

结构分析的有限条法

(第二版)

[英] Y.K.CHEUNG 著

谢秀松 王貽荪 李兰芬 方佩芝 译

王 磊 校

人 民 交 通 出 版 社

结构分析的有限条法

Jiegou Fenxi de Youxiantiaofa

(第二版)

[英] Y.K.CHEUNG 著

谢秀松 王貽荪 李兰芬 方佩芝 译

王 磊 校

人 民 交 通 出 版 社

结构分析的有限条法

(第 二 版)

〔英〕 Y.K.CHEUNG 著

谢秀松 王貽荪 李兰芬 方佩芝 译

王 磊 校

人民交通出版社出版
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
人民交通出版社印刷厂印

开本: 787×1092 $\frac{1}{32}$ 印张: 10.5 插页: 3 字数: 213千

1980年9月 第1版

1985年8月 第2版 第2次印刷

印数: 4,701—9,450册 定价: 2.70元

内 容 简 介

本书在结构分析的有限元法基础上，针对工程中常见的许多具有规则几何形状和边界条件的结构，介绍一种解决这类问题更简明的有限条法理论，并提出了板和壳问题的多种不同的有限条。用此理论可使三维问题降低到二维，二维问题降低到一维，从而大大节省计算机内存需要量，缩短计算时间，在工程中有较大的实用价值。全书内容新颖，叙述简明，理论上有独到之处，并附有各种计算实例易于实际应用，是一本有价值的读物。

本书可供科技人员及高等院校师生参考。

译者序言

《结构分析的有限条法》一书所述内容，理论新颖，在有限元领域里是一个新的分支。可以解决土建结构设计中的大量问题。本书涉及平面应力、弯曲板与板梁结构、折板结构与箱形梁桥、板与壳的稳定与振动、有限层法与有限棱柱法。有限条选择了振动梁函数及代数多项式两种位移函数保证了计算收敛性。它形成的总刚度矩阵呈带状，与有限单元法比较，它的未知量大大减少，精度也高。有限条法在我国推广应用很有实用价值。

本书作者张佑启 (Y.K.CHEUNG) 博士、土木工程教授，1978年应我国邀请来华，曾在北京、杭州、洛阳、广州做学术报告。内容除了有限条外，还有高层建筑，有限层法计算地基应力、箱形桥梁与弧形桥梁等。由于他的有限条法的独创性，并曾在加拿大、罗马尼亚、澳大利亚等地讲学。

有限单元法是六十年代发展起来的，它把工程对象变为离散体，割裂成许多很小单元，称为离散化。用结点位移为未知量通过能量原理建立起大型方程组，通过电子计算机解决各种复杂工程结构设计问题。随着电子计算机迅速发展，有限单元法在计算技术及力学领域内成为一门新的学科。国外，理工科大学都选为必修课程。

但是，用有限单元法解决复杂工程设计时，必须采用大容量电子计算机，尤其是三维空间应力分析。例如大型通用程序对于特殊问题费用会高几倍，既占据了大容量电子计算

机，又浪费不少时间。

有限单元半分析法，最早由 Y.K.CHEUNG 提出有限条法与美国 E.L.WILSON: Structural Analysis of Axisymmetric Solids。前者是解决工程设计，后者是解算宇航设计。两者数学物理本质相同，统称为有限单元半分析法。

半分析法用分离变量法，使得弹性力学问题三维问题化为二维问题，二维问题化为一维问题。用数学方法使得工程结构总刚度矩阵大大降阶，当使用小型电子计算机 X-2、121、108、719等也能解算二维及三维复杂问题，并且还可大大缩短电算时间。在我国若干年内具有现实意义与经济意义。

本书译稿承章远通教授及黎邦隆副教授对于有些章节阅读并提出一些意见，在此表示感谢。

在翻译过程中，我们对于原书就已发现的错、漏及不妥之处，如图错及公式错进行过核对，有些地方根据译者理解，加了译者注。

本书可供高等学校研究生、教师以及土建设计人员参考。

由于时间仓促、译校者水平有限，译文中难免还有错误缺点，热诚欢迎批评指正。

译 者

1978年10月

再 版 序 言

这次修订再版，除对本书译本第一版作了校阅外，还收入张佑启教授等最新发表的三篇论文：《夹层板屈曲分析的有限层法》，《夹层板的振动、弯曲和稳定》，《结构分析样条有限条法》。

由于译校者水平有限，缺点和错误之处，欢迎读者批评指正。

王 磊

1983年1月

序 言

本书试图向读者介绍一种有限条法的简明初步理论，并将此方法应用于各种结构工程课题，特别是应用于板桥和箱形梁桥这些实际的结构。本书所包括的内容大体上是自成体系的，读者只需具备一些矩阵代数和能量原理的基础知识。

有限条法的基本理论在第一章研究。从第二章到第六章提出了板壳问题的多种不同的有限条，并在各章的最后给出了数字例题。第七章讨论将有限条法推广到三维问题，而第八章则叙述结构分析中常用的一些计算方法。为了完整性，引入了一个折板的计算机程序，为清楚起见，还对一个已作出的具体问题作了详细说明。

有限条法的提出并不很久，因而不可能要求本书包含一切最新材料。关于有限条法的许多书刊是在本书完稿后才出现的。

符号汇编

a, b	条的长度和宽度
A_i	多项式位移函数的待定常数
$[B]$	应变矩阵
c	柱面层厚度
C_i	基本函数的待定常数
$[C_i]$	条的形函数
$D_x, D_y, D_{xy},$ D_r, C_θ, D_k	笛卡儿坐标系和极坐标系的 弯曲和扭转刚度
$[D]$	弹性矩阵
E_x, E_y, E_{xy} $E_r, E_\theta, E_{r\theta}$	笛卡儿坐标系和极坐标系的 弹性常数
e	偏心率
$f(x), f(r)$	沿横向 (笛卡儿坐标系) 和径向 (极坐标系) 的多项式函数
f_i	条的结点参数
$\{F\}$	荷载矢量
$G, G_{xy}, G_{r\theta}$	剪切弹性模量
h_j	夹层结构芯子厚度
$[H]$	转换矩阵
I	惯性矩
I_i	(第 i 项) 积分
$[I]$	雅可比矩阵

$[K]$	总刚度矩阵
$[K_G]$	总几何刚度矩阵
k_{mn}^r, k_{mn}^t	梁单元弯曲和扭转刚度系数
L_i	面积坐标
$[M]$	质量矩阵
M_x, M_y, M_{xy} $M_r, M_\theta, M_{r,\theta}$	笛卡儿坐标系和极坐标系的 弯矩和扭矩
$[N_k]$	形函数
P	集中荷载
$\{P\}$	荷载矢量
q	均布荷载
$\{q\}$	外表面荷载矢量
R, r	曲条薄板半径
$[R]$	转换矩阵
$[S]$	条的刚度矩阵
$[S_G]$	条的几何刚度矩阵
t	板厚
t_i	夹层板第 i 层厚度
u, v, w	沿 x, y 和 z 方向的位移
U	应变能
W	外力势能
x, y, z r, θ	直角坐标和极坐标
X_m, Y_m	基本函数
$\{X\}$	赘余力矢量
α	张角
β	斜角

$\epsilon, \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$	应变
$\sigma, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	应力
$\{\sigma\}, \{\epsilon\}, \{\mathbf{x}\}$	广义应力和应变矢量
$\mathbf{x}_i$	曲率参数
θ_x, θ_y	绕 x 和 y 方向的转角
μ_m, α_m	基本函数的参数
δ_k	结点位移参数
$\{\delta\}$	结点位移矢量
ξ, η, ζ	斜的或其它的曲线坐标系
ϕ	总势能
ν	泊松比
ω	固有频率
ρ	质量密度
λ	特征值

本书几个专用符号说明

DOF	自由度
HBW	半带宽
LO2	低阶矩形条，两结线
HO2	高阶矩形条，两结线
HO3	高阶矩形条，三结线
FESS	有限单元简支板程序
BAPS	桥梁应用程序
FSM	有限条法
FEM	有限元法
ASCE	美国土木工程学会

目 录

序 言

符号汇编	1
------	---

第一章 有限条法	1
----------	---

1.1 引言	1
--------	---

1.2 位移函数的选择	5
-------------	---

1.3 通用的位移函数	7
-------------	---

1.4 用最小总势能原理建立条的特征方程	18
----------------------	----

参考文献	25
------	----

第二章 板与板梁系统的弯曲及其在

板梁桥中的应用	27
---------	----

2.1 引言	27
--------	----

2.2 矩形板条	28
----------	----

2.3 曲板条	41
---------	----

2.4 两相对边简支的斜板条	50
----------------	----

2.5 受弯曲和扭转的梁的刚度矩阵	51
-------------------	----

2.6 数字例题	53
----------	----

2.7 在板桥中的应用	57
-------------	----

参考文献	69
------	----

第三章 平面应力分析

3.1 引言	74
--------	----

3.2 矩形平面应力条	77
-------------	----

3.3 曲条(L02)	87
-------------	----

3.4 数字例题	88
参考文献	91
第四章 专用于箱形梁桥的折板结构分析	93
4.1 引言	93
4.2 刚度矩阵的公式表示	94
4.3 坐标变换	106
4.4 在折板结构中的应用	108
4.5 在箱形梁桥中的应用	111
参考文献	125
第五章 板与壳的振动及稳定	130
5.1 自由振动的矩阵原理	130
5.2 条的相容质量矩阵推导	131
5.3 弯曲板条相容质量矩阵	133
5.4 平面应力板条的相容质量矩阵	138
5.5 扁壳条的综合质量矩阵	141
5.6 薄壁结构的振动	143
5.7 圆柱形壳条(图5-1)	143
5.8 数字例题	150
5.9 桥梁动力分析专题应用	155
5.10 加劲板结构的稳定分析	160
参考文献	163
第六章 有限条分析的进一步发展	168
6.1 引言	168
6.2 利用“混合”条分析部分固定板的 自由振动	168
6.3 柔性端支承的棱柱形板及壳结构	174
6.4 多层夹层板的弯曲和振动	178

参考文献	190
第七章 有限层法及有限棱柱法	192
7.1 引言	192
7.2 有限层法	194
7.3 有限棱柱法	206
参考文献	217
第八章 计算方法及计算机程序	220
8.1 引言	220
8.2 数据准备	221
8.3 分刚度矩阵及转换矩阵	221
8.4 刚度矩阵的集合	226
8.5 引入所给定的位移	230
8.6 联立方程式的求解	231
8.7 内力计算	235
8.8 特征值解	237
8.9 折板计算机程序	237
第九章 夹层板屈曲分析的有限层法	271
9.1 提要	271
9.2 引言	271
9.3 原理	272
9.4 数字算例	275
9.5 结束语	278
参考文献	278
第十章 夹层板的振动、弯曲和稳定	282
10.1 提要	282
10.2 引言	282
10.3 理论	284

10.4	算例	291
10.5	结束语	297
参考文献		297
第十一章 结构分析的样条有限条法		300
11.1	提要	300
11.2	引言	301
11.3	基本概念	301
11.4	位移函数和条的表示法	305
11.5	数值算例	307
11.6	结束语	313
参考文献		314

第一章 有限条法

1.1 引言

现时，作为结构分析中最有效的和用途广泛的解算工具的有限单元法，已经建立并已是众所周知的。然而，对于许多具有规则几何形状的平面和简单边界条件的结构来说，完全的有限单元分析常常是既浪费又不必要，有时甚至不可能。当要求较精确的分析或高维问题分析时，解题费用很高，通常按照某种数量级猛增。此外，常遇到的问题是其精确分析的规模可以远远地超过设计人员或研究人员所能使用的任何机器，致使问题或只能粗略地解决，或是为降低内存要求而必须写出一些附加的耗费时间的子程序。上述观点对于三维固体和空间结构静力计算以及对于振动和稳定分析特征值问题尤其正确。针对前述种种结构显然需要另选一种方法。它不但能减少计算工作量和内存需要量，同时，在某种程度上又保持了有限单元分析的多用性。

采用最近发展起来的有限条法可以满足这些要求。此法是将结构划分成二维（条）或三维（棱柱，层）的许多子区域，子区域中有一对相对边（二维），一对或几对相对面（三维）与结构的边界重合。沿一个或两个坐标轴方向，结构的几何形状通常不变，因而沿全长条的宽度或棱柱或层的横截面不改变。所以，当把箱形梁桥和空心板很方便地划分成为条或棱柱时，对于厚的，各向同性的，或多层板和壳来说，将它们划分为层肯定是更恰当的。

有限条法可作为用位移逼近的有限单元法的一种特殊形式。不同的是标准的有限单元法是沿各个方向采用多项式的位移函数，有限条法只需沿某些方向采用简单多项式，沿其它方向则为连续光滑可微的级数，并规定此级数必需预先满足这些条和棱柱的端部的边界条件。位移函数的一般形式是以多项式和级数的乘积给出的。这样，对于一个条来说，就能将二维问题简化为一维问题。

$$w = \sum_{m=1}^r f_m(x) Y_m \quad (1.1a)$$

同样地，对于一个棱柱来说，三维问题就能简化为二维问题，位移函数可写为

$$w = \sum_{m=1}^r f_m(x, z) Y_m \quad (1.1b)$$

最后，在一个层的情形中，三维问题可以当作一维问题来处理

$$w = \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^t f_{mn}(z) X_m Y_n \quad (1.1c)$$

以上诸式中，级数取到第 r 项和第 t 项； $f_m(x)$ ， $f_m(x, z)$ ， $f_{mn}(z)$ 是对应于级数第 m 项和第 n 项的具有待定常数的多项式；而 X_m ， Y_m 各是沿 x 和 y 方向满足端部条件的级数，它们也确定沿 x ， y 方向的变形形式。对于几种实际的结构，从图 1-1 可见到上面所作讨论的图解和降低维度对矩阵带宽的影响。表 1-1 中列出了有限单元法和有限条法间的简单比较。

有限条法的原理与文献⁽²⁾的方法相类似，也是将偏微分方程化为常微分方程。