2015 考研数学

考研数学 清华版 精品备考丛书

大纲配套辅导全书

数学（二）

胡金德 谭泽光◎主编

- 考试指导 —— 透析大纲 指点迷津
- 知识梳理 —— 直击考点 系统全面
- 例题解析 —— 思路丰富 科学总结
- 名师点拨 —— 透析规律 权威预测

清华大学出版社

（清华版）考研数学精品备考丛

·考研数学·

大纲配套辅导全书

数学（二）

胡金德　谭泽光◎主编

清華大學出版社
北京

内 容 简 介

本书是本系列丛书的主干书目，是考生进行基础复习的主要教材。全书分为高等数学和线性代数两部分，每一部分包含若干章节，每个章节包含大纲考点分析、概念方法总结、经典例题精解、名师点拨等板块，知识点全面，讲解详细，以帮助考生全面掌握考研数学的基础知识，为其后的复习打下坚实的基础。本书可供将参加2015年研究入学考试的学生备考使用。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学大纲配套辅导全书．数学二/胡金德，谭泽光主编．--北京：清华大学出版社，2014
（清华版考研数学精品备考丛书）
ISBN 978-7-302-36578-5

Ⅰ．①考…　Ⅱ．①胡…　②谭…　Ⅲ．①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第112339号

责任编辑：朱敏悦
封面设计：刘　波
责任校对：王荣静
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：21.25　　**字　　数**：536千字
版　　次：2014年7月第1版　　**印　　次**：2014年7月第1次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：45.00元

产品编号：059642-01

前　　言

考研数学是考研科目中特别重要的一个科目，考生要想在最后取得理想成绩，除了需要不懈的努力外，还必须要学会使用“巧劲”，而非“蛮劲”。正确选择自己在不同复习准备阶段的考试辅导用书，可以在复习过程中达到事半功倍的效果。本书就是这样一本为考生在考前基础复习阶段用心编写、量身定做的考研辅导书。

本书作为一本系统、全面的考研数学二知识点梳理及能力提高训练用书，适合考研同学在考研复习初期使用。本书分三部分进行编写，微积分、线性代数和概率论与数理统计。每一部分都是严格按照教育部考试中心编写的最新全国硕士研究生入学统一考试(数学二)考试大纲的要求，精心编写体例，概括总结每章知识点，重点突出，知识点讲解详略得当，帮助学生在复习时有的放矢，快速提升学习效率，达到良好的复习和备考效果。

本书编排结构及特点如下：

一、考点清晰，内容权威

本书每章的开始部分介绍考试内容与考试要求，明确给出最新数学考试大纲中的考试内容与考试要求，旨在让考生在复习时明确目标，突出重点，做到有的放矢。同时，方便考生在复习过程中不断地查缺补漏，完善知识体系。

另外，本书作者在编写过程中，通过深入研究考试大纲，把握其要求和精神，并结合近 10 年来的考研数学真题，分析其命题特点和动向，结合多年来的教学经验，精心编写此书，内容非常权威。

二、知识全面，详略得当

本书每节开始的知识梳理部分由基本概念和重要的定理、性质与公式两大部分组成，涵盖考研大纲的所有知识点，并做到详略得当。对于重要的知识点给予详细的论述，常考的题型给出常用的解题方法和解题步骤，旨在帮助考生熟悉考点，复习定理与公式，掌握考试的基本题型，建立考研数学的整体知识架构。

三、归纳总结，指点迷津

在体例设计上，作者通过精心研究考研数学的命题规律，将考试内容分为不同的专题进行讲解，通过归纳总结历年考试类型，力求涵盖考试中可能出现的所有考试题型，为考生指点迷津。在题目选择上既有紧扣考试内容常考的经典题目，也有许多发散思维的新题目，考生对常考题型要做到了然于胸，对一些新颖的题目要做到先记后用、触类旁通。

四、答案解析详细，解题方案多样

本书在题目讲解上，力求做到准确、详细，并在一些解题的关键处给出提示和注解，为考生提供详细的答案解析，从解析一道题学会分析解答类似的题目，同时，对于同一问题，本书给出

了多种思路的解题方案，以帮助考生灵活地运用所学知识，发散思维。考生在阅读完此部分后，定能加深对定义、定理的理解，极大提升解题的能力。

希望本书能成为广大考生的良师益友，由于时间仓促，书中难免有疏漏之处，诚请各位专家和读者批评指正。

最后，祝愿每一位考生都取得优异的成绩，考取理想的学府。

编　者

2014 年 6 月

目　　录

第一部分　高等数学

第二部分 线性代数

第一部分

高等数学

第一章　函数　极限　连续

考试内容

函数的概念及表示法；函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；复合函数、反函数、分段函数和隐函数；基本初等函数的性质及其图形；初等函数；函数关系的建立；数列极限与函数极限的定义及其性质；函数的左极限与右极限；无穷小量和无穷大量的概念及其关系；无穷小量的性质及无穷小量的比较；极限的四则运算；极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则；两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e};$$

函数连续的概念；函数间断点的类型；初等函数的连续性；闭区间上连续函数的性质.

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

第一节　函　数

知识梳理

一、基本概念

定义 1(邻域)　设 $\delta>0$，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 一个邻域，并称此邻域为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$. 记 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$，

称为 a 的去心 δ 邻域，相应地，称开区间 $(a-\delta,a)$ 为 a 的左 δ 邻域，称开区间 $(a,a+\delta)$ 为 a 的右 δ 邻域.

定义 2(函数) 设数集 $D \subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为 $y=f(x), x \in D$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f = D$.

函数定义中，对每个 $x \in D$，按对应法则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 f 在 x 处的函数值，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系，通常称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

需要指出，按照上述定义，记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的：前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便，习惯上常用记号"$f(x), x \in D$"或"$y=f(x), x \in D$"来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 f.

函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在 $\mathbf{R}$ 内，因此构成函数的要素是：定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

对于自变量 x 的不同取值范围，对应法则用不同式子来表示，这样的函数通常叫作分段函数.

【注】 分段函数是一个函数，不可将每一段的表达式当作一个函数.

常见的几种分段函数：

绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $R_f = [0, +\infty)$，图形如图 1.1 所示.

符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$，图形如图 1.2 所示.

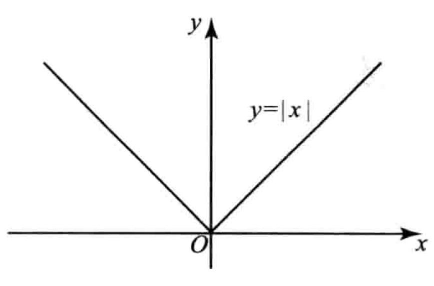

图 1.1

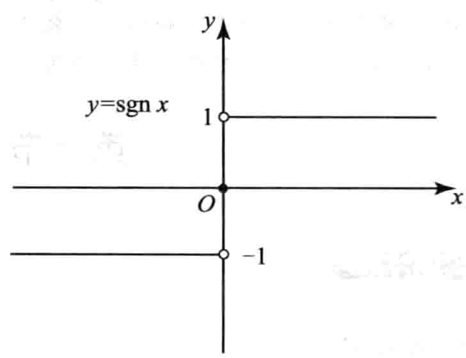

图 1.2

定义 3(函数的有界性) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1,使得

$$f(x)\leqslant K_1$$

对任一 $x\in X$ 都成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界,而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 如果存在数 K_2,使得

$$f(x)\geqslant K_2$$

对任一 $x\in X$ 都成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界,而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界. 如果存在正数 M,使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任一 $x\in X$ 都成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界;这就是说,如果对于任何正数 M,总存在 $x_1\in X$,使 $|f(x_1)|>M$,那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

【注】 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

定义 4(函数的单调性) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

定义 5(函数的奇偶性) 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x\in D$,$f(-x)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x\in D$,$f(-x)=-f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为奇函数.

【注】奇函数的图形关于坐标原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

定义 6(函数的周期性) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 l,使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$,且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,l 称为 $f(x)$ 的周期,通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

【注】并非每个周期函数都有最小正周期.

例如:狄利克雷(Dirichlet) 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

容易验证这是一个周期函数,任何正有理数 r 都是它的周期. 因为不存在最小的正有理数,所以它没有最小正周期.

定义 7(隐函数) 对包含变量 x,y 的方程 $F(x,y)=0$,当 x 取某区间内的任一值时,总有满足此方程的唯一的 y 值存在,则称方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数 $y=y(x)$.

定义 8(反函数) 设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射,则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$,称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数.

按此定义,对每个 $y\in f(D)$,有唯一的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,于是有

$$f^{-1}(y)=x.$$

习惯上,我们把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

【注】$y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是一样的,而 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

定义 9(复合函数) 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_l,函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g,且其值域 $R_g\subset D_l$,则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)],x\in D_g$$

称为由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数,它的定义域为 D_g,变量 u 称为中间变量. 函数 g 与函数 f 构成的复合函数,通常记为 $f\circ g$,即

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)].$$

定义 10(函数的运算) 设函数 $f(x),g(x)$ 的定义域依次为 D_1,D_2,且 $D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$,则可以定义这两个函数的下列运算:

和(差) $f\pm g$: $(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),x\in D$;

积 $f\cdot g$: $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x),x\in D$;

商 $\dfrac{f}{g}$: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)},x\in D\backslash\{x\mid g(x)=0,x\in D\}$.

定义 11(基本初等函数)

幂函数:$y=x^a$($a\in\mathbf{R}$ 是常数),

指数函数:$y=a^x$,($a>0$ 且 $a\neq1$),

对数函数:$y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$,特别当 $a=\mathrm{e}$ 时,记为 $y=\ln x$),

三角函数:如 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x$ 等,

反三角函数:如 $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x$ 等.

以上这五类函数统称为基本初等函数.

【注】由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的函数,称为初等函数.

二、重要性质、公式与结论

1. 函数有界的充分条件

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界;

(2) 设 $f(x)$ 在数集 U 上有最大值(最小值),则 $f(x)$ 在 U 上有上(下)界.

【注】判定函数有界,一般先取绝对值,后利用不等式放缩法或直接求导计算最大(小)值.

2. 单调性

(1) 单调函数的反函数仍单调,且单调性相同;

(2) 复合函数 $f[g(x)]$ 的单调性:若 f,g 的单调性相同,则 $f[g(x)]$ 单调递增;若 f,g 的单调性相反,则 $f[g(x)]$ 单调递减;

(3) 奇函数若在某区间单调增加(或减少),则在对称区间单调增加(或减少);

偶函数若在某区间单调增加(或减少),则在对称区间单调减少(或增加).

3. 奇偶性

奇偶函数的运算性质

(1) 奇函数的代数和或差仍为奇函数,偶函数的代数和或差仍为偶函数;

(2) 偶数个奇函数或任意个偶函数之积为偶函数,奇数个奇函数之积为奇函数;

(3) 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数;

(4) 一个非零的奇函数与一个非零的偶函数的和函数为非奇非偶函数.

(5) 定义域关于原点对称的函数 $f(x)$ 可表示为一个奇函数与一个偶函数之和:

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

导数函数与原函数的奇偶关系

(1) 可导奇函数的导函数是偶函数;

(2) 可导偶函数的导函数是奇函数;

(3) 连续奇函数的任何一个原函数都是偶函数;

(4) 连续偶函数的原函数 $F(x)=\int_0^x f(x)+C$,只有当 $C=0$ 时才是奇函数.

4. 周期函数的运算性质

(1) 若 T 是 $f(x)$ 的周期,则 $f(ax+b)$的周期为$\frac{T}{|a|}$;

(2) 若 $f(x)$、$g(x)$ 均是以 T 为周期的周期函数,则 $f(x)g(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数.

5. 反函数的重要结论

(1) $y=f(x)$ 的定义域是其反函数的值域;

(2) 只有自变量与因变量一一对应的函数才有反函数,定义域上单调的函数必有反函数;

(3) 奇函数的反函数也是奇函数;

(4) 函数与其反函数具有相同的单调性.

例题解析

题型一　求函数的定义域与函数表达式

【题型分析】

1. 求抽象函数的定义域

对于复合型一般可由题设所给出条件的定义域进而确定出所求抽象函数的定义域,对于运算型一般应先求出各个函数的定义域,然后再求交集.

2. 求函数表达式

对于初等函数的复合及初等函数与分段函数的复合可使用代入法和分析法,对于两分段函数的复合可考虑画图分析.

【例 1.1】 设函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$,则函数 $y=f(-x)$ 的反函数是 【　】

(A) $y=g(-x)$.　　　　(B) $y=-g(x)$.

(C) $y=-g(-x)$.　　　　(D) $y=-g^{-1}(x)$.

【解析】 选(B).

因为 $g(x)=f^{-1}(x)$,则 $y=f(-x)$ 的反函数是 $y=-f^{-1}(x)=-g(x)$.

【例 1.2】 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x<4,\\ x, & 4<x\leqslant 6,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<2,\\ 2+x, & 2<x\leqslant 4,\end{cases}$ 则 $f[g(x)]=$ ________.

【解析】由题可得

$$f[g(x)]=\begin{cases}\sqrt{g(x)}, & 0\leqslant g(x)<4,\\ g(x), & 4\leqslant g(x)<6.\end{cases}$$

当 $g(x)=x^2$ 时,由 $\begin{cases}0\leqslant x^2<4\\ 0\leqslant x<2\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant x<2$,而 $\begin{cases}4<x^2\leqslant 6\\ 0\leqslant x<2\end{cases}$ 无解,故

$$f[g(x)]=\sqrt{g(x)}=x(0\leqslant x<2).$$

当 $g(x)=2+x$ 时,由 $\begin{cases}4<2+x\leqslant 6\\ 2<x\leqslant 4\end{cases}\Rightarrow 2<x\leqslant 4$,而 $\begin{cases}0\leqslant 2+x<4\\ 2<x\leqslant 4\end{cases}$ 无解,故

$$f[g(x)]=g(x)=2+x(2<x\leqslant 4),$$

综上,得

$$f[g(x)]=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<2,\\ 2+x, & 2<x\leqslant 4.\end{cases}$$

【例 1.3】 已知 $f(x)=\sin x$,$f[\varphi(x)]=1-x^2$,则 $\varphi(x)=$ ________,$\varphi(x)$ 的定义域为________.

【解析】 因为 $f(x)=\sin x$,所以 $f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2$,则

$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2).$$

因为正弦函数的值域为 $[-1,1]$,由反函数的定义得 $|1-x^2|\leqslant 1$.解得 $x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$,即为 $\varphi(x)$ 的定义域.

题型二　函数的性质

【例 1.4】 若 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数,且图形关于 $x=2$ 对称,则 $f(x)$ 一定是周期函数,其周期 $T=$ ________.

【解析】 因图形关于 $x=2$ 对称,故 $f(x)=f(4-x)$.又 $f(x)$ 为偶函数,则

$$f(x)=f(-x)=f(4+x)\Rightarrow T=4.$$

【例 1.5】 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间有界　　【　】

(A) $(-1,0)$.　　(B) $(0,1)$.　　(C) $(1,2)$.　　(D) $(2,3)$.

【解析】 选(A).

【思路一】 由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 或 $x=2$ 附近均出现无穷大的情况,故排除选(B)、(C)、(D).

【思路二】 $|f(x)|=\left|\dfrac{\sin(x-2)}{(x-1)(x-2)^2}\right|$,故当 $x\in(-1,0)$ 时,