者学习量子场论和重整化理论编写的, 对于初学者而言, 往往最困难的是复原书本上的公式推导. 所以教材起点力求尽量低, 推导力求详细, 内容力求自给自足. 许多地方不避重复, 为的是读者可以一步步地参加计算, 只要有耐心, 没有过不去的推导和弄不懂的概念. 为了使整个篇幅不大, 内容上只引入了最终学会 BPHZ 重整化最需要的资料, 其余一概不予介绍. 这样做, 对于初学者有一个坚实的起点和平台是非常有帮助的.

(2) 重整化理论是量子场论重要而又最困难的部分, 这一部分如果学不懂就不可能对量子场论的理解达到现代的高度, 初学者往往在这方面困难很大. 一般教材或专著通常介绍得比较简略, 初学者阅读时困难很大. 本教材详细推导了 QED (量子电动力学) 单圈图的重整化并着重介绍了 BPHZ 重整化方案及其与传统的 QED 重整化方案的关系, 对初等重整化理论进行了比较完整的介绍.

(3) 本教材附有少而精的习题, 可以帮助理解课文.

本教材包括两个主要内容.

第一部分是量子场论和费恩曼图, 包括第 1~5 章. 在第 1、2 章先从拉格朗日方程和哈密顿方程出发, 引入经典场方程并导出 Noether 定理, 然后介绍量子化的两种等价方法, 即正则量子化和费恩曼路径积分量子化, 再导出量子 Noether 定理和 Ward 恒等式. 这对后面重整化的相关内容有用. 第 3 章用正则量子化给出自旋为 0、1 和 1/2 的几种自由场的量子化, 在自旋为 1 的电磁场中介绍 Gupta-Bleuler 方法. 第 4 章和第 5 章是微扰论和费恩曼图. 首先介绍前述几种场的费恩曼传播子, 然后介绍相互作用场的微扰展开、维克定理, 并对 ϕ^4 理论和电磁场给出费恩曼图规则, 最后简单介绍散射截面.

第二部分是重整化, 分为 6、7、8 三章. 第 6 章的主要内容是量子电动力学单圈图的重整化的详细计算, 还由一般场的 Ward 恒等式推导量子电动力学 Ward 恒等式, 给出重整化后场的任意圈图拉格朗日量的最终形式. 第 7 章介绍重整化的 BPHZ 方案. 首先说明对于微扰展开中出现的各种费恩曼图, 哪些是需要关注的. 然后通过量子电动力学中的交叉发散图和萨拉姆方案引入重整化的 BPHZ 方案, 引入可重整化场的概念. 第 7 章最后说明为什么可以用在拉格朗日量添加抵消项而能自洽地得到 BPHZ 方案所需要的各张费恩曼图的抵消项, 从而说明为什么要用这么复杂的方案来给出一个收敛积分, 这在物理上有什么根据. 为了说清楚这一点, 第 5 章对费恩曼图规则产生过程的详细介绍是必要的. 在第 7 章的最后一节, 给出 QED 传统重整化方案与 BPHZ 方案的关系, 这样, 就可以由 BPHZ 方案的收敛性导出 QED 传统重整化方案的收敛性.

最后一章——第 8 章是 BPHZ 方案收敛性的证明. 教材给出了 Zimmermann 定理和 Winberg 定理有关部分的详细证明, 从而证明了 BPHZ 方案的收敛性. 这使读者完全了解重整化的核心问题: 场论中的紫外发散困难是如何解决的.

编者感谢侯伯宇先生和张绍进先生, 由于他们坚持的场论方向和卓越的贡献, 本书的编写才成为可能. 感谢王佩先生和侯伯元先生在场论方面的指导, 感谢岳瑞宏教授、赵柳教授和孙成一博士在内容与结构方面的重要启发和宝贵意见. 丁祥茂研究员曾不辞辛劳为编者查找、复印关于 BPHZ 重整化的大量文献. 冯俊博士不但为编者打印前半部分书稿, 而且提供了重要的专著作为参考文献. 张凯博士为编者提供了关于 QED 参数测量的现代方法. 郝昆、吴晟、张利霞、杨洁坤和周建华等同学打印了本书后半部分书稿, 郝昆同学承担了本书大部分费恩曼图的绘图工作. 编者对此深表感谢. 感谢姜振益教授和西北大学现代物理研究所各位老师同学在编写本书过程中长期的关心、支持、鼓励和多方面的帮助! 感谢白晋涛教授和物理系、光子所的老师 and 许多同学在出版和编写本书的过程中给予的关心和帮助! 感谢科学出版社刘凤娟编辑的关心、帮助和支持! 在书稿完成之际, 编者想起求学过程中的许多师长, 他们对学生充满真诚关心和希望, 为学生辛勤付出而不求回报. 在

这本场论前言中,编者未能一一致谢,但是他们每一位都是编者深为感激的.

本书得到陕西省普通高校重点学科专项资金建设项目经费的资助.

编 者

目 录

序言

第 1 章 经典场	1
1.1 经典拉格朗日体系与哈密顿体系	1
1.1.1 拉格朗日方程	1
1.1.2 作用量原理	2
1.1.3 哈密顿方程	2
1.1.4 泊松括号	3
附录 1.1A 不同基底下的泊松括号	4
1.2 经典场	5
1.2.1 经典场方程	5
1.2.2 Noether 定理	12
附录 1.2A 变分与泛函微商	18
第 2 章 场的量子化	20
2.1 力学体系的正则量子化	20
2.2 费恩曼路径积分量子化	24
附录 2.2A Gauss 积分	28
附录 2.2B 费米型力学量的路径积分量子化	29
2.3 量子场方程	37
2.4 量子 Noether 定理与 Ward 恒等式	38
第 3 章 几种自由量子场	41
3.1 狄拉克场 (自旋为 $\frac{1}{2}$ 的场)	41
3.1.1 γ 矩阵和洛伦兹变换	41
3.1.2 狄拉克方程	43
3.1.3 平面波解	48
3.1.4 狄拉克场的拉格朗日形式与哈密顿形式	49
3.1.5 狄拉克场的量子化	51
附录 3.1A 推导 $u(\vec{p}, s)$ 和 $v(\vec{p}, s)$ 的性质	57
附录 3.1B 产生湮灭算符和粒子数算符	59

3.2 自旋为 0 的中性粒子场 (K-G 场)	61
3.2.1 K-G 场方程	61
3.2.2 K-G 场的量子化	62
3.3 电磁场 (自旋为 1 的场)	65
3.3.1 电磁场方程与洛伦兹规范下的量子化	66
3.3.2 偏振矢量 $\epsilon(\vec{k}, \lambda)$	69
3.3.3 Gupta-Bleuler(G-B) 方法	71
第 4 章 微扰论和相互作用场	73
4.1 两个非自由场的例子	73
4.1.1 ϕ^4 场论	73
4.1.2 电动力学	73
4.2 微扰论	77
4.2.1 相互作用的微扰展开	77
4.2.2 S 矩阵、入射和出射态	80
4.2.3 维克定理	85
4.2.4 几种场与其产生、湮灭算子的收缩	89
4.2.5 几种自由场的费恩曼传播子	91
第 5 章 S 矩阵的分振幅、费恩曼积分和费恩曼图	101
5.1 ϕ^4 理论的费恩曼图	101
5.2 量子电动力学 (QED) 中的微扰论	110
附录 5.2A 光子的入射态 (只考虑横向光子)	118
附录 5.2B 量子电动力学中费恩曼图计算题	119
5.3 散射截面	123
附录 5.3A 振子模式数等计算	125
第 6 章 重整化 (一) 量子电动力学单圈图的重整化	126
6.1 发散积分	126
6.1.1 真空极化	126
6.1.2 电子自能	127
6.1.3 顶角修正	128
6.2 表观发散度的计算 (QED)	131
6.3 Furry 定理	133
6.4 关于费米子圈的规范不变性	136
6.5 费恩曼积分的洛伦兹变换性质	141

附录 6.5A $\sum(p)$ 的形式	142
6.6 QED 单圈图重整化	145
6.6.1 真空极化的单圈图	146
6.6.2 电子自能的单圈图	154
6.6.3 顶角修正的单圈图	158
6.6.4 单圈图重整化总结	167
附录 6.6A 光子 $\Delta\mathcal{L}_I$ 的计算	170
附录 6.6B g_1 的计算过程	172
附录 6.6C 另一种抵消方案	173
附录 6.6D 关于 γ -矩阵的计算与公式	174
附录 6.6E 当取重整化点为 $p = p' = 0$ 的 Z_2 和 Z'_2 的比较	175
附录 6.6F 电子自能和顶角修正的一般形式	177
6.7 QED 中的一个 Ward 恒等式	179
附录 6.7A (6.7.10) 式的推导	183
附录 6.7B 电子的全费恩曼传播子	186
附录 6.7C 光子的全费恩曼传播子	189
6.8 关于红外发散	191
第 7 章 重整化 (二) 重整化的 BPHZ 方案	207
7.1 单圈图重整化与泰勒展开	207
7.2 正规图	208
7.3 交叉发散与萨拉姆方案	212
7.4 BPHZ 方案与重整化的自洽性	217
附录 7.4A 关于泰勒展开的规范条件	226
附录 7.4B 关于对称因子	226
7.5 R_Γ (费恩曼被积函数的收敛部分) 的显示表达式	229
7.6 重整化点的选择与 QED 传统重整化方案的收敛问题	232
7.6.1 单圈图两种方案抵消项之差	233
7.6.2 多圈图的两种方案之差	236
7.6.3 传统方案的收敛性	247
7.6.4 从费恩曼被积函数角度分析	253
7.6.5 传统 QED 重整化的具体方案	256
第 8 章 BPHZ 方案的收敛性	262
8.1 外动量的正则分布与费恩曼积分的积分变量	262
8.1.1 备忘录 2	268

8.1.2 备忘录 3	269
附录 8.1A 关于正则分布	270
8.2 R_Γ 的显示表达式	271
8.3 Γ 林按 k 空间的子空间 T 的分类	276
8.3.1 动量 $l_{ab\sigma}, k_{ab\sigma}^\gamma, q_{ab\sigma}^\gamma$ 对 t 和对 tq 的幂次	276
8.3.2 当 T 确定后, Γ 林的完备化和基底	278
8.4 Zimmermann 定理	287
8.4.1 $\gamma \notin \mathscr{W}(U)$	290
8.4.2 $\gamma \in \mathscr{W}(U)$	295
附录 8.4A 泰勒展开余项的泰勒展开系数	302
8.5 Wick 转动与 R_Γ 的收敛	302
附录 8.5A C_α 和 $\tilde{C}$ 的绝对值之比	309
附录 8.5B 正交化手续	310
附录 8.5C 多项式系数的绝对收敛性质	313
附录 8.5D 一些公式的推导	314
8.6 Weinberg 定理与 R_Γ 的收敛性	321
8.6.1 Weinberg 定理的推论	321
8.6.2 R_Γ 是 k 空间的 A_n 类函数	333
8.6.3 R_Γ 的欧氏空间积分绝对收敛	335
附录 8.6A 积分 $\int_b^{\lambda\eta} dz \left(\frac{\eta}{z}\right)^{\alpha'} \left(\ln \frac{\eta}{z}\right)^{\beta'} z^\alpha \ln z^\beta$ 的渐近指数	335
主要参考文献	338
索引	340

第 1 章 经 典 场

场是力学量 (场量) 随空间坐标的变化而变化的系统. 描写一个场的构形需要给出空间每一点的场量. 比如电场, 必须对空间每一点给出电场的 3 个分量, 才能知道整个电场的情况. 场论研究场的构形随时间的演化规律. 量子场论研究场在量子化以后的演化规律. 在这一章我们介绍经典场作为拉格朗日体系和哈密顿体系的方程, 以及经典的 Noether 定理. 由这条定理, 可以从场的一些对称性给出它们对应的守恒量.

1.1 经典拉格朗日体系与哈密顿体系

1.1.1 拉格朗日方程

一个力学体系有一些量是可以自由变动的, 这些量一旦确定下来, 体系的构形 (位置) 便完全确定了, 它们称为广义坐标, 用 $\{q_i\}$ 表示, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. 这个体系的自由度是 n . 随便给出一个 q_i 随时间的变化关系 $\{q_i(t)\}$, 就给出了这个体系的一个“运动学上可能的运动”. 然而, 运动学上可能的运动并不一定是动力学上可以实现的运动. 找出运动学上可能的, 同时也在动力学上可能的运动, 就是动力学的目的, 决定它们的方程叫动力学方程.

对动力学的保守体系, 可以找到一量叫拉格朗日量 L , 它是 q_i 和 $\dot{q}_i$ 的函数,

$$L = L(q_i, \dot{q}_i).$$

什么是动力学上可能的, 也即是真实的运动呢? 它就是要求 $\{q_i(t)\}$ 满足拉格朗日方程的运动:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1.1)$$

在最简单的情形, $L(q_i, \dot{q}_i) = T - V$, 其中 T 是动能, V 是位能. 在其他情形, 可以适当找出 L , 使它的拉格朗日方程正好给出体系的动力学方程.

请注意 (1.1.1) 式偏微商中的自变量 $\{q_i\}$ 、 $\{\dot{q}_i\}$ 以及全微商 $\frac{d}{dt}$ 的意思. 如果给出一个运动, $q_i = q_i(t)$, 怎么判定它是否是真实的运动?

由 $q_i(t) \rightarrow \dot{q}_i(t)$, $\{q_i(t)\}$ 和 $\{\dot{q}_i(t)\}$ 给出 L 以及 $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ 、 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, 它们都是时间的函数, 因而可以得到 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$, 再检查它是否满足方程 (1.1.1). 若满足, 就是一个

动力学上允许的运动.

1.1.1.2 作用量原理

拉格朗日方程可以用极值原理表示出来. 我们首先定义作用量 S :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt. \quad (1.1.2)$$

从这个定义可以看出, 每给定一个运动学上可能的运动, 就可标出体系在 $t_1 \sim t_2$ 间的作用量. 作用量原理是说, 在初始和末了的位置确定 (即 $q_i(t_1)$ 和 $q_i(t_2)$ 都确定) 的所有运动学上可能的运动中, 真实的运动是使作用量取极值的运动.

推导如下: 作用量的变更为

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt.$$

由
$$\delta \dot{q}_i = \delta \frac{d}{dt} q_i = \delta \{ [q_i(t + \Delta t) - q_i(t)] / \Delta t \}$$

$$= [\delta q_i(t + \Delta t) - \delta q_i(t)] / \Delta t = \frac{d}{dt} \delta q_i,$$

给出
$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (1.1.3)$$

当拉格朗日方程成立并且在 t_1 和 t_2 , $\delta q_i = 0$ 时, 对其余任意 δq_i 有 $\delta S = 0$. 反之, 要求在任意 δq_i 下 $\delta S = 0$, 可推出拉格朗日方程及边界条件.

1.1.1.3 哈密顿方程

由拉格朗日方程可以导出哈密顿方程, 从而将拉格朗日体系改变为哈密顿体系. 这样可以得到动力学体系的哈密顿形式, 也称为正则形式. 为此, 首先定义广义动量 p_i :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.1.4)$$

它给出广义动量作为 q 和 $\dot{q}$ 的函数 $p_i = p_i(q, \dot{q})$, 然后反解出 $\dot{q}_i = f_i(q, p)$. 定义哈密顿量

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i \dot{q}_i - L \\ &= \sum_i p_i \dot{q}_i(p, q) - L(q, \dot{q}(p, q)) \\ &= H(p, q). \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

考虑哈密顿量的一个微小变更,

$$\begin{aligned}\delta H &= \sum_i \delta p_i \dot{q}_i + \sum_i p_i \delta \dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \\ &= \sum_i \dot{q}_i \delta p_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i.\end{aligned}\quad (1.1.6)$$

因此, H 作为 q 和 p 的函数有

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}.\quad (1.1.7)$$

又由拉格朗日方程 (1.1.1) 得

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} p = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.\quad (1.1.8)$$

方程 (1.1.7) 的第一个式子和 (1.1.8) 式就是哈密顿方程. 一个运动对应的 $p_i(t), q_i(t)$ 如果满足哈密顿方程, 就是一个动力学上可能的运动.

问题: 任意给定 $p_i(t), q_i(t)$ 是否是一个在拉格朗日意义下可能的运动?

1.1.4 泊松括号

我们研究在哈密顿体系中, 任意的力学量 $A(q, p, t)$ 如何随时间变化. A 对时间的变化率为

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ &\equiv \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}.\end{aligned}\quad (1.1.9)$$

在这里我们定义

$$\{A, B\} \equiv \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i}\quad (1.1.10)$$

为泊松括号. 泊松括号满足

$$\begin{aligned}\{A, B\} &= -\{B, A\}, \\ \{AB, C\} &= A\{B, C\} + \{A, C\}B, \\ \{\alpha A + \beta B, C\} &= \alpha\{A, C\} + \beta\{B, C\}, \\ \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} &= 0.\end{aligned}\quad (1.1.11)$$

其中, α, β 为常数, 最后一个等式叫 Jacobi 恒等式.

习题 证明这些式子.

由定义易得基本泊松括号:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0.\quad (1.1.12)$$

附录 1.1A 不同基底下的泊松括号

如果已知 $\{A_l\}$ 和 $\{B_l\}$, 以及它们之间的泊松括号, 试计算新的基底下的泊松括号.

$$\begin{aligned}
 \{R, S\}_{AB} &= \sum_i \left\{ \frac{\partial R}{\partial A_i} \frac{\partial S}{\partial B_i} - \frac{\partial R}{\partial B_i} \frac{\partial S}{\partial A_i} \right\}, \\
 \{R, S\}_{qp} &= \sum_i \left\{ \frac{\partial R}{\partial q_i} \frac{\partial S}{\partial p_i} - \frac{\partial R}{\partial p_i} \frac{\partial S}{\partial q_i} \right\} \\
 &= \sum_i \left\{ \sum_{l'} \left(\frac{\partial R}{\partial A_l} \frac{\partial A_l}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial B_l} \frac{\partial B_l}{\partial q_i} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial A_{l'}} \frac{\partial A_{l'}}{\partial p_i} + \frac{\partial S}{\partial B_{l'}} \frac{\partial B_{l'}}{\partial p_i} \right) - \{q_i \leftrightarrow p_i\} \right\} \\
 &= \sum_{l'} \frac{\partial R}{\partial A_l} \frac{\partial S}{\partial A_{l'}} \sum_i \frac{\partial A_l}{\partial q_i} \frac{\partial A_{l'}}{\partial p_i} + \sum_{l'} \frac{\partial R}{\partial A_l} \frac{\partial S}{\partial B_{l'}} \sum_i \frac{\partial A_l}{\partial q_i} \frac{\partial B_{l'}}{\partial p_i} \\
 &\quad + \sum_{l'} \frac{\partial R}{\partial B_l} \frac{\partial S}{\partial A_{l'}} \sum_i \frac{\partial B_l}{\partial q_i} \frac{\partial A_{l'}}{\partial p_i} + \sum_{l'} \frac{\partial R}{\partial B_l} \frac{\partial S}{\partial B_{l'}} \sum_i \frac{\partial B_l}{\partial q_i} \frac{\partial B_{l'}}{\partial p_i} - \{q_i \leftrightarrow p_i\} \\
 &= \sum_{l'} \frac{\partial R}{\partial A_l} \frac{\partial S}{\partial A_{l'}} \{A_l, A_{l'}\}_{qp} + \sum_{l'} \frac{\partial R}{\partial A_l} \frac{\partial S}{\partial B_{l'}} \{A_l, B_{l'}\}_{qp} \\
 &\quad + \sum_{l'} \frac{\partial R}{\partial B_l} \frac{\partial S}{\partial A_{l'}} \{B_l, A_{l'}\}_{qp} + \sum_{l'} \frac{\partial R}{\partial B_l} \frac{\partial S}{\partial B_{l'}} \{B_l, B_{l'}\}_{qp}.
 \end{aligned}$$

如果

$$\{A_l, B_{l'}\}_{qp} = \delta_{ll'}, \quad \{A_l, A_{l'}\}_{qp} = \{B_l, B_{l'}\}_{qp} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 \text{上式} &= 0 + \sum_{l'} \frac{\partial R}{\partial A_l} \frac{\partial S}{\partial B_{l'}} \delta_{ll'} + \sum_{l'} \frac{\partial R}{\partial B_l} \frac{\partial S}{\partial A_{l'}} (-\delta_{ll'}) + 0 \\
 &= \sum_l \left(\frac{\partial R}{\partial A_l} \frac{\partial S}{\partial B_l} - \frac{\partial R}{\partial B_l} \frac{\partial S}{\partial A_l} \right) = \{R, S\}_{AB}.
 \end{aligned}$$

所以在这特殊基底变换下, 泊松括号不变.

我们计算 $\frac{d}{dt} \{q_i, p_j\}$,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \{q_i, p_j\} &= \{\dot{q}_i, p_j\} + \{q_i, \dot{p}_j\} = \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i}, p_j \right\} + \left\{ q_i, -\frac{\partial H}{\partial q_j} \right\} \\
 &= \sum_l \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_l} \frac{\partial p_j}{\partial p_l} - 0 \right\} + \sum_l \left\{ \frac{\partial q_i}{\partial q_l} (-) \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_l} - 0 \right\} \\
 &= \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} = 0.
 \end{aligned}$$

类似地, 我们可以证明 $\frac{d}{dt}\{q_i, q_j\} = \frac{d}{dt}\{p_i, p_j\} = 0$. 因此, 基本泊松括号不随时间改变, 从而定义泊松括号可以用任何时刻的 q, p 作为基底, 尽管 (1.1.9) 式的推导要求当时的 q, p 为基底.

1.2 经典场

在本节, 我们用前面的结果推导场作为拉格朗日体系和哈密顿体系的经典运动方程.

1.2.1 经典场方程

场是有无穷多自由度的体系, 为了研究场, 我们首先把它简化成一个有限自由度的体系, 将空间划分为格点, 如图 1.2.1. 考虑到对应关系

$$q_i \rightarrow \phi(\vec{x}_i) \rightarrow \phi(\vec{x}).$$

其中, $\vec{x}_i$ 是分立的坐标点 $\vec{x}_i = \{x_i, y_j, z_k\}$.

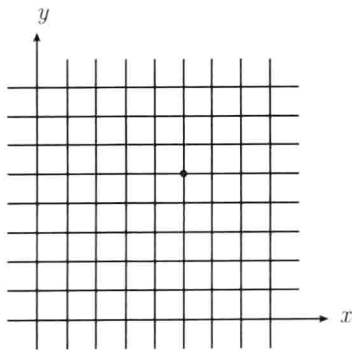


图 1.2.1

我们把场量 $\phi(\vec{x}_i)$ 作为拉格朗日系统的广义坐标, 把分立的 $\vec{x}_i$ 作为广义坐标的“指标”. 这样, 场就变成一个有限自由度的拉格朗日体系了. 因此, 拉格朗日量是 ϕ 和 $\dot{\phi}$ 的函数:

$$L(q_i, \dot{q}_i) \longrightarrow L(\phi(\vec{x}_i), \dot{\phi}(\vec{x}_i)).$$

由于通常场论是局域的, 否则会有因果律的破坏, 所以 L 是一些局域拉格朗日量 l 的和

$$L = \sum_{ijk} l_{ijk} = \sum (\Delta V) \mathcal{L}_{ijk}.$$

ΔV 是一个格点元胞的体积. l_{ijk} 只依赖于 $\{x_i, y_j, z_k\}$ 点及其附近的 ϕ 和 $\dot{\phi}$. 在以下推导中, 我们考虑最简单的情形, 比如说

$$l_{ijk} = f(\phi(x_i, y_j, z_k), \phi(x_{i+1}, y_j, z_k), \phi(x_i, y_{j+1}, z_k), \phi(x_i, y_j, z_{k+1}), \dot{\phi}(x_i, y_j, z_k)).$$

这个式子又可写成

$$l_{ijk} = f_1(\phi(x_i, y_j, z_k), \nabla_x \phi(x_i, y_j, z_k), \nabla_y \phi(x_i, y_j, z_k), \nabla_z \phi(x_i, y_j, z_k), \dot{\phi}(x_i, y_j, z_k)),$$

其中, 定义

$$\begin{aligned}\nabla_x \phi(x_i, y_j, z_k) &= \frac{1}{x_{i+1} - x_i} (\phi(x_{i+1}, y_j, z_k) - \phi(x_i, y_j, z_k)), \\ \nabla_y \phi(x_i, y_j, z_k) &= \frac{1}{y_{i+1} - y_i} (\phi(x_i, y_{j+1}, z_k) - \phi(x_i, y_j, z_k)), \\ \nabla_z \phi(x_i, y_j, z_k) &= \frac{1}{z_{i+1} - z_i} (\phi(x_i, y_j, z_{k+1}) - \phi(x_i, y_j, z_k)).\end{aligned}$$

于是, 我们有

$$L = \sum_{ijk}^V l_{ijk}(\phi(x_i, y_j, z_k), \nabla_x \phi(x_i, y_j, z_k), \nabla_y \phi(x_i, y_j, z_k), \nabla_z \phi(x_i, y_j, z_k), \dot{\phi}(x_i, y_j, z_k)).$$

当格点变得越来越密, 我们可以将求和变为积分:

$$\sum_{ijk}^V = \int_V \frac{dx dy dz}{\Delta V}.$$

由此给出

$$\begin{aligned}L &= \int_V \frac{dx dy dz}{\Delta V} l_{ijk}(\phi, \nabla_x \phi, \nabla_y \phi, \nabla_z \phi, \dot{\phi}) = \int_V dx dy dz \frac{l}{\Delta V} \\ &\rightarrow \int_V dx dy dz \mathcal{L}_{xyz}(\phi(x, y, z), \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y, z), \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y, z), \frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, z), \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, y, z)).\end{aligned}$$

其中, $\mathcal{L}_{xyz} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{l_{ijk}}{\Delta V}$.

我们看到, 在场论中, 坐标 (x, y, z) 相当于理论力学中广义坐标的指标, 而场量 ϕ 相当于广义坐标.

$$\dot{q}_i \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, y, z), \quad \text{因为指标没有变.}$$

$\mathcal{L}_{xyz}$ 称为拉格朗日密度, 它可能只依赖于场量及其对时空坐标的偏微商, 也可能明显地依赖于时空点的坐标, 即 (x, y, z, t) . 我们以后遇到的情形通常只考虑最简单的情形, 不考虑显含时空坐标.

例 考虑一根弦, 用 x 表示它的原始坐标, $\varphi = x' - x$ 是位移.

0

L

设单位长度的弹性系数为 κ , 也就是, 当单位长度的弦的伸长为 l 时, 弹性张力为 κl , 则当长度为 a , 伸长为 b 时, 弹性张力为 $\frac{\kappa}{a} b$, 拉到伸长 b 要克服弹力做功