普通高等教育"十二五"规划教材

微积分及其应用全程学习指导

SOLUTIONS MANUAL TO ACCOMPANY CALCULUS AND ITS APPLICATION

田　洁　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

免费电子课件

普通高等教育“十二五”规划教材

微积分及其应用
全程学习指导

主　编　田　洁
副主编　张晓平　崔　强
主　审　王继忠

机械工业出版社

本书是《微积分及其应用》(上、下册）的学习辅导教材，按照《微积分及其应用》的章节顺序分为十章．每章均由六部分组成：一、预习导引，引入各章的主要问题；二、知识梳理，列出了基本概念、定理以及内容重点；三、释疑解难，对各章中经常出错的问题进行了分析和详解；四、典型题精讲，列出了各类考试中常见的经典题型，讲解解题方法和技巧；五、教材习题选解，给出了教材中大部分习题的详解；六、自测题．

本书可供学习高等数学的经济管理类的读者使用，也可供大学数学教学参考．

图书在版编目（CIP）数据

微积分及其应用全程学习指导/田洁主编．—北京：机械工业出版社，2014．5

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-111-45834-0

Ⅰ．①微…　Ⅱ．①田…　Ⅲ．①微积分－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 027067 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫　李　乐

版式设计：霍永明　责任校对：刘怡丹

封面设计：张　静　责任印制：乔　宇

北京铭成印刷有限公司印刷

2014年9月第1版第1次印刷

169mm×239mm · 21.25印张 · 430千字

0001—2000册

标准书号：ISBN 978-7-111-45834-0

定价：39.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

社服务中心：（010）88361066

销 售 一 部：（010）68326294

销 售 二 部：（010）88379649

读者购书热线：（010）88379203

网络服务

教 材 网：http://www.cmpedu.com

机工官网：http://www.cmpbook.com

机工官博：http://weibo.com/cmp1952

封面无防伪标均为盗版

前　　言

《微积分及其应用》是为高等学校经济管理类本科生编写的教材，为了帮助学生更快更好地了解教材，比较准确地掌握教材的重点和难点，我们编写了这本辅导教材．本书各章按照实际需要，分为预习导引、知识梳理、释疑解难、典型题精讲、教材习题选解、自测题六部分．

第一部分预习导引，主要引入各章的主要问题，提示预习的方向．

第二部分知识梳理，简明扼要地给出每一章的要点，突出各章节需要掌握的核心内容．

第三部分释疑解难，主要介绍各章中经常出错或有疑问的问题，并给出了详细精确的解答．

第四部分典型题精讲，列出了各类考试中常见的经典题型，并给出了主要解题方法和技巧，同时对近几年的考研真题（例题中“130304”表示：年代\类别\分值，即此题是2013年数学三的考题，分值4分）进行了详解．这些例题类型多、技巧性强，通过对例题的解析，能帮助读者加深对基本概念和理论的理解，熟练掌握解题方法和技巧．

第五部分教材习题选解，给出了《微积分及其应用》（上、下册）中大部分习题的详解，加深读者对教材的理解，并且帮助读者熟练利用教材知识解决问题．

最后一部分自测题，反映了各类考试以及学习的重点，便于读者对所学内容检测，从中看到不足，从而有利于进一步学习．

参加本书编写的有（排名不分先后）李秀珍、于江波（第一章），田洁（第二章），隋梅真、陈铃（第三章），侯淑轩、姚建丽（第四章），张晓平、葛倩（第五章），赵永谦、綦路（第六章），于正文、胡晓涛（第七章），崔强、许国（第八章），于宁、王凤英（第九章），黄福同、王爽（第十章）．

本书的编写参阅了许多教材论著及文献，并引用了部分论著中的例子，恕不一一指明出处，在此一并向有关作者致谢！

书中难免有不妥之处，恳请读者给予批评指正．

编　者

目　　录

第一章　函数与极限

一、预习导引

第一章的内容是在中学已学知识的基础上，进一步阐明函数的一般定义，总结以前学过的函数；学习函数极限、连续的概念及性质，为以后的学习奠定基础．

1. 集合

（1）阅读集合部分的内容后，你遇到过以前没学的概念吗？尝试用图形表示这些概念．从你熟悉的学习和生活实践中举例说明这些概念．

（2）x 与 5 的距离不超过 0.1，则 x 可能的取值范围是什么，用图形表示出来．x 与 5 的距离不超过任意小的正数 ε，则 x 可能的值又是什么，你会用图形表示吗？

2. 映射与函数

（1）阅读映射部分的内容后，你会用图形表示映射的概念吗？从生活实践中举例说明映射的概念．

（2）你知道函数与映射的区别吗？

（3）在这部分内容中给出了函数的一些特性，对每一个性质请你找出一个函数满足该性质，并把它的图形画出来，仔细体会这些性质反映在几何图形上的形态．

（4）教材中介绍的经济函数，在日常生活中你遇到过吗？举例说明你曾经遇到的经济函数．

3. 极限

（1）用计算器计算 $n=5$，10，50，100，150，200，250，300，1000 时，$1+\dfrac{1}{n}$的值，并在数轴上描出这些点，由此判断当 n 趋于无穷大时，数列

$$\frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots,\ 1+\frac{1}{n},\ \cdots$$

的一般项 $1+\dfrac{1}{n}$会趋向于什么值？怎样理解“当 n 无限增大时，x_n 无限接近于常数 1”？仔细阅读本章第二节“数列极限的定义”部分，会从直观上帮助你理解这些问题．

（2）用数列极限的定义证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 时，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，怎样证明 $N>0$ 的存在性，N 是否唯一？仔细阅读本章第二节的例题，你会从中得到答案．

（3）阅读“收敛数列的性质”，注意证明这些性质的方法有什么异同？这样有

助于你加深理解收敛数列的性质，对于今后利用极限定义证明相关问题也有所帮助.

(4) 你能根据数列极限的定义给出，当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限的定义吗？阅读本章第三节第一部分，细心体会几何解释会帮助你加深理解函数极限的定义.

(5) 用计算器计算 $x=0.7$，0.75，0.8，0.85，0.9，0.95，0.99 时，$y=\frac{x^2-1}{x-1}$的值，并画出其图形，观察当 x 趋向 1 时，$y=\frac{x^2-1}{x-1}$的变化趋势，从直观上观察“当 x 趋向 1 时，函数 y 趋于 2”. 对于理解“当 x 趋向 x_0 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限的定义”是有很大的帮助的.

(6) 用函数极限的定义证明极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 时，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，怎样证明 $\delta>0$ 的存在性，δ 是否唯一？仔细阅读本章第三节的例题，你会从中得到答案.

(7) 在定义 2 中，ε 与 δ 各有什么意义？它们之间有什么关系？仔细阅读本章第三节第二部分，会帮助你理解这些问题.

4. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小量是一类特殊的函数极限. 为什么学习了函数极限的相关内容还要学习无穷小量呢？仔细阅读本章第四节，体会函数的极限与无穷小量的关系. 以后学习导数、各类积分等问题时，注意无穷小量在其中的作用，你会在学习的过程中慢慢体会到无穷小量的重要性.

(2) 怎样比较同一过程中的两个无穷小量？它在求解相关的极限中有什么作用？仔细阅读第七节，从中找出答案.

5. 极限存在准则 重要极限

(1) 在本章第二，三节中，我们学习了极限的概念、性质及运算法则，但对如何证明函数极限的存在性（除用定义外）没有涉及. 通过阅读本章第六节，你会得到两个证明极限存在的准则. 仔细体会教材中的例题，对你理解和应用法则有很大的帮助.

(2) 在初等数学中，借助单位圆给出了三角函数的定义. 你能利用单位圆，构造直角三角形、扇形使其面积只用圆心角 x 和它的三角函数来表示吗？比较这些三角形和扇形面积的大小. 你能利用夹逼准则及所得的不等式，证明极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 吗？

(3) 初等数学中学习了 $(a+b)^n$ 的展开式，将 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 展开，并利用这个展开式证明数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的. 你能通过适当放大 x_n 展开式中的各项，证明它有界吗？如果有困难，请仔细阅读第六节你会找到答案. 读完第六节你可能不知道为什么把这两个极限叫做重要极限，学习了导数和积分公式后你会得到答案.

6. 连续

(1) 函数在一点连续的概念是用极限定义的，通过阅读教材该部分内容后，你知道函数在一点连续与在该点的极限有什么区别吗?

(2) 函数的间断点有哪些类型，它们反映在图形上情形如何? 通过阅读这部分内容找出答案.

(3) 阅读本章第八节第二部分后，请你列出求函数间断点的步骤. 你知道怎样修改或补充函数在可去间断点处的定义，使其在该点连续吗?

(4) 连续函数在闭区间上有哪些性质，仔细阅读教材，从几何上给出解释.

二、知识梳理

1. 映射

定义 1　设 X, Y 是两个非空集合，如果存在一个对应法则 f, 使得对于集合 X 中的任意元素 x, 按照法则 f, 在集合 Y 中有唯一的元素 y 与之对应，则称 f 是从集合 X 到集合 Y 的一个**映射**，记作

$$f:X\to Y,$$

其中 y 称为元素 x 在映射 f 下的**像**，记作 $f(x)$，即

$$y=f(x),$$

x 称为映射 f 下 y 的**原像**. 集合 X 称为映射 f 的**定义域**，记作 $D_f=X$, X 中所有元素的像组成的集合

$$\{f(x)\mid x\in X\}$$

称为映射 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(X)$.

2. 函数

(1) 函数的定义

定义 2　设数集 $D\subset\mathbf{R}$, 则称映射 f: $D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，简记为

$$y=f(x),\ x\in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，记作 D_f, 即 $D_f=D$. 所有函数值 $f(x)$ 构成的集合称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}.$$

(2) 函数的性质

有界性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $X\subset D$. 如果存在正数 M, 使得对任一 $x\in X$, 不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

都成立，则称 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称 $f(x)$ 在 X 上无界.

单调性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 区间 $I\subset D$. 如果对于 I 上任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称$f(x)$在区间I上是单调增加（单调减少）的.

奇偶性 设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称. 如果对于任一$x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称$f(x)$为偶函数.

如果对于任一$x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立，则称$f(x)$为奇函数.

周期性 设函数$f(x)$的定义域为D，如果存在正数$T>0$，使得对于任一$x\in D$有$(x\pm T)\in D$，且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称$f(x)$是一个**周期函数**，T称为$f(x)$的**周期**，通常我们所说的周期是指最小正周期.

反函数 设函数f: $D\to\mathbf{R}$是单射，则f存在逆映射f^{-1}：$f(D)\to D$，称此映射f^{-1}为函数f的反函数.

复合函数 设函数f和g的定义域分别为D_f，D_g，g的值域$R_g\subset D_f$，则称定义在D_g上的函数$f\circ g$是由函数f和g构成的**复合函数**，其中

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)),$$

对复合函数$f\circ g$，称$u=g(x)$为中间变量.

基本初等函数 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

初等函数 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

3. 极限的定义

数列极限 对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，总有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立，则称a为数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

函数极限($x\to\infty$) 对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当$|x|>X$时，总有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称A为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

函数极限($x\to x_0$) 对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，总有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

左（右）极限 对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<x_0-x<\delta(0<x-x_0<\delta)$时，总有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称A为函数$f(x)$当x从x_0左（右）侧趋于x_0时的极限，记作

$$f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\left(f(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\right).$$

4. 无穷小与无穷大

无穷小的定义　若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)=0$，则称$f(x)$为 $x \to x_0 (x \to \infty)$时的无穷小.

无穷大的定义　对于$\forall M>0$，$\exists X>0(\delta>0)$，当$|x|>X(0<|x-x_0|<\delta)$时，总有

$$|f(x)|>M$$

成立，则称$f(x)$当$x \to \infty$ $(x \to x_0)$时为无穷大，记为 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)=\infty$.

无穷小的比较　设$\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=0$，

(1) 若$\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$，则称$\beta(x)$是比$\alpha(x)$高阶的无穷小，记作$\beta(x)=o(\alpha(x))$；

(2) 若$\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$，则称$\beta(x)$是比$\alpha(x)$低阶的无穷小；

(3) 若$\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=C(C\neq0)$，则称$\beta(x)$与$\alpha(x)$是同阶无穷小；

(4) 若$\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$，则称$\beta(x)$与$\alpha(x)$是等价无穷小，记为$\beta(x)\sim\alpha(x)$；

(5) 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\beta(x)}{x^k}=C(C\neq0,\ k>0)$，则称$\beta(x)$是$x$的$k$阶无穷小.

无穷小的性质　设α，β，α_1，α_2，…，α_n是在自变量的同一变化过程中的无穷小，u是有界量，c是常数，$n\in\mathbf{N}$，则

(1) $\alpha\pm\beta$，$u\alpha$，$c\alpha$，$\alpha\beta$，α^n，$\alpha_1\pm\alpha_2\pm\cdots\pm\alpha_n$，$\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\cdots\cdot\alpha_n$是这一变化过程中的无穷小；

(2) $\beta\sim\alpha\Leftrightarrow\beta=\alpha+o(\alpha)$；

(3) $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在$\Leftrightarrow\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$（等价无穷小代换定理）

5. 极限的运算及性质

极限的四则运算　设$\lim f(x)$及$\lim g(x)$存在，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq0)$.

特别地，$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$，$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n,\ 这里\ a_0b_0\neq0.\\ \infty, & m<n,\end{cases}$$

两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$

特别地，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$

6. 极限的有关定理

定理 1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A.$

定理 2 函数的极限如果存在，则极限值是唯一的.

定理 3 （极限与无穷小的关系）.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)\text{，其中}\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

定理 4 （保号性）若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$A>0(A<0)$，则存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>0(f(x)<0)$.

定理 5 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$f(x)>0(f(x)<0)$，则$A\geqslant 0(A\leqslant 0)$.

定理 6 单调有界数列必有极限.

定理 7 （夹逼准则）若在 x_0 的某一邻域内，满足

$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，

则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

7. 连续

定义 3 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$或$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，则称$f(x)$在点 x_0 连续.

间断点 若函数$f(x)$在点 x_0 不连续，则称 x_0 为$f(x)$的间断点.

第一类间断点 左、右极限都存在的间断点.

（1）左、右极限都存在且相等，称为可去间断点；

（2）左、右极限都存在但不相等，称为跳跃间断点.

第二类间断点 左、右极限至少有一个不存在的间断点.

初等函数的连续性 初等函数在其定义域内均连续.

闭区间上连续函数的性质

定理 8 （最大值最小值定理）闭区间上连续的函数在该区间上必取得最大值和最小值.

定理 9 （零点定理）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b)<0$，则在(a,b)内至少存在一个$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$.

定理 10 （介值定理）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)\neq f(b)$，若 c 是介于$f(a)$与$f(b)$之间的任意数，则在(a,b)内至少存在一个 ξ，使得$f(\xi)=c$.

三、释疑解难

1. 已知数列$\{x_n\}$是无界数列，则当$n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$是无穷大量.

释疑解难　这个结论是错误的，无界数列与无穷大量有本质的不同. $\{x_n\}$无界是指：对于任意大的数$M>0$，$\exists N_0$，使得$|x_{N_0}|>M$. 而$n\to\infty$当时，数列$\{x_n\}$是无穷大量是指：对于任意大的数$M>0$，$\exists N>0$，使得当$n>N$时，恒有$|x_n|>M$.

例如，数列$\left\{x_n=n\cos\dfrac{n\pi}{2}\right\}$，当$n=2k+1(k\in\mathbf{N}_+)$时，$x_n=0$；当$n=2k(k\in\mathbf{N}_+)$且$k\to\infty$时，$x_n\to\infty$. 所以，数列$\left\{x_n=n\cos\dfrac{n\pi}{2}\right\}$是无界的，但当$n\to\infty$时，不是无穷大量.

2. 如果$f(x_0)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$一定吗?

释疑解难　不一定. 根据函数极限的定义，函数在一点的极限不一定等于函数在该点的极限值.

例如，函数$f(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x}$在$x=1$点没有定义，但是$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{1-x}=2$.

3. 找出下列求极限的过程的错误，并说明原因：

(1) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2-1}}{\sqrt[3]{2x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3-\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{2+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$.

释疑解难　(1) 这错误出在第一个等号，其原因是错误地运用了极限的乘法法则，这个法则是在各因子的极限存在的条件下才成立. 正确的做法是：

由于$\lim\limits_{x\to0}x=0$且$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$，所以$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

(2) 这个错误出在第一个等号. 分子中x的最高次数比分母中x的最高次数高，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2-1}}{\sqrt[3]{2x^2+1}}=\infty.$$

4. 无限个无穷小的“和”是无穷小吗?

释疑解难　不一定.

例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$，当$n\to\infty$时，极限式中每一项都是无穷小量，求这个极限实际上就是求这无穷多个无穷小量的“和”. 因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

5. 指出下列解题过程中的错误：

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x^3}=0.$$

释疑解难　第一个等号错了，因为两个无穷小量相加减时不能用无穷小等价代换.

6. 两个无穷大量之差等于零吗?

释疑解难　不一定.

例如，$f(x)=x+\frac{1}{x}$，$g(x)=1+x$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$.

而

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)=-1,$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to\infty}\left(2x+\frac{1}{x}+1\right)=\infty.$$

7. 两个无穷大量的代数和一定无界吗?

释疑解难　不一定.

例如，$f(x)=x+\sin x$，$g(x)=1-x$，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$，$g(x)$ 都是无穷大量，但 $f(x)+g(x)=1+\sin x$ 在实数范围内有界.

8. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，函数 $y=f(x)$ 连续，而函数 $y=g(x)$ 有间断点，则函数 $f(x)g(x)$ 一定间断吗?

释疑解难　不一定. 但如果 $f(x)$ 在 $g(x)$ 的间断点 $x=x_0$ 处的函数值不等于零，则函数 $f(x)g(x)$ 在该点必间断. 所以要使 $f(x)g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取 0 值，函数 $f(x)g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有可能连续.

例如，取 $f(x)=x$，$g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 则 $f(x)g(x)=|x|$ 处处连续.

9. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)\neq0$ 是连续函数，$g(x)$ 有间断点，函数 $g(f(x))$ 一定有间断点吗? 函数 $(g(x))^2$ 和 $f(g(x))$ 呢?

释疑解难　函数 $g(f(x))$，$(g(x))^2$ 及 $f(g(x))$ 都不一定有间断点.

例如，$f(x)\equiv1$，$g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 则 $g(f(x))\equiv1$，$(g(x))^2\equiv1$，$f(g(x))\equiv$

1 均无间断点．从举反例的过程可知：为求 $g(f(x))$ 无间断点，就要使 $f(x)$ 的值域不含 $g(x)$ 的间断点．而 $f(g(x))$ 无间断点，只要 $g(x)$ 的间断点处的左、右极限都存在，$f(x)$ 取常数值．

四、典型题精讲

题型 1　利用函数概念解题

【方法与技巧】

（1）求函数的定义域．求出使函数的表达式有意义的实数的集合．

（2）建立函数关系式．主要根据问题的实际背景，建立变量之间的等量关系．

（3）函数特性的判别与证明．主要利用函数性质的定义进行判别证明．

（4）求已知函数的反函数．把 y 看做是自变量，x 看做因变量，从 $y=f(x)$ 中解出 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$.

（5）求几个函数复合而成的复合函数．一般用两种方法：代入法、分析法．代入法是将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替．分析法就是由最外层函数的定义域的各区段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数．这种方法适用于初等函数与分段函数或分段函数与分段函数之间的复合．

例 1.1　已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，$\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域．

解　因为 $f(x)=e^{x^2}$，所以 $f(\varphi(x))=e^{[\varphi(x)]^2}$，即 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$. 两边取对数，得 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$. 又 $\varphi(x)\geqslant 0$，因此 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，其定义域为 $(-\infty, 0]$.

注意　求复合函数的定义域时，内层函数的值域必须包含在外层函数的定义域内．

题型 2　求数列或函数的极限

【方法与技巧】

常用求极限的方法有：

（1）用定义证明极限存在．

（2）利用函数的左、右极限求极限．

（3）求 n 项和或积的极限．①利用恒等变形（拆项、分解等）使其在求和或求积的过程中抵消或约掉中间项，化简后再求极限．②对于部分 n 项积的极限还可以将分子、分母同乘以一个因子或取对数将其化为 n 项和的情形，再求极限．③如果 n 个项按递增或递减排列，利用夹逼准则求解．

（4）用极限存在的两个准则求极限．利用夹逼准则一般通过放大或缩小分母来找不等式两边数列的通项．利用单调有界准则时，可以直接分析数列的通项或用数学归纳法验证数列的单调有界，再设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 代入给定的 x_n 的表达式中，则该

式变为含有 a 的代数方程，解这个方程即得该数列的极限.

(5) 用两个重要极限求极限.

(6) 运用极限的运算法则求极限.

例 1.2　用数列极限的定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

分析　用“$\varepsilon-N$”定义证明数列极限存在，关键是找出正整数 N. 找 N 的一般过程如下：

对 $\forall\varepsilon>0$，解绝对值不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$，得 $n>\varphi(\varepsilon)$. 取 $N=[\varphi(\varepsilon)]$，则当 $n>N$ 时，总有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.

证　对于 $\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n\left(\sqrt{n^2+a^2}+n\right)}<\frac{a^2}{n}<\varepsilon,$$

只需 $n>\dfrac{a^2}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\dfrac{a^2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1.$$

例 1.3　对于数列 $\{x_n\}$，若当 $k\to\infty$ 时，$x_{2k-1}\to a$，$x_{2k}\to a$，证明：当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to a$.

证　因为当 $k\to\infty$ 时，$x_{2k-1}\to a$，$x_{2k}\to a$，所以对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists K_1>0$，当 $2k-1>2K_1-1$ 时，有

$$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$$

成立；$\exists K_2>0$，当 $2k>2K_2$ 时，有 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$ 成立. 取

$$N=\max\{2K_1-1,\ 2K_2\},$$

当 $n>N$ 时，就有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

例 1.4　用函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

分析　用“$\varepsilon-\delta$”定义证明函数极限存在，关键是找出正数 δ. 找 δ 的一般过程如下：

对 $\forall\varepsilon>0$，解不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，得 $|x-x_0|<\varphi(\varepsilon)$. 取 $\delta=[\varphi(\varepsilon)]$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

证　因为 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|1-2x-2|=2\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|$，对于 $\forall\varepsilon>0$，要使

$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$，只需$\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<\frac{1}{2}\varepsilon$. 所以，对于$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$，则当$0<\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<\delta$时，就有

$$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{1-4x^2}{2x+1}=2.$$

例 1.5　(000305) 求下列极限：$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$.

分析　本题函数中有$|x|$及$e^{\frac{1}{x}}$项，应利用函数的左右极限求极限．

解　因为

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2}{1}-1=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1.$$

所以

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

例 1.6　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\cdots+\frac{1}{9n^2-3n-2}\right)$.

分析　本题为 n 项和的极限，先化简和再求极限．

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\cdots+\frac{1}{9n^2-3n-2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}.$$

例 1.7　(080204) 设$0<a<b$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=($　　$)$.

(A) a;　　(B) a^{-1};　　(C) b;　　(D) b^{-1}.

分析　本题应利用极限的夹逼准则．

解　因为

$$a^{-1}\leqslant(a^{-n})^{\frac{1}{n}}<(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}<(a^{-n}+a^{-n})^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{1}{n}}a^{-1},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}a^{-1}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}a^{-1}=a^{-1}$，由数列极限的夹逼准则，所以