丛书主编 马德高

Spark 星火·燎原

大学数学
公式定理手册

线性代数

延边大学出版社

Spark® 星火·燎原

大学数学公式定理手册

本册主编　路其昌

线性代数

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学公式定理手册. 2， 线性代数 / 马德高主编
. -- 延吉 ：延边大学出版社，2010.6
ISBN 978-7-5634-3210-3

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①线性代数—公式—高等学校—教学参考资料②线性代数—定律—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 072912 号

大学数学公式定理手册

主编:马德高
责任编辑:赵立才
出版发行:延边大学出版社
社址:吉林省延吉市公园路 977 号 **邮编**:133002
网址:http://www.ydcbs.com
E-mail:ydcbs@ydcbs.com
电话:0433-2732435 **传真**:0433-2732434
印刷:桓台县方正印务有限公司
开本:880×1230 1/64
印张:14.5 **字数**:760 千字
版次:2010 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
ISBN 978-7-5634-3210-3

定价:28.20 元

使用说明

【品　　名】 大学数学公式定理手册(线性代数)

【主要成分】 教材基础知识＋重点难点点拨＋规律技巧方法

【成分分析】 完全依照大学课程教学要求进行编写，汇集经典版本的精华，囊括了《线性代数》中所有概念、公式、定理、解题方法以及在使用时要注意的问题，并精选典型例题帮助理解和记忆。灵活运用图表、网络图等形式使知识更加条理化、清晰化。名师点拨重点难点，举重若轻，化难为易。规律方法科学实用，能让读者举一反三，触类旁通。

【适用人群】 1. 想在极短时间内迅速记忆检索《线性代数》全部知识的同学。

2. 感觉许多公式都知道，但使用起来困难重重的同学。

3. 虽“众里寻她千百度”，蓦然回首，依旧找不到学习诀窍的同学。

4. 想快速复习教材知识的同学。

【主要功能】 1. 能让读者快速系统地梳理《线性代数》的基本知识和重点难点。
2. 能让读者系统地掌握学习方法、规律、技巧。
3. 能让读者在极短时间内快速提升知识运用能力。

【产品特点】 易学,易记,易读,易用。

【用法用量】 随时随地学习,利用有限时间合理安排,少则几分钟,多则几小时,可重复使用,无毒副作用。

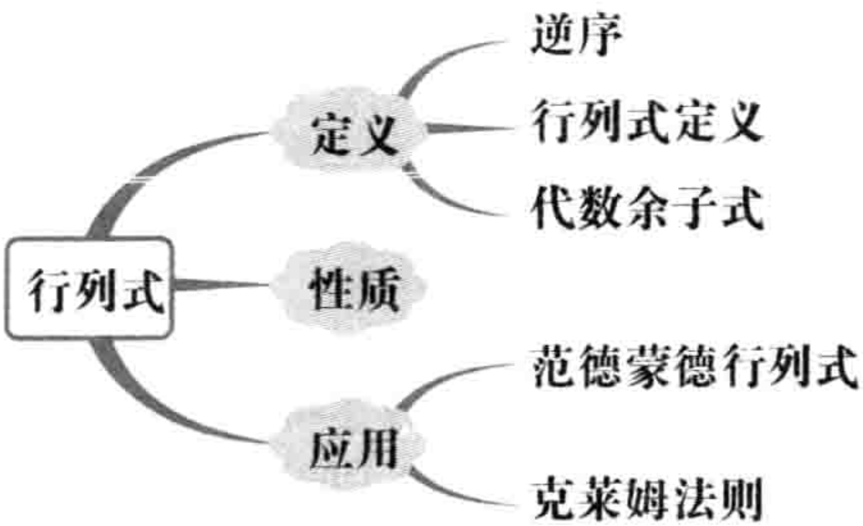
【贮　　藏】 随身携带。

【禁　　忌】 固执地认为只要死记硬背就能学好数学的同学慎用。

目 录

第一章 行列式

本章网络知识结构图



1 二阶与三阶行列式

二阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

三阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$

$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

2 全排列及其逆序数

排列：n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（简称 n 元排列）.

名师点拨

(1) 由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 元排列.
(2) n 个不同元素所有的排列的种数为 $n!$ 种.

排列的逆序：对于 n 个不同的元素，我们规定各元素之间有一个标准次序，对这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不相同时，就称这两个元素构成一个逆序，一个排列所有逆序的总数称为这个排列的逆序数.

例如，n 个不同的自然数 $1,2,\cdots,n$，可规定由小到大为标准次序，且排列 $1\ 2\ 3\cdots n$ 称为自然序排列. 在某个排列中，一对数若较大的数排在较小的数之前面，就称这对数构成一个逆序.

偶排列：逆序数是偶数的排列称为偶排列.

奇排列：逆序数是奇数的排列称为奇排列.

例 1 求下列排列的逆序数

(1)134782695 (2)987654321 (3)217986354

解：(1)
$$\tau(134782695)=\begin{array}{ccccccccccccccc}3&&4&&7&&8&&2&&6&&9&&5\\ \vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&+&0&+&0&+&0&+&4&+&2&+&0&+&4\end{array}=10;$$

(2)
$$\tau(987654321)=\begin{array}{ccccccccccccccc}9&&8&&7&&6&&5&&4&&3&&2\\ \vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\ 8&+&7&+&6&+&5&+&4&+&3&+&2&+&1\end{array}=36;$$

(3)
$$\tau(217986354)=\begin{array}{ccccccccccccccc}1&&2&&3&&4&&5&&6&&7&&8\\ \vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\ 1&+&0&+&4&+&5&+&4&+&3&+&0&+&1\end{array}=18.$$

名师点拨

求一个排列的逆序数要充分理解逆序及排列逆序数的概念，在计算时要注意选好计算顺序，不重不漏. 通常任一排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数可如下计算：$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_2$ 前面比 i_2 大的数的个数 $+ i_3$ 前面比 i_3 大的数的个数 $+ \cdots + i_n$ 前面比 i_n 大的数的个数，也可这样计算：$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 $+ i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数 $+ \cdots + i_{n-1}$ 后面比 i_{n-1} 小的数的个数. 本题(1) 用的是前一种算法，(2) 用的是后一种算法.

3 n阶行列式的定义

n 阶行列式：设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix},$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$，得到形如 $(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 的项，其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如上式的项共有 $n!$ 项. 所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 为行列式 D 的 (i,j) 元.

下面是一些常用的特殊行列式：

(1) **对角形行列式**：行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

称为对角形行列式.

(2) **副对角形行列式**：行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

称为副对角形行列式.

(3) **上三角形式行列式**：行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

称为上三角形行列式.

(4) **下三角形行列式**：行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

称为下三角形行列式.

(5) **左上三角形行列式**:行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

称为左上三角形行列式.

(6) **右下三角形行列式**:行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

称为右下三角形行列式.

4 对 换

对换:在排列中,将任意两个元素对调,其余元素不动,得到另一个排列,这样一种变换称为对换.

相邻对换:将相邻的两个元素对换,叫做相邻对换.

定理 1:一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

推论:奇排列变成标准排列的对换次数为奇数,偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

n 阶行列式的等价定义：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)+\tau(1\,2\,\cdots\,n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(1\,2\,\cdots\,n)+\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

$$=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

例 1 写出四阶行列式中所有带负号且包含 a_{23} 的项.

解：这样的项可以设为 $a_{1i}a_{23}a_{3j}a_{4k}$. 要使其带负号，当且仅当其列标所构成的排列 $i3jk$ 为奇排列. 而 i，j，k 只能取 1，2，4 中的数，例如取 $i=1$，$j=2$，$k=4$，则得1324，它是一个奇排列. 由于对换改变排列的奇偶性，所以可得 4312，2341（3 在第二个位置不动）也是奇排列. 而且，再也没有满足条件的别的奇排列（3 在第二个位置的排列共 6 个），因此，所求的项是：

$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$，$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$.

名师点拨

解这样的题，往往是先设出这样的项，然后再根据奇偶性讨论.

5 行列式的性质

转置行列式：记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1：行列式与它的转置行列式相等. 也可以说,行列互换,行列式的值不变.

性质 2：互换行列式的两行(列),行列式变号.

以 r_i 表示行列式的第 i 行,以 c_i 表示第 i 列. 交换 i,j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$,交换 i,j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论：如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

性质 3：行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式.

第 i 行(或列)乘以 k,记作 $r_i \times k$(或者说 $c_i \times k$).

推论：行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

第 i 行(或列)提出公因子 k,记作 $r_i \div k$(或 $c_i \div k$).

性质 4：行列式中如果有两行(列)元素成比例,

则此行列式等于零.

性质 5：若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a_{1i}') & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a_{2i}') & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a_{ni}') & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6：把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式不变.

例如以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上(记作 c_i+kc_j),有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{c_i+kc_j}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (i \neq j).$$

（以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上，记作 r_i+kr_j）

拉普拉斯展开式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{1k} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{lk} & b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ll} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ll} \end{vmatrix}$$

例 1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & y_2 \\ y_3 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 & x_4 \end{vmatrix}.$$

【思路探索】 所给行列式中含较多的零，可利用性质 2 将零调到右上角，然后利用拉普拉斯展开式求解.

解：$D \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ y_3 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & y_2 \\ 0 & y_4 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 0 \\ y_3 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & y_4 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ y_3 & x_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ y_4 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1x_3 - y_1y_3)(x_2x_4 - y_2y_4).$$

例 2 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

【思路探索】 观察行列式中所有行(列)对应元素相加后相等，故将所有行加到第一行后，再提取公因子进后化简计算.

解：$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$