实变函数
与泛函分析概要

（第一册）

题 解

新乡师院数学系

前　言

为了教学需要，我们将南京大学郑维行、王声望主编《实变函数与泛函分析概要》(第一册)一书的全部习题进行了证明与解答，供我系有关师生参考。由于我们水平有限，加之时间仓促，谬误之处，恳请读者批评指正。

在排版过程中，由于个别符号不足，故改用别的字母代替。如连续集的势用c表之，集类或环等用印刷体A，B，R以代替相应花体字母。又某集F关于基本集的补集用CF表示。这些情况，望读者见谅。

本书出版得到了我院特别是系总支等领导同志的热情支持与关怀。又蒙辽宁锦州地区义县印刷厂的大力支援与帮助。为满足读者需要，争取提前出书，印刷厂领导为我们提供方便，工人同志们付出了艰巨的劳动。为此，编者对他们一并表示深切的感谢！

高福洪

一九八一年三月

目　　录

第一章 集与点集

1、证明下列关系：

(i) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$,

(ii) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,

(iii) $A-(B-C)\subset(A-B)\cup C$,

(iV) $(A-B)-(C-D)\subset(A-C)\cup(D-B)$,

(V) 问$(A-B)\cup C=A-(B-C)$ 成立的充要条件为何？

证明 (i) 设$x\in(A-B)\cap(C-D)$，则由交集定义$\Rightarrow x\in A-B$且$x\in C-D\Rightarrow x\in A$，$x\overline{\in}B$且$x\in C$，$x\overline{\in}D\Rightarrow$ $x\in A\cap C$且$x\overline{\in}B\cup D\Rightarrow x\in(A\cap C)-(B\cup D)$，故

$$(A-B)\cap(C-D)\subset(A\cap C)-(B\cup D) \quad (1)$$

反之，设$x\in(A\cap C)-(B\cup D)$，则由差集定义$\Rightarrow$ $x\in A\cap C$且$x\overline{\in}B\cup D\Rightarrow x\in A$，$x\in C$且$x\overline{\in}B$，$x\overline{\in}D\Rightarrow$ $x\in A-B$且$x\in C-D\Rightarrow x\in(A-B)\cap(C-D)$，故

$$(A\cap C)-(B\cup D)\subset(A-B)\cap(C-D) \quad (2)$$

由（1）式与（2）式知(i)成立。

(ii) 设$x\in(A\cap B)\cup C$，则由并集定义$\Rightarrow x\in A\cap B$或$x\in C$，(a)若$x\in A\cap B$，则$x\in A$且$x\in B\Rightarrow x\in A\cup C$ 且 $x\in B\cup C\Rightarrow x\in(A\cup C)\cup(B\cup C)$，即得$(A\cap B)\cup C\subset(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(b) 若$x\in C$，则$x\in A\cup C$且$x\in B\cup C\Rightarrow x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$，故仍有$(A\cap B)\cup C\subset(A\cup C)\cap(B\cup C)$

总之，

$$(A\cap B)\cup C\subset(A\cup C)\cap(B\cup C) \qquad (1)$$

反之，设$x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$，则由交集定义$\Rightarrow x\in A\cup C$且$x\in B\cup C\Rightarrow x\in A$或$x\in C$且$x\in B$或$x\in C$，以下分四种情形：（$a$）$x\in A$且$x\in B$，则$x\in A\cap B\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup C$，（$b$）$x\in A$且$x\in C$，则$x\in A\cap C$，然而$A\cap C\subset C$，故$x\in(A\cap B)\cup C$（$c$）$x\in B$且$x\in C$，则$x\in B\cap C$，然而$B\cap C\subset C$，故$x\in(A\cap B)\cup C$，（$d$）$x\in C$且$x\in C$，显然$x\in(A\cap B)\cup C$，总之，以上四种情形皆有$x\in(A\cap B)\cup C$，故

$$(A\cup C)\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup C \qquad (2)$$

由（1）式与（2）式即知（ii）成立

（iii）设$x\in A-(B-C)$，则$x\in A$且$x\notin B-C$，由$x\notin B-C$，得$x\notin B$或$x\in C$，分两种情形：（a）$x\in A$且$x\notin B$，则$x\in A-B$，更有$x\in(A-B)\cup C$，（b）$x\in A$且$x\in C$，则$x\in A\cap C$，而$A\cap C\subset C$故$x\in(A-B)\cup C$，总之，$x\in(A-B)\cup C$，即（iii）成立

（iV）设$x\in(A-B)-(C-D)$，则$x\in A-B$且$x\notin C-D\Rightarrow x\in A$，$x\notin B$且$x\notin C$或$x\in D\Rightarrow x\in A-C$或$x\in D-B\Rightarrow x\in(A-C)\cup(D-B)$，故（i$V$）成立

（V）设$(A-B)\cup C=A-(B-C)$，由于$A-(B-C)\subset A$，故$(A-B)\cup C\subset A\Rightarrow C\subset A$

下面证明$C\subset A$还是使$(A-B)\cup C=A-(B-C)$成立的充分条件。

为此，首先证明$A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$设$x\in A-(B-C)$，则$x\in A$且$x\notin B-C$，而$x\notin B-C\Rightarrow x\notin B$

或$x\in C$故．$x\in A-B$或$x\in A\cap C$，即$x\in(A-B)\cup(A\cap C)$

这样一来，$A-(B-C)\subset(A-B)\cup(A\cap C)$　（1）

反之，设$x\in(A-B)\cup(A\cap C)$，则$x\in A-B$或$x\in A\cap C\Rightarrow x\in A$且$x\bar{\in}B$或$x\in A$且$x\in C\Rightarrow x\in A$且$x\bar{\in}(B-C)\Rightarrow x\in A-(B-C)$，即

$$(A-B)\cup(A\cap C)\subset A-(B-C)\qquad(2)$$

由（1）式与（2）式即得

$$A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)\qquad(3)$$

由（3）式及$C\subset A$知$(A-B)\cup(A\cap C)=(A-B)\cup C$，从而推知$C\subset A$是使$A-(B-C)=(A-B)\cup C$成立的充分条件。

2、设给出集E与任意一组集A_α，$\alpha\in I$，问关系式

$$E\cup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(E\cup A_\alpha)$$

是否恒成立？

解　如果I不空。则该式恒成立。事实上，若$x\in E\cup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)$，则$x\in E$或$x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$如$x\in E$，则对任何$\alpha\in I$，$x\in E\cup A_\alpha\Rightarrow x\in\bigcap_{\alpha\in I}(E\cup A_\alpha)$，若$x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\Rightarrow$对任何$\alpha\in I$，$x\in A_\alpha\Rightarrow x\in E\cup A_\alpha\Rightarrow x\in\bigcap_{\alpha\in I}(E\cup A_\alpha)$总之，

$$E\cup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)\subset\bigcap_{\alpha\in I}(E\cup A_\alpha)\qquad(1)$$

反之，若$x\in\bigcap_{\alpha\in I}(E\cup A_\alpha)$，则对任何$\alpha\in I$有$x\in E\cup A_\alpha$，倘$x\in E$，则$x\in E\cup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)$；若$x\in A_\alpha$，则$x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\Rightarrow x\in E\cup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)$．总之$x\in E\cup(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)$，

即 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}(E\cup A_\alpha)\subset E\cup(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)$ （2）

如果I是空集，则须定义 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 及$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$才能施行运算，比如$A_\alpha$是基本集$X$的子集，$I$是空集，定义 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha=X$，$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha=\phi$，则上式仍成立。

3、设$A=\{0,1\}$，试证一切排列$(a_1,\cdots,a_n,\cdots)$，$a_n\in A$所成集的势为$\aleph$

证明 首先证明一条引理：添加一个可列集A的所有元素于一个无限集M上，得到集$M\cup A$，则$M\cup A\sim M$

事实上，我们知道，任何无限集必含有可列子集。故设M含有可列子集为D。令$M-D=P$，则

$$M=P\cup D,\ M\cup A=P\cup(D\cup A)$$

由$P\sim P$，$D\cup A\sim D$，得到$M\cup A\sim M$，从而引理成立。

其次，我们将区间$[0,1)$中的数用二进小数表示，并约定对二进有理数只取从某位起有无限个0的表示法，因而区间$[0,1)$中的数之二进表示法唯一，现令$[0,1)$中二进小数$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$与排列$(a_1,a_2\cdots a_n\cdots)$进行对应，若将排列中从某项起全是1的除去，则显然上述对应是一一的，记所有排列的集为T，而记从某项起全是1的排列的集为S，则显然$T-S$的势为$\aleph$，但S是一可列集（因为它与$[0,1)$中的二进有理数的势相同），由于$S\subset T$，故$T=(T-S)\cup S$，据引理推出T的势也为$\aleph$。

4、试作下列各题中集合间的一一对应：

(i) $[0,1]$与$(0,1)$；

(ii) $[a,b]$与$(-\infty,\infty)$；

(iii) 开上半平面与开单位园。

解 (i) 于区间 $(0,1)$ 中任取趋于 0 的数列 $\{x_n\}$ 令 x_1, x_2 分别与闭区间 $[0,1]$ 中的 0，1 对应，而令 $x_{n+2}(n=1,2\cdots)$ 对应 $[0,1]$ 中的 $x_n(n=1,2,\cdots)$ (因 x_n $(n=1,2\cdots)$ 必然在 $(0,1)$ 中)，$(0,1)$ 中除去 $\{x_n\}$ 后的点 x 令其与 $[0,1]$ 中的 x 对应，则上述对应显然是一一的。

特别，如在 $(0,1)$ 中取数列 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots 1/n\cdots$，若令 $½$, $⅓$ 分别对应 $[0,1]$ 中的 0，1，而 $\frac{1}{n+2}(n=1,2\cdots)$ 对应 $[0,1]$ 中的 $1/n$ $(n=2,\cdots)$，又 $(0,1)$ 中的其余点 x 对应 $[0,1]$ 中的 x，则该对应是一一的且是前段对应法的特例。

(ii) 设 $t\in[a,b]$，则 $x=\frac{1}{b-a}(t-a)$ 将 $[a,b]$ 一一映射到 $[0,1]$ 上，而据 (i) 题的对应法可将 $x\in[0,1]$ 与开区间 $(0,1)$ 的点 y 进行一一对应，对 $(0,1)$ 中的 y，映射 $u=(b-a)y+a$ 实现 $(0,1)$ 到 (a,b) 的一一对应，最后，映射 $V=tg\frac{2u-b-a}{2(b-a)}\pi$ 将把 $u\in(a,b)$ 一一映射到 $v\in(-\infty,\infty)$ 上。

经过以上几个步骤，可以看出 $[a,b]$ 的点可与 $(-\infty,\infty)$ 的点构成一一对应。

(iii) 首先将 xoy 平面的开上半面与 $to's$ 平面上的中心在原点的开单位园但去掉位于 $O't$ 轴上的点 (t,O) $O\leqslant t<1$) 的部分 A 的一一对应．法则如下：令 xoy 平面的开上半平面的任一直线 $y=C$ $(O<C<+\infty)$ 与 $to's$ 平面上 A 内的中心在原点半径为 $2/\pi a z\,ctgC$ 的园周（注意到这些园周是已去掉一点的）进行对应（我们知道，利用“投影”方法，是

能实现这种一一对应的）由于C遍历（$O,+\infty$）时，$2/\pi a_zc\ tgC$将依次遍历区间（0,1），这种对应将是双方单值且一一的对应，从而上述法则实现了开上半平面与A的一一对应。

其次，建立A与开单位园但去掉园心的部分B的一一对应.事实上，只要对任何$o<a<1$，令A内以a为半径，园心在原点的园周（注意到该园周缺少一点）与B内以a为半径，园心在原点的园周进行对应即可。而去掉一点的园周与未去掉任何点的半径相同的园周是能建立一一对应的，这只要在园周上任取趋向于P（P是去掉的点）的点列$\{Pn\}$，令P_1与未去掉点的园周的P点对应，而P_{n+1}（$n=1,2,\cdots$）与未去掉点的园周的$Pn(n=1,\cdots)$对应，且去掉一点的园周上非$\{Pn\}$的点Q与未去掉点的园周上的Q点进行对应，就实现了这种对应。

最后，建立B与开单位园的一一对应。令B的点（t,o）（$o<t<1$）与开单位园的点（t,o）（$o\leqslant t<1$）进行对应，这实际上就是建立区间（0,1）与区间〔0,1）的对应，该对应由(i)题是可以实现的，B中除了点（t,o）（$o<t<1$）的点M令其与开单位园的点M进行对应，从而就完成了B与开单位园的一一对应。

经过以上几个一一映射的复合，就实现了开上半平面与开单位园的一一对应。

5、下列各集能否同自然数集或区间〔0,1〕构成一一对应：

（i）以有理数为端点的区间集；

（ii）闭正方形〔0,1；0,1〕。

如果可能，试作这种对应方法。

解 (i) 以有理数为端点的区间集能与自然数集建立一一对应，方法如下：

由于有理数集是可列的，故可排成无穷序列的形式，设为

$$r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n, \cdots.$$

任一有理区间 (r_i, r_j) （设 $r_i \leqslant r_j$）有四种可能：$(r_i, r_j]$，(r_i, r_j) $[r_i, r_j)$ 及 $(r_i, r_j]$，不失一般性，我们只考察开区间的形式。

将有理区间表为：

$$\begin{array}{l}
(r_1, r_1), (r_1, r_2), (r_1, r_3), \cdots (r_1, r_n), \cdots, \\
(r_2, r_1), (r_2, r_2) (r_2, r_3), \cdots, (r_2, r_n), \cdots, \\
(r_3, r_1), (r_3, r_2), (r_3, r_3), \cdots, (r_3, r_n) \cdots, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(r_n, r_1), (, r_n r_2), (r_n, r_3), \cdots, (r_n, r_n), \cdots, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

由于(r_i, r_j)，(r_j, r_i)表同一有理区间，可取一个，并认为$i<j$时，$r_i<r_j$，故保留主对角线以上的区间。在主对角线上的区间是空集，为照顾到区间的其它三种形式，我们还保留它。

把保留下的有理区间按指标之和，从小到大，重新排列如下：

$$(r_1, r_1)(r_1, r_2), (r_1, r_3), (r_2, r_2), \cdots,$$

因而是一可列集，令$(r_1, r_1) \leftrightarrow 1$，$(r_1, r_2) \leftrightarrow 2$，$(r_1, r_3) \leftrightarrow 3$，$(r_2, r_2) \leftrightarrow 4$，$\cdots$，这样便建立了有理区间与自然数集的一一对应。

最后，注意到定理2.2，区间〔0,1〕中的点是不可列的故有理区间的集不与〔0,1〕区间中的点的集对等。

（ii）首先建立半闭正方形（0,1〕×（0,1〕与区间（0,1〕的一一对应法则，将（0,1〕中的点x用二进位小数表示（约定对二进有理数采用无限个1者）为

$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+x_2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+x_2+x_3}+\cdots,$$

并记成$x=〔x_1,x_2,x_3,\cdots〕$，其中$x_1,x_2,\cdots$是自然数，故由两个这样的数$x,y\in$（0,1〕，其中$y=〔y_1,y_2,\cdots〕$，得唯一的$t=〔x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3,\cdots〕\in$（0,1〕.反之，由$t=〔t_1,t_2,t_3,t_4,\cdots〕\in$（0,1〕又得$x=〔t_1,t_3,\cdots〕$与$y=〔t_2,t_4,\cdots〕\in$（0,1〕，由上述法则就实现了半闭区方形（0,1〕×（0,1〕到（0,1〕的一一对应。

其次，利用映射$y=2x$可将$x\in$（0,1〕一一映射到$y\in$（0,2〕. 并将区间（0,2〕表为三个不相交的区间的并，即（0,2〕=（0,1〕∪（1,3/2〕∪（3/2,2〕，令（0,1〕与半闭正方形（0,1〕×（0,1〕对应，令（1,3/2〕与正方形的一个边的点（O,y）（$o<y\leqslant1$）对应，而〔3/2,2〕与正方形的另一边的点（x,o）（$o<x\leqslant1$）对应，（以上两个对应都可利用线性变换来实现），从此，我们已建立了除去一点（0,0）的正方形〔0,1〕×〔0,1〕到区间（0,1〕的一一对应，若令（0,0）与〔0,1〕中的0对应，便全部实现了闭正方形〔0,1〕×〔0,1〕到区间〔0,1〕的一一对应。

由于〔0,1〕不可列（定理2,2），故〔0,1〕×〔0,1〕也不可列，故它不与自然数集对等。

6、证明整系数多项式全体是可列的

证明 首先建立一条引理：若集A中每个元素由n个互相独立的记号所决定，而每一记号各自遍历一个可列集：

$$A=\{a_{x_1,\cdots x_n}\}\ (x_K=x_K^{(1)},\ x_K^{(2)},$$

$\cdots;\ K=1,\cdots n)$，则A可列。

事实上，当$n=1$时，引理显然成立，设$n=m$时成立，往证$n=m+1$时也成立。令

$$A=\{a_{x_1,\cdots,x_m,x_{m+1}}\}$$

A中的元其指标$x_{m+1}=x_{m+1}^{(i)}$者，记其全体为A_i，则由归纳假定$Ai=\{a_{x_1\cdots,\ x_m,\ x_{m+1}^{(i)}}\}$可列，但

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}Ai$$

从而由定理2.1知A是一可列集，故引理成立。

现在进行本题的证明。先固定n，由于n次整系数多项式$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，完全由系数$a_0,a_1,\cdots,a_n$所确定，而$a_0,\cdots a_n$的取值是相互独立的，每一系数又可遍历所有整数，由于整数集可列，故由引理知n次整系数多项式的集可列，再令n遍历所有自然数（包含0在内），据定理2,1，即可断定本题是成立的。

7、设用$C[0,1]$表$[0,1]$上一切连续函数所成的类，试证它的势为$\aleph$。

证明 令$A=\{e^x+a\}\ 0\leqslant x\leqslant1$（$a$为实数），由于$e^x+a$是$[0,1]$上的连续函数，$a$可遍历所有实数，故$A$的势为$\aleph$，但显然$A\subset C[0,1]$，故$\Rightarrow C[0,1]$的势不小于$\aleph$，往证$C[0,1]$的势不大于$\aleph$。

为此，考察实数列$(u_1,u_2,\cdots u_n,\cdots)$，记其总体为

H，可以证明H的势为$\aleph$，事实上，记B为H中满足$0<u_n<1(n=1,2,\cdots)$的元$u=(u_1u_2\cdots u_n\cdots)$的全体，当$u\in B$时，作映射$\varphi$：

$$\varphi(u)=(tg(u_1-\tfrac{1}{2})\pi,\cdots,tg(u_n-\tfrac{1}{2})\pi,\cdots)$$

显然$\varphi(u)\in H$，但ϕ是一一映射，从而B与H的势相同，故只要证明B的势为$\aleph$即可。

一方面，把区间$(0,1)$中的任何点u与B中的元$\bar{U}=(u,u,\cdots u,\cdots)$对应，就可断定区间$(0,1)$对等于集$B$的某一子集，故知$B$的势不小于$\aleph$。

另一方面，对B中任何元$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots)$，按十进小数表$u_n$如下：

$$u_1=0.u_{11}u_{12}\cdots u_{1n}\cdots,$$

$$u_2=0.u_{21}u_{22}\cdots u_{2n}\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n=0.u_{n1}u_{n2}\cdots u_{nn}\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

对此$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots)\in B$，作小数$\psi(u)=0.u_{11}u_{21}u_{12}u_{13}u_{22}\cdots$与之对应，当$u\neq v$时，$\psi(u)\neq\psi(\delta)$但$\psi(u)\in(0,1)$，故通过映射知道$B$也对等于$(0,1)$中的一子集，从而由伯恩斯坦定理6.2，断定$B$的势为$C$，由此证明了$H$的势为$C$。

下面证明$C[0,1]$的势不大于C，为此将$[0,1]$中所有有理数记成$r_1,r_2,r_n\cdots$，对每一$f(x)\in C[0,1]$.令H中的数列$a_f=\{f(r_1),\cdots f(r_n),\cdots\}$与之对应，不难证明当$f\neq g(f,g\in C[0,1])$时，$a_f\neq a_g$，事实上，$a_f=a_g$

乃表示f与g在$[0,1]$中的一切有理点取值相同，故由f与g的连续性知f与g在$[0,1]$中的所有点的相应值亦相同，于是$f=g$。故知其逆否命题也成立，即$f\neq g$时，$a_f\neq a_g$。若记H^*为a_f的总体，则$H^*\sim C[0,1]$，但$H^*\subset H$，从而推知$C[0,1]$的势不大于C；前面已证$C[0,1]$的势不小于C，故由伯恩斯坦定理6.2知$C[0,1]$的势为C。

8、设G_1,G_2是R^1中的开集，且$G_1\subset G_2$，试证G_1的每个构成区间必含在G_2的某个构成区间之中。

证明 由于G_1是开集，故能表为有限个或可列多个互不相交的构成区间(α_i,β_i)之并，从$(\alpha_i,\beta_i)\subset G_1\Rightarrow(\alpha_i,\beta_i)\subset G_2$。但$G_2$也是开集，故$G_2=\bigcup\limits_i(\lambda_i,\mu_i)$，其中$(\lambda_i,\mu_i)$是$G_2$的构成区间，且彼此之间互不相交。由$x\in(\alpha_i,\beta_i)\Rightarrow x\in G_2\Rightarrow$存在$j$，使$x\in(\lambda_j,\mu_j)$下面证明$(\alpha^i,\beta_i)\subset(\lambda_j,\mu_j)$。若不然，倘$\beta_i>\mu_j$，则必有$\mu_j\in(\alpha_i,\beta_i)\subset G_1$，这与$\mu_j\bar{\in}G_2$从而$\mu_j\bar{\in}G_1$矛盾，故知$\beta_i\leqslant\mu_j$。同理可证$\alpha_i\geqslant\lambda_j$，因而$(\alpha_i,\beta_i)\subset(\lambda_j,\mu_j)$为真。

9、设F_1,F_2是R^n中的闭集，且$F_1\cap F_2=\varnothing$。试证，存在开集G_1,G_2，使$G_1\cap G_2=\varnothing$而$G_1\supset F_1,G_2\supset F_2$。

证明 首先设F_1,F_2皆有界，因$F_1\cap F_2=\varnothing$，故$\rho(F_1,F_2)=r>O$（注：$\rho(F_1,F_2)=\inf\limits_{\substack{P\in F_1\\Q\in F_2}}\rho(P,Q)$）。

事实上，我们可以证明一定存在$P^*\in F_1,Q^*\in F_2$，使$\rho(F_1,F_2)$，$=\rho(P^*,Q^*)$，故若$r=0$则$\rho(P^*,Q^*)=0$
$\Longleftrightarrow p^*=Q^*\Rightarrow F_1\cap F_2\neq\varnothing$，这与题设矛盾。下面证明$\rho(F_1,F_2)=\rho(P^*,Q^*)$，由于$\rho(F_1,F_2)$

$= inf\rho(P,Q)$，从而，

$P\in F_1$

$Q\in F_2$

对于正数$1/n$，必存在$\rho(P,Q)$的集中的$\rho(Pn,Qn)$满足

$$\rho(F_1,F_2)\leqslant\rho(Pn,Qn)<\rho(F_1,F_2)+1/n$$

此处$Pn\in F_1$，$Qn\in F_2$这样便得到点列

$$(P_1,Q_1),\ (P_2,Q_2),\cdots,(Pn,Qn),\cdots$$

由于F_1有界，故$P_1,P_2,\cdots;\ Pn,\cdots$是有界无穷点列，由分析学上的$Weierstrass$定理，存在收敛子点列$Pn_1$，$Pn_2,\cdots,Pn_K,\cdots$，设其收敛于$P^*$（即$\rho(Pnk,\ P^*)\to O$，当$K\to\infty$时），由于$F_1$闭$\Rightarrow P^*\in F_1$。

对应$n_1,n_2,\cdots,n_K,\cdots$，从$(Pn_1,Qn_1),(Pn_2,Qn_2)\cdots$中取出$Qn_1,Qn_2,\cdots,Qn_K\cdots$，由$F_2$有界，故点列$\{Qn_K\}$是有界的，仍据$Weierstass$定理，存在收敛子点列$\{Qn_{Ki}\}$设其收敛于$Q^*$，由$F_2$闭$\Rightarrow Q^*\in F_2$，注意到$\{Pn_{Ki}\}$仍收敛于$P^*$，从而

$\rho(F_1F_2)\leqslant\rho(P^*,Q^*)\leqslant\rho(P^*,\ Pnk_i)+\rho(Pnk_i,\ Qn_{Ki})+\rho(Qn_{Ki},\ Q^*)<\rho(P^*,Pnk_i)+\rho(F_1F_2)+1/nk_i+\rho(Qnk_i,Q^*)\to\rho(F_1,F_2)(i\to\infty)$

故$\rho(F_1,F_2)=\rho(P^*,Q^*)$得证。

下面继续证明本题，令

$G_1=\{P:\rho(P,F_1)<r/2\}$，$G_2=\{Q:\ \rho(Q,F_2<r/2\}$可以证明$G_1,G_2$皆是开集（为节省篇幅，请见习题12的证明部分）．显然$G_1\supset F_1$。$G_2\supset F_2$.现证$G_1\cap G_2=\varnothing$若不然，则存在$P^*\in G_1\cap G_2$，由G_1，G_2的定义，知应存点$P_1\in F_1,Q_1\in F_2$使$\rho(P^*,\ P_1)<r/2$，$\rho(P^*,Q_1)$

$<r/2 \Rightarrow r \leqslant \rho(P_1, Q_1) \leqslant \rho(P_1, P^*) + \rho(P^*, Q_1)$
$< r/2 + r/2 = r$矛盾，故$G_1 \cap G_2 = \varnothing$

其次，设F_1, F_2为无界闭集且$F_1 \cap F_2 = \varnothing$，对$F_1$的每点$P$，作以$P$为心，½$(\rho(P_1F_2)$为半径的邻域$N_p$，令$G_1 = \bigcup_{P \in F_1} N_P$，则$G_1$是开集且$G_1 \supset F_1$同理，对$F_2$的每点$Q$，作以$Q$为中心，½$\rho(Q_1F_1)$为半径的邻域$N_Q$，令$G_2 = \bigcup_{Q \in F_1} N_Q$，则$G_2$是开集，且$G_2 \supset F_2$。下面证明$G_1 \cap G_2 = \varnothing$，不然，则必存在$Z \in G_1$且$Z \in G_2$，因而必有$N_{PO}$，$N_{Q_o}$使$Z \in N_{P_o}$且$Z \in N_{Q_o}$故据$N_{P_o}$与$N_{Q_o}$的定义$\Rightarrow$
$\rho(Z, P_O) < \frac{1}{2}\rho(P, F_2)$，
$\rho(Z, Q_O) < \frac{1}{2}\rho(Q_O, F_1) \Rightarrow \rho(P_O, Q_O) \leqslant \rho(P_O, Z) + \rho(Z, Q_O) < \frac{1}{2}\{\rho(P_O, F_2) + \rho(Q_O, F_1)\}$，注意到$\rho(P_O, F_2) \leqslant \rho(P_O, Q_O)$，$\rho(Q_O, F_1) \leqslant \rho(P_O, Q_O)$，故得$\rho(P_O, Q_O) \geqslant \frac{1}{2}\{\rho(P_O, F_2) + \rho(Q_O, F_1)\}$，与前述$\rho(P_O, Q_O) < \frac{1}{2}\{\rho(P_O, F_2) + \rho(Q_O, F_1)\}$矛盾。至此，本题全部证毕。

10、证明任何点集的内点全体是开集

证明　设E为任一点集，令E°表E的一切内点所成之集，倘$E^\circ = \varnothing$，则命题显然成立。故设$E^\circ \neq \varnothing$。任取$P_O \in E^\circ \Rightarrow$存在$\delta_O > 0$使$N(P_O, \delta_O) \subset E$　（其中$N(P_O, \delta_O)$表以P_O为心，δ_O为半径的开球）　现证$N(P_O, \delta_O)$的每点都是E的内点，事实上，$\forall P \in N(P_O, \delta_O)$，令$\delta \leqslant \delta_O - \rho(P, P_O)$，则$N(P, \delta) \subset N(P_O, \delta_O) \subset E$，故$P$是$E$的内点，即$P \in E^\circ$，从而$N(P_O, \delta_O) \subset E^\circ$，即$E^\circ$为开集。

11、设$f(x)$是R^1上的实函数，f映开集为开集，问f是

否连续？又连续映射是否映开集的开集？

解 （1）f映开集为开集，f可以连续，也可以不连续。如$f(x)=x$；它映x轴上的任何开集为y轴上的开集，而该函数是R^1上的连续函数又如

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ 3/2, & x=1,\\ -2x+4, & 1<x<+\infty\end{cases}$$

它映x轴上开集（$-\infty,+\infty$）为y轴上的开集（$-\infty,2$），但该函数在$x=1$为不连续。

下面，我们构造一个定义在R^1上的实函数f，它映任何开集为开集，但f在R^1上不连续。

为此，首先介绍定义在〔0,1〕区间上的单调增加的康脱函数$C(x)$，P_O是康脱的三分完全集，G_O是〔0,1〕$-P_O$，当$x\in(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$时，$C(x)=\frac{1}{2}$；当$x\in(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$时$C(x)=$ ¼，当$x\in(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$时，$C(x)=\frac{3}{4}$；在$G_O$的第三类构成区间$(\frac{1}{3^3},\frac{2}{3^3})$，$(\frac{7}{3^3},\frac{8}{3^3})$，$(\frac{19}{3^3},\frac{20}{3^3})$及$(\frac{25}{3^3},\frac{26}{3^3})$上$C(x)$依次取值$\frac{1}{2^3},\frac{3}{2^3},\frac{5}{2^3},\frac{7}{2^3}$，一般在$G_O$的第$n$类的$2^{n-1}$个构成区间上，$C(x)$依次取值$\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\frac{5}{2^n},\cdots\frac{2^n-1}{2^n}$此手续继续进行，则$C(x)$在$G_O$上有了定义，

$C(x)$在P_O上定义如下：$C(o)=o$，$C(1)=1$；对于介乎O与1之间的P_O中的点x_0，令$C(x_0)=SupC(x)$（$x\in G_O$，$x<$