

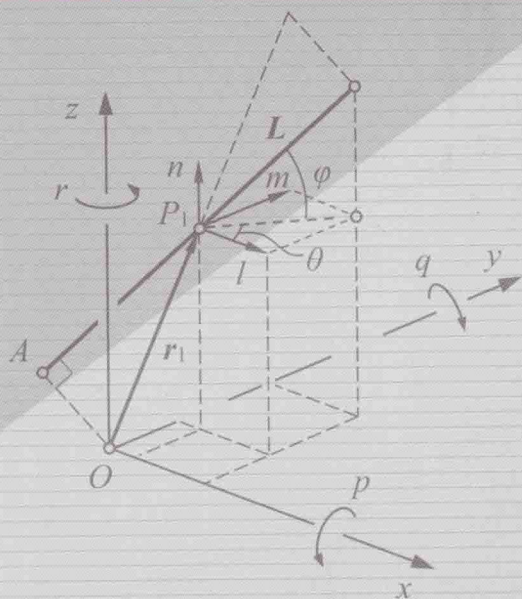
机械工程前沿著作系列 HEP
HEP Series in Mechanical Engineering Frontiers MEF

机器人科学与技术丛书

机构学与机器人学的 几何基础与旋量代数

戴建生 著

Geometrical Foundations and Screw Algebra for
Mechanisms and Robotics



高等教育出版社

机械工程前沿著作系列 HEP
HEP Series in Mechanical Engineering Frontiers MEF

机器人科学与技术丛书

机构学与机器人学的 几何基础与旋量代数

Geometrical Foundations and Screw Algebra for
Mechanisms and Robotics

戴建生 著

JIGOUXUE
YU
JIQIRENXUE DE
JIHE JICHU
YU
XUANLIANG DAISHU

高等教育出版社·北京

图书在版编目(CIP)数据

机构学与机器人学的几何基础与旋量代数 / 戴建生
著. -- 北京: 高等教育出版社, 2014. 7
ISBN 978-7-04-033483-8

I. ①机… II. ①戴… III. ①机构学-几何基础②机
构学-旋量③机器人学-几何基础④机器人学-旋量
IV. ①TH112 ②TP24

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第039972号

策划编辑 刘占伟
插图绘制 尹莉

责任编辑 刘占伟
责任校对 殷然

封面设计 杨立新
责任印制 韩刚

版式设计 王艳红

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 北京汇林印务有限公司
开本 787mm×1092mm 1/16
印张 31
字数 580千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版次 2014年7月第1版
印次 2014年7月第1次印刷
定价 89.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 33483-00

内容简介

本书起始于直线几何与线性代数,自然过渡到旋量代数与有限位移旋量,紧密联系李群、李代数、对偶数、Hamilton 四元数、Clifford 对偶四元数等现代数学基础,首次全面、深入地阐述旋量代数在向量空间与射影几何理论下的演变与推理,提出旋量代数与李代数、四元数代数以及有限位移旋量与李群之间的关联理论,展现出旋量理论与经典数学以及现代数学的内在关联,总结提炼出许多论证严密、意义明确的引理、定理与推论,由此阐述第一篇“几何基础、旋量代数与李群、李代数”,给出机构学与机器人学的几何基础与数学理论。

在第二篇“旋量系理论及机构约束与自由运动”中,运用集合论与线性代数等经典数学推导并揭示旋量系、旋量多重集及其阶数与基数的本质内涵,提出并阐述旋量系关联关系理论、零空间构造理论、旋量系分解理论及旋量系对偶理论。通过演绎旋量系这四大基本理论在过约束机构、抓持与并联机构约束分析、机构活动度等机构学与机器人学基础理论问题中的推理与应用,提出并系统地建立了完整的旋量系理论,进而奠定机构与机器人约束与自由运动的理论基础。

在第三篇“旋量代数与几何基础的机构学与机器人学应用”中,运用旋量代数与旋量系理论研究 Sarrus 机构、Hoberman 机构、Schatz 机构、Watt 机构等经典机构以及变胞并联机构、闭环支链并联机构等新型机构及其在机器人中的应用,提出并联机构四大基本旋量系、活动度扩展准则、抓持扩展矩阵、弹性系数融合矩阵、多指灵巧手“变胞活动手掌”等能够解决机构学与机器人学中实际问题的一系列新概念与新理论,完整地演绎旋量代数与旋量系理论在机构学与机器人学中的应用。

本书全面系统地阐述旋量代数及其几何基础,演绎其推理运算。该书层次清晰,推理严谨,循序渐进,引人入胜,含有许多准确、严密的定义、引理、定理、推论、注释、脚注、证明以及详尽的公式推导过程,适合作为旋量理论、机构学、机器人学、制造系统与自动化、精密仪器、计算机科学及图形学等相关专业的研究生教材或高年级本科生教材,也可作为相关科研人员的参考用书。

《机器人科学与技术》丛书编委会

名誉主编: 熊有伦

主 编: 戴建生

委员 (按姓氏笔画排序):

丁 汉	丁华峰	丁希仑	于靖军	王田苗	王 宏	王国彪
王树新	王 皓	王德伦	方跃法	孔宪文	邓宗全	甘东明
朱向阳	刘辛军	刘 宏	刘宏斌	刘金国	刘荣强	刘景泰
孙立宁	李 兵	李泽湘	李建民	李树军	李洪波	李秦川
李瑞琴	李端玲	杨广中	杨廷力	邹慧君	沈惠平	张 丹
张克涛	张建伟	张宪民	陈学东	陈贵敏	陈 超	陈 焱
陈义明	武传宇	易建强	金国光	赵永生	赵 杰	赵铁石
赵景山	侯增广	姚立纲	徐扬生	徐 凯	高 峰	郭为忠
郭进星	黄 田	黄 真	黄 强	曹政才	崔 磊	康荣杰
葛巧德	韩建达	蔡敢为	廖启征	谭 民	熊蔡华	颜鸿森
戴振东	魏国武	Andreas Müller	Gim Song Soh			

献给我的祖父母、大姑母、父母亲和夫人丛建青、儿子戴明博

与本书同时发行

Dai, J. S. (2014) *Screw Algebra and Kinematic Approaches for Mechanisms and Robotics*, Springer, London.

对本书的引用可采用下面形式

Dai, J. S. (2014) *Geometrical Foundations and Screw Algebra for Mechanisms and Robotics*, Higher Education Press, Beijing, also *Screw Algebra and Kinematic Approaches for Mechanisms and Robotics*, Springer, London.

序 言

戴建生教授在机构学方面的研究工作非常广泛,具有坚实的数学功底与宽广的专业知识,在机构学和机器人学等领域的造诣很深。他系统深入地探索了旋量代数与旋量系理论,取得了丰硕的研究成果。从1991年起的二十多年里,戴教授在国际期刊上连续发表了关于机构三瞬心定理的向量研究;关于旋量抓持矩阵扩展算法、有限位移旋量、变胞机构拓扑与活动度演变、旋量系关联关系理论、旋量系零空间构造理论、并联机构旋量系理论等方面的研究;深入研究了理论运动学两百余年的发展史,提出了有限位移旋量与李群的关联理论。上述相关内容在本书中都有所反映。戴建生教授将数学与机构学研究紧密结合,二十多年如一日,潜心研究,锐意进取,开拓创新,逐步形成了特色鲜明的机器人机构、并联机构、过约束机构、变胞机构等机构学理论。

这本专著凝聚了戴教授二十多年的心血,描绘出作者二十多年来的研究历程,总结提炼出许多深奥的定理,展现出广阔的应用前景,适于作为科研人员与研究生学习几何基础、旋量理论、李群与李代数机器人学以及机构学的参考教材。本书层次清晰,推理严谨,循序渐进,引人入胜,有助于提升研究人员的学术水平和理论高度。

我和戴建生教授认识多年,很高兴接受他的邀请,为本书作序。他在一年以前邀请我作序的时候,初稿已经完成。时至今日,这本著作又经历了多次修改与完善。从字里行间以及严谨的推理中可以看出,这是一本经过细心推敲与缜密推导的论著。我希望这本论著的出版能够为我国机构学与机器人学领域的发展起到推动作用,为实现我国“机器人强国之梦”做出贡献。



中国科学院院士
华中科技大学教授

2013年春

前 言

当今世界,科学与技术成为提高综合国力的关键支撑,机构学与机器人学成为装备制造、能源开发、航空航天等领域不可或缺的重要组成部分。机构以简洁抽象的形式、广博深邃的原理描述了机器运动部件的几何关系与运动规律,展现了机器人的运动机理与操作过程,成为装备与机器人的基本骨架与执行部分。在机构与机器人的研究中,旋量理论成为主要工具,几何分析成为重要手段,为机构与机器人设计、开发与应用做出了重要的贡献。可以说,国民经济和科学技术离不开机构学与机器人学,机构学与机器人学离不开几何学和旋量代数。

几何学与代数学有着密不可分的联系,从《周髀算经》中的“勾股各自乘,并而开方除之”到古希腊的“毕达哥拉斯定理”,从欧几里得的《几何原本》到东汉前期的《九章算术》,几何自古以来就同以算术形式呈现的代数有着共同的渊源和密切的联系。这种关联在 19 世纪各个数学分支快速发展中得到了有效的验证,在旋量代数中得到了完美的展现。

旋量代数研究直线在空间的旋转和平移,通过属于五维射影李代数 $se(3)$ 的瞬时旋量研究刚体在空间的运动,并于 20 世纪 90 年代开始结合属于六维特殊欧几里得群 $SE(3)$ 的有限位移旋量研究刚体的空间位姿。旋量理论研究可以追溯到 1763 年意大利数学家 Giulio Mozzi 提出的刚体瞬时运动轴、1806 年法国数学家及物理学家 Louis Poincot 提出的合力中心轴定理以及 1830 年法国数学家 Michel Floréal Chasles 提出的刚体位移理论。

旋量理论研究在 19 世纪进入了鼎盛时期。1830 年,Chasles 首次将力与运动分离,提出空间任意运动均可表示为绕一轴的旋转和沿该轴的平移。Chasles 的研究为今天的有限位移旋量以及旋量矩阵研究奠定了基础。旋量理论研究在 19 世纪 60 年代取得了许多重大突破,初步形成了旋量理论体系。在这一时期,英国数学家、皇家科学院院士 Arthur Cayley 建立了空间直线的六维坐标,德国数学家、波恩大学数学与物理学教授 Julius Plücker 建立了 Plücker 坐标。Cayley 和 Plücker 的研究系统地总结了过去两个世纪几何学的研究成果并建立了这些成果与当时代数研究的紧密联系。这一时期旋量理论研究的重大突破是 Plücker 的博士毕业生 Christian Felix Klein (1868 年获得博士学位) 与剑桥大学天文学家、几何学教授 Robert Stawell Ball

爵士于 1871 年分别独立提出了互易旋量的概念, 这一研究建立了旋量系的内部关联, 完善了旋量理论体系。Klein 的后续研究将旋量理论研究推进到射影空间, 将旋距为零的旋量即线矢量由三维空间中的直线映射为五维射影空间中超二次曲面上的点, 这种五维射影空间的超二次曲面也称为 Klein 二次曲面。

19 世纪下半叶, 欧洲经历了第二次工业革命, 经济飞速发展, 数学领域研究不断推进。在这一大环境下, 几何学与代数学的研究出现了几次重大突破。其中具有代表性的是剑桥大学天文学家 and 几何学家、英国皇家科学院院士、都柏林皇家科学院应用数学与机构学教授 Robert Stawell Ball 爵士对旋量理论所作的系统研究。其间, Ball 于 1870 年至 1874 年发表了数篇研究旋量理论的文章, 并于 1876 年发表了旋量研究的论著, 使旋量理论研究达到了巅峰。

与此同时, 伦敦大学数学家和力学家、英国皇家科学院院士 Clifford 继其在 1873 年提出对偶四元数后, 又于 1882 年系统地研究了旋量同向量、四元数及对偶四元数的关系, 总结出了著名的“旋量表”, 揭示了旋量与四元数代数 (后来称为“Clifford 代数”) 的关联。对于这将近半个世纪的研究, Ball¹ 在世纪之交的 1900 年出版了旋量理论专著, 作了系统的表述和总结, 从而奠定了旋量理论的数学基础。

此后不久, 由于 Felix Klein 提出了五维射影空间的超二次曲面, 德国数学家 Eduard Study 发明了对偶角, 旋量理论研究得以进一步发展。

综上所述, 旋量理论研究在 19 世纪下半叶和 20 世纪之初达到了高峰。旋量的美妙体现在它的几何特性及其与许多数学分支的耦合和交叉, 体现在它的几何内涵以及与代数的有机融合。

旋量代数与李群、李代数的有机结合在 19 世纪中叶李代数未成形前已经初露端倪。19 世纪下半叶, 对旋量研究有突出贡献的德国数学家 Felix Klein 继其于 1871 年提出互易旋量后, 于 1872 年分类与挖掘了射影几何与群论的几何特性及其与许多几何分支的关联, 提出了著名的 Erlangen 纲领², 从而同挪威数学家 Marius Sophus Lie 一起奠定了李群和李代数的基础。Klein 在研究李群和李代数的同时对互易旋量以及超二次曲面做了大量研究³, 因此他具有通晓旋量代数与李群、李代数理论的优势, 进而将李群研究合理地扩展到了旋量的几何研究领域。这些理论的关联也可从 Clifford 的研究中得到启示, 在其研究中, 瞬时旋量被视为李代数的一部分。

¹Ball, R. S. (1900) *A treatise on the theory of screws*, Cambridge University Press, Cambridge.

²Klein, F. (1872) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, *Mathematische Annalen*, **43** (1893), pp. 631-100, also: *Gesammelte Abh.* **1**, Springer (1921), pp. 460-497; English translation by Haskell, M.: A comparative review of recent researches in geometry, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1892-1893, **2** (10): 215-249, <http://arxiv.org/abs/0807.3161>.

³Klein, F. (1908) *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis; Teil II, Geometrie*, B. G. Teubner, Leipzig; English translation: *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Geometry*, Dover (2004), NY.

在经历了两次世界大战后,旋量理论研究开始复苏。1947年,美国 MD Anderson 杰出数学家 Brand⁴ 系统地研究了旋量的运算,出版了向量和张量分析专著。该书第二章为矩量(泛旋量)代数,提出了旋量的运算规则。这些研究从 20 世纪 60 年代起得到了机构学研究者的重视。首先苏联的机构学专家 Dimentberg⁵ 发表了相关的研究论文,随后澳大利亚莫纳什大学机构学教授 Kenneth Hunt⁶ 于 1978 年出版了机构运动几何学专著,荷兰数学家 Oene Bottema 和斯坦福大学机构学教授 Bernard Roth⁷ 于 1979 年出版了理论运动学专著,加利福尼亚大学欧文分校机构学教授 Michael McCarthy⁸ 于 1990 年出版了介绍理论运动学著作,佛罗里达大学机构学教授 Joseph Duffy⁹ 于 1996 年出版了关于旋量平面机理与应用专著。Hunt 的专著首次从机构学家的角度全面地审视和分析了旋量,系统地提出了旋量系并阐述了其应用。Bottema 和 Roth 的专著展示了理论运动学的丰厚数学基础,独到地将理论运动学与现代数学关联起来。McCarthy 的专著用简洁的语言介绍了与理论运动学相关的数学知识,建立了四元数与机构学的紧密联系并以此进行了机构综合。Duffy 的专著将旋量几何与具体机构相关联,从而展现了 Jacobian 矩阵及其逆矩阵的几何含义。自此以后,在国际上有关旋量或理论运动学的专著只有 2004 年亚利桑那大学机构学教授 Joseph Davidson 与 Kenneth Hunt¹⁰ 合著的旋量理论与机器人学一书。

21 世纪最初的十年,随着机器人学研究热潮的兴起,旋量越来越受到许多机器人学专家的青睐。国际上几乎三分之一以上研究机器人的文章采用了旋量方法,许多研究机器人的书籍也经常用到旋量,可以说,旋量已成为机器人研究的重要工具。在国际数学界中,旋量理论研究已经出现在许多李群、李代数、微分流形的专著中,许多研究 Clifford 代数的文章也直接或间接地研究了旋量代数。总而言之,旋量理论的研究在 21 世纪又出现了新的飞跃,与李群、李代数的结合正在开始。

我对旋量理论的青睐始于对数学的钟爱。记得第一次感受到数学的美妙是在 1967 年至 1968 年期间。那时,我无意间邂逅了父亲珍藏的 50 年代的旧皮发黄、晦涩难懂的因式分解书。书中有大量变量交错的题目,要求逐渐找出相同变量,提取公因式,再重新组合。那些题目看似繁琐难解,但最终的答案总能显示出优美与对称,

⁴Brand, L. (1947) *Vector and tensor analysis*, 7th printing (1958), John Wiley & Sons, Inc. New York.

⁵Dimentberg, F. M. (1965) *The screw calculus and its application to mechanics* (in Russian) Izdat. Nauka, Moscow, 1965, English Translation, Foreign Technology Division, U. S. Department of Commerce, (N. T. I. S.), No. AD 680-993, WP-APB, Ohio.

⁶Hunt, K. H. (1978) *Kinematic geometry of mechanisms*, Clarendon Press, Oxford.

⁷Bottema, O. and Roth, B. (1979) *Theoretical kinematics*, North-Holland, Amsterdam.

⁸McCarthy, J. M. (1990) *An introduction to theoretical kinematics*, The MIT Press, London.

⁹Duffy, J. (1996) *Statics and kinematics with applications to robotics*, Cambridge University Press, New York.

¹⁰Davidson, J. K. and Hunt, K. H. (2004) *Robots and screw theory: Applications of kinematics and statics to robotics*, Oxford University Press, New York.

如同诗词的对仗, 韵律的协畅。在 1969 年 (中学复课) 至 1972 年 (高中) 期间, 我喜欢上了三角函数和解析几何, 几何的对称与美妙将我引进了数学的殿堂。1978 年到 1984 年在上海交通大学进行本科和硕士研究生学习期间, 我对定理推导的严谨性和解题过程的完美性感触颇深, 对数学的理解和体会也提升到了一个新的境界。线性代数的完整理论, 矩阵推算的内在关联以及几何演变的空间机理使我如痴如醉。

1989 年我来到英国 Salford 大学进行旋量理论研究, 有几个月与熊有伦院士共处的时间。接续熊院士的工作, 我用直线几何学和旋量理论解决抓持的无摩擦和有摩擦问题, 并研读了熊院士推荐的 Rockafellar¹¹ 的凸集论, 深有感触。在 20 世纪 90 年代初, 英国 Salford 大学对旋量理论的研究十分活跃, 它是英国乃至欧洲旋量理论研究的中心。由 John Sanger 教授和 David Kerr 博士牵头的机构学中心经常组织学术研讨会, 并不断地有国际旋量理论专家来此访问。在这期间, 我多次聆听 Joseph Duffy 教授的旋量理论讲座, 参与开放大学 Joseph Rooney 博士的代数空间的研讨, 听取 MIT Steven Dubowski 教授讲授机器人的旋量应用, 与 Joseph Davidson 教授谈及有限位移旋量, 同澳大利亚机构学专家 Jack Phillips 教授讨论位移旋量流形, 向俄勒冈大学机构学专家 Gene Fichter 教授讲述旋量系关联关系。在这一学术思想极其活跃的时期, 我经常接触旋量研究的前沿理论。记得 Duffy 教授在 1990 年发表其意义重大的编者按之前, 特意将这篇关于机器人学中运动与力的文章传真至我当时所在的研究组。后来才知道, 这篇编者按的原由是, Duffy 教授访问 Salford 大学期间, 熊有伦教授提出了旋量 Jacobian 矩阵研究中的一个重要问题, 即量纲问题。Duffy¹² 教授这篇文章向全球机构学和机器人学的研究者敲响了警钟, 指出量纲在 Jacobian 矩阵中的重要性和不可忽略性。

这些前沿理论研究以及在抓持理论研究和机构设计中遇到的问题, 将我带入经典论著的海洋, 经常夜深人静时还在牛顿大楼津津有味地翻读着一些数学和旋量理论领域的经典著作, 内容涵盖 20 世纪 20 年代 Woods¹³ 的高等几何, 40 年代 Brand⁴ 的张量分析, 50 年代 Maxwell¹⁴ 的齐次空间, 60 年代 Dimentburg⁵ 的旋量演算, 70 年代 Hunt⁶ 的机构运动几何、Bottema 与 Roth⁷ 的理论运动学以及 Strang¹⁵ 的关于向量空间与正交子空间理论的线性代数, 80 年代 Duffy¹⁶ 的机构几何轨迹分析, 90

¹¹Rockafellar, R. T. (1970)*Convex analysis*. Princeton University Press, New Jersey.

¹²Duffy, J. (1990) The fallacy of modern hybrid control theory that is based on 'orthogonal complements' of twist and wrench spaces. *J. Rob. Syst.*, 7 (2): 139-144.

¹³Woods, F. S. (1922)*Higher geometry, an introduction to advanced methods in analytic geometry*, Ginn and Company, New York.

¹⁴Maxwell, E. A. (1951)*General homogeneous coordinates in space of three dimensions*, Cambridge University Press, Cambridge.

¹⁵Strang, G. (1976)*Linear algebra and its applications*, Harcourt Brace Jovanovich Inc., Philadelphia.

¹⁶Duffy, J. (1980)*Analysis of mechanisms and robot manipulators*, John Wiley and Sons, New York.

年代 McCarthy⁸ 的理论运动学简介以及 Murray、Li 和 Sastry¹⁷ 的机器人操作数学基础。通过这些经典著作以及 60 年代、70 年代 Yang 与 Freudenstein¹⁸、Woo 与 Freudenstein¹⁹ 发表的许多旋量文章,我深深感受到,旋量理论凭借其自身发展的严谨性、学科交融的跨越性以及机构学与机器人学方面的实用性,在一个三维实体空间和抽象的六维空间以及五维射影空间中迸发出无限的魅力,令人寻味无穷。许多经典的机器人学理论,诸如 20 世纪 80 年代 Paul²⁰ 的齐次变换与机械臂 RPY 旋转理论以及 Craig²¹ 的机械臂姿态各种描述与变换理论,为旋量代数提供了应用的领域与驰骋的疆野。

在旅英二十五年特别是十五年的国内交流中,我难忘 1989 年与熊有伦院士在 Salford 大学用旋量理论研究机器人抓持以及 1998 年在华中科技大学及其后的多次讨论,1999 年起与张启先院士在变胞机构领域的连续合作以及 2001 年启动的国家自然科学基金委的第一个变胞机构项目,2000 年与黄真教授在英国剑桥纪念 Ball¹ 论著发表 100 周年学术研讨会上的研讨及其后续的讨论,2004 年夏与邹慧君教授在重庆第十四届中国机构学会议期间以及其后对机构学发展的多次讨论与畅谈,2005 年夏与杨廷力教授在北京航空航天大学纪念张启先院士诞辰 80 周年学术研讨会时的讨论、交流及其后续的多次讨论。此外,我对 20 世纪 80 年代与 90 年代国内的划时代论著也深有感触。张启先²² 院士 1984 年的《空间机构分析与综合》在国内首次提出旋量的概念,并归纳与演示了许多机构的分析与综合。熊有伦院士²³ 1989 年的《精密测量数学方法》从精密测量角度为机器人抓持理论奠定了雄厚的理论基础。杨廷力²⁴ 教授 1996 年的《机械系统基本理论》以约束为基础建立了机构的结构学、运动学与动力学统一模型。黄真、孔令富与方跃法²⁵ 教授 1997 年的《并联机器人机构学理论及控制》奠定了并联机构的理论基础,首次系统地应用旋量理论对并联机构进行分析与性能研究。

本书作者在过去三十余年的研究中及近十五年与国内诸多大学教师与学生的交流中发现,大家都在寻找一部完整、系统地研究旋量理论及其代数方法的教材或专

¹⁷Murray, R. M., Li, Z. and Sastry, S. S. (1994) *A mathematical introduction to robotic manipulation*, CRC Press, New York.

¹⁸Yang, A. T. and Freudenstein, F. (1964) Application of dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms, *ASME J. Appl. Mech.*, **86** (2), 300-309.

¹⁹Woo, L. S. and Freudenstein, F. (1970) Application of line geometry to theoretical kinematics and the kinematic analysis of mechanical systems, *ASME J. Mechanisms*, **5**, 417-460.

²⁰Paul, R. P. (1981) *Robot manipulators: Mathematics, programming and control*, MIT press, Cambridge, MA.

²¹Craig, J. J. (1986) *Introduction to robotics: Mechanics and control*, Addison-Wesley, Reading, MA.

²²张启先 (1984) 空间机构的分析与综合:上册,机械工业出版社,北京.

²³熊有伦 (1989) 精密测量的数学方法,机械工业出版社,北京.

²⁴杨廷力 (1996) 机械系统基本理论:结构学、运动学、动力学,机械工业出版社,北京.

²⁵黄真,孔令富,方跃法 (1997) 并联机器人机构学理论及控制,机械工业出版社,北京.

著。本书基于作者二十五年在英国的研究成果,以及在国内一些大学十五年的授课、讲座和交流的讲稿,系统而深入地阐述机构学与机器人学的几何基础以及旋量理论的数学基础及其代数方法。全书从直线几何、射影几何与向量代数出发,循序渐进、由浅入深地对旋量代数、李群与李代数、四元数及其关联论的相关概念、理论和公式进行仔细推敲、系统推导以及详尽论述,旨在将复杂而高深的旋量理论清晰地展现在读者眼前,并在此基础上将其升华为简洁、优美、实用的数学公式与推理,从而回归到数学的内涵本质上。本书同时巧妙地应用经典数学理论,展现这些经典理论与现代数学的内在联系,深入浅出地引领读者到旋量代数及其与李群、李代数的关联研究的深处。

本书是基于射影几何、仿射几何及向量代数与矩阵内在特性研究旋量代数、李群与李代数、四元数代数、代数关联论以及旋量系理论的专著。本书基于旋量的几何内涵首次深入系统地阐述旋量代数的推理运算,揭示旋量代数与李群、李代数的内在关联,提出并建立涵盖旋量代数、李群与李代数、四元数代数的关联论以及贯通旋量代数与其在机构学、机器人学中应用的旋量系理论,旨在满足国内学者与学生长期以来对详细介绍旋量代数及其几何内涵的教材和论著的需求。

本书第一章为绪论,介绍旋量代数与李群、李代数的发展史及其相互关系。第二章至第五章为第一篇“几何基础、旋量代数与李群、李代数”。其中第二章基于向量空间与射影空间讲述机构学与机器人学及旋量代数的几何基础,介绍直线几何的点、线、面特性与其对偶规律,详细揭示运动几何、射影几何与旋量代数的关联关系,以及射线坐标与轴线坐标及其对偶性。第三章阐述旋量代数及其在李代数中的理论基础及几何内涵,展示旋量代数的各种运算规则和方法以及李代数的表示与运算,全面介绍与引进旋量、速度旋量与力旋量,从几何本质和代数角度阐述旋量代数知识及其相关的射影李代数。

基于旋量代数及其几何内涵,在第四章和第五章中将旋量代数推广到矩阵论及其与代数运算的关联关系和几何本质,介绍刚体位移与 Rodrigues 参数以及与 Hamilton 四元数和 Clifford 对偶四元数的关联关系及有限位移旋量的几何内涵与数学基础;展现经典数学与现代数学同旋量代数和刚体运动的内在联系与相互作用;通过这些相关基础理论深入剖析旋量矩阵与有限位移旋量的内在关联及其相关的李群 $SO(3)$ 和 $SE(3)$ 。第五章阐述有限位移旋量与李群的内在关联,讲述刚体位移中的 Chasles 运动,从几何内涵揭示旋量矩阵的特性,特别是其副部即对偶部特性,并揭示基于矩阵分解的旋量矩阵迹与有限位移旋量的关系。通过阐述对应于旋量特征值的有限位移旋量,给出旋量矩阵的微分,引出有限位移旋量与李代数的关联关系。在第四、第五两章中,首次展现了旋量理论与经典数学和现代数学的代数关联论,并采用框图和年代表揭示出它们的内在联系和发展历史。

本书前五章起始于几何基础与线性代数,自然过渡到旋量代数与旋量矩阵,紧密联系李群和李代数,并将这些数学理论与刚体运动关联,提出旋量代数与李群、李代数的关联论,演示数学理论的几何内涵。在此基础上,本书开始第二篇“旋量系理论及机构约束与自由运动”,内容涵盖第六章至第十章。在第六章、第七章和第八章,本书系统地阐述了旋量系理论,尤其是旋量代数和旋量系理论在旋量矩阵以及向量空间中的应用和演变。

第六章通过互易特性和线性相关性的几何意义与物理含义阐述旋量系相关知识,探讨旋量特性、旋量组合以及旋量线性相关性,讲解机构运动学和静力学中的旋量系及其组合。第七章自然过渡到旋量系与其互易旋量系之间的关联关系,建立旋量系互易特性的代数模型,从而将集合论引入旋量理论,提出旋量系关联关系理论。在此基础上,该章讲解一阶旋量系、二阶旋量系和三阶旋量系以及高阶旋量系,并阐述它们的几何本质与物理含义。

第八章应用旋量矩阵探索旋量空间的算法和零空间,讲解旋量代数的子空间、子空间分析及其一维零空间和多维零空间的构造。在引入移位分块法与逐级扩展法后,给出求解互易旋量系的步骤和公式。该章进一步运用递归分块与逐级扩展的方法,总结出一套求取旋量系零空间的算法,将理论与公式应用到齐次线性方程组求解,提出齐次线性方程组的求解法则,给出相对于 Gauss-Seidel 消元法的精度与效率比较。这种求解法则比 Gauss-Seidel 消元法在精度上高一阶,在算法上可以减少运算次数,提高运算效率。

基于前八章对旋量代数及其几何内涵以及对旋量系理论的阐述和探讨,第九章介绍并阐述了旋量系的对偶性及其在串联机构、并联机构与抓持机理中的耦合关系,建立了三类典型机构与机器人系统的耦合表,并提出了机构系统四个基本旋量系,建立了四个子空间的关联关系,提出旋量系对偶定理。本章应用经典机构 Sarrus 机构与新机构 Hoberman 机构演示旋量系的对偶关系,提出 Kennedy-Aronhold 瞬心定理的向量形式,揭示其自反性与传递性,以此研究 Watt 六杆机构。

第十章基于旋量系及其对偶原理,提出并建立约束旋量系分解理论,主要阐述公共约束、冗余约束以及不同类型约束之间的相互作用,揭示约束旋量系的关联及其对机构自由运动的制约,研究空间机构的连接度、活动度与自由度,奠定活动度扩展准则的理论基础。本章同时对机构系统尤其是并联机构进行了旋量系分析,阐述各个约束旋量系与多重集之间的关系,由此研究冗余约束与公共约束对空间机构活动度的影响以及对过约束机构的影响。第十章是对本篇所述旋量系理论的综合运用,也充分展示空间机构的约束分布、旋量系的关联与分解及其对活动度与自由度的影响,奠定活动度与自由度分析的理论基础。

第十一章至第十四章为第三篇“旋量代数与几何方法的机构学与机器人学应

用”。本篇充分利用前两篇的旋量理论和数学内涵对机构学与机器人学中约束和刚度两大重要问题进行探讨,对并联机构与多指灵巧手进行研究。其中,第十一章研究约束旋量系与机构的可重构,起始于典型的 Schatz 机构,研究旋量系对机构构态的影响以及对机构分岔运动的影响,从而研究其对可重构机构的影响,引出变胞机构,阐述约束变化引起的变胞机理。

第十二章建立弹性系数融合矩阵,研究刚度矩阵和旋量矩阵的特征值与特征向量在机构与机器人中的应用。本章采用旋量代数研究刚度、柔度问题,从抓持刚度以及并联机构刚度开始讲述,继而讲述串并联机构、多环机构,乃至各向同性机构、折纸衍生机构以及欠驱动机构的刚度分析。

第十三章基于旋量系分解理论及其对机构约束与自由运动的影响推导与演示不同类型并联机构运动平台的公共约束与冗余约束以及活动度扩展准则在过约束机构与可重构机构中的应用。这一研究对并联机构的分析与综合、其运动学的分析及设计具有极大的价值。本章进一步分析可重构并联机构的活动度演变规律以及冗余驱动并联机构的约束特性、奇异性与灵巧度。

第十四章应用前述的旋量代数与旋量系理论研究多指灵巧手,采用旋量系与其互易旋量系的关联关系理论以及奇异值分解理论建立多指灵巧机械手与抓持物体集成模型的综合 Jacobian 矩阵。之后,采用奇异值分解法进行操作度分析,在揭示引入“变胞手掌”后的多指灵巧手运动机理的同时,从理论上证明将“变胞活动手掌”概念引入多指灵巧手的研究与应用的价值及其可行性。

本书前两篇共十章自成体系,它全面、系统、深入地研究旋量代数、李群与李代数、四元数代数、代数关联论、旋量系理论以及相关的向量代数与矩阵特性、射影几何与仿射几何等数学理论,揭示相关代数理论的几何内涵,为空间机构与机器人分析和设计提供雄厚的几何基础与充分的数学理论²⁶。在此基础上,本书第十一章与第十二章研究空间机构运动机理及其刚度特性与力分析,第十三章与第十四章探讨并联机器人和多指灵巧机械手的旋量系分析及其活动度和操作度。

本书基于向量空间与矩阵理论以及射影几何与仿射几何理论,全面讲述机构学与机器人学的几何基础与旋量代数,内容涵盖代数、几何、机构学、机器人学、计算机科学、控制学及自动化科学等多个学科领域,尤其适用于数学、计算机科学、计算机图形学、自动化科学与机构学领域的基础研究和算法研究,为机构学与机器人学的理论与应用基础研究奠定了雄厚的几何与数学基础,并为机器人学的数学建模、计算机仿真提供有力的工具。

本书适合上述领域的研究生、教师、科学研究人员以及工程研究人员阅读和参

²⁶戴建生(2014)旋量代数与李群、李代数,高等教育出版社,北京。英文引用为“Dai, J. S. (2014) *Screw algebra and Lie Groups and Lie Algebras*, Higher Education Press, Beijing. Also, Dai, J. S. (2014) *Screw algebra and kinematic approaches for mechanisms and robotics*, Springer, London.”

考。本书在数学基础知识方面仅涉及向量代数、线性代数、射影几何与有限群论基础,因此也可供理工类本科二年级以上对机构学与机器人学的数学理论感兴趣的学生阅读和参考。

本书的著述经历了三年多的时间,与作者的英文专著 *Screw Algebra and Kinematic Approaches for Mechanisms and Robotics*²⁷ 以及中文专著《旋量代数与李群、李代数》²⁶ 同时著述而成。作者感谢约翰·霍普金斯大学数学科学、计算机科学与机构学教授 Gregory Chirikjian 以及德国杜伊斯堡-埃森大学机构学博士 Andreas Müller 的逐章阅读与具体建议,感谢加拿大拉瓦尔大学机构与机器人学教授 Clément Gosselin、意大利博洛尼亚大学教授 Vincenzo Parenti Castelli、斯坦福大学机构学教授 Bernard Roth、意大利理工学院先进机器人中心主任和教授 Darwin Caldwell 以及加利福尼亚大学欧文分校机构学教授 Michael McCarthy 的热情支持与极力推荐。

在本书的著述过程中,作者感谢伦敦大学国王学院助理研究员张克涛博士对 10.10 节、10.11 节、11.2 节及 13.7 节的贡献,阿联酋哈利法大学助理教授甘东明博士对 11.3 节、13.3 节及 13.4 节的贡献,澳大利亚科廷大学助理教授崔磊博士对 10.12 节与 14.2 节 ~ 14.6 节的贡献,伦敦大学国王学院助理研究员魏国武博士对 14.7 节的贡献以及对全书插图的修订,意大利理工学院助理研究员 Jody Salgia 博士对 13.8 节的贡献,英国谢菲尔德大学研究助理秦云博士对 13.6 节的贡献,燕山大学赵铁石教授对 12.8 节的贡献。

在本书逾三年的写作与修改过程中,作者感谢天津大学现代机构学与机器人学中心博士生张新生对第二章至第五章的研读与校对、对第六章至第九章的检查与建议以及协助作者对全书所做的文字修饰,博士生康熙和高志广对全书的建议与检查核对,博士生马学思对本书中期检查核对的建议,天津理工大学讲师王晓菲博士对第六章至第八章的研读与前期校对。感谢张克涛博士、魏国武博士、甘东明博士、崔磊博士以及天津大学讲师孙涛博士对第十一章至第十四章的研读与校对。感谢张克涛博士、秦云博士和博士生冯慧娟对参考文献、索引、符号表的整理与检查,博士生邱晨对后记的整理,博士生孙杰对部分公式与例题的验证。感谢中北大学机械工程与自动化学院李瑞琴教授对本书初稿的研读与文字修改,北京邮电大学自动化学院廖启征教授对四元数、Clifford 代数概念的检查与讨论,以及清华大学机械工程学院赵景山教授对本书的阅读与讨论。感谢参与本书讨论的许多已经毕业的和在读的博士生们,这些有益的讨论与建议对作者对本书的反复修改与论证有着很大的帮助。

作者尤其感谢中国科学院院士、华中科技大学机械科学与工程学院熊有伦教授,

²⁷Dai, J. S. (2014) *Screw algebra and kinematic approaches for mechanisms and robotics*, Springer, London.