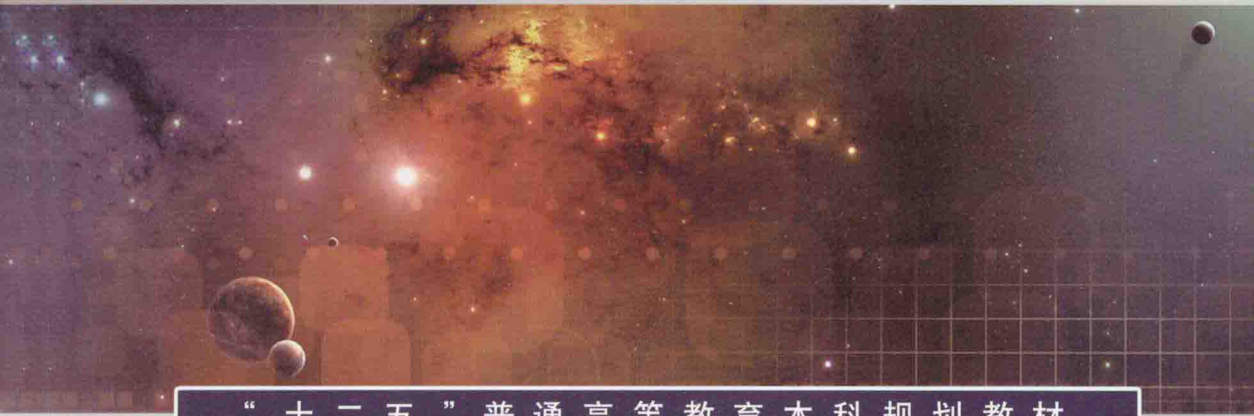

"十二五"普通高等教育本科规划教材

线性代数

主编 朱开永 王升瑞

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

"十二五"普通高等教

线性代数

主　编　朱开永　王升瑞
副主编　于海波　张　伟　曹德欣

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是根据高等工程教育的办学定位和工程技术型人才培养的目标，参考“高等院校线性代数教学大纲与基本要求”，结合笔者多年教学实践经验编写而成.

本书的主要内容包括行列式，矩阵，线性方程组，相似矩阵与二次型. 每章后附有自测题，所有的习题和自测题书中配有答案. 教材附有多媒体课件. 本书在编写过程中坚持“理论体系完整，重在实际应用”的原则，注重培养学生分析问题和运算能力. 取材少而精，文字叙述通俗易懂；深入浅出，循序渐进；重点突出、难点分散；例题较多，典型性强；深广度合适，便于教与学.

本书可作为高等院校（独立学院、民办高校）理工科（或经管类）专业应用型人才培养的教材，也可以作为高等技术教育，成人教育的本科教材，以及自学者学习线性代数的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 朱开永，王升瑞主编. -- 上海：同济大学出版社，2013.8

ISBN 978-7-5608-5191-4

Ⅰ.①线… Ⅱ.①朱…②王… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 139705 号

“十二五”普通高等教育本科规划教材

线性代数

主　编　朱开永　王升瑞　**副主编**　于海波　张　伟　曹德欣

责任编辑　陈佳蔚　**责任校对**　徐春莲　**封面设计**　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

（地址：上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021-65985622）

经　销　全国各地新华书店

印　刷　同济大学印刷厂

开　本　787 mm×960 mm　1/16

印　张　14.25

印　数　1—3 100

字　数　355 000

版　次　2013 年 8 月第 1 版　2013 年 8 月第 1 次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-5191-4

定　价　26.00 元

前　言

随着社会对高素质应用型人才大量需求，目前我国对高等工程技术教育日夜强化，迫切需要我们编写与这种教学层次特征相适应的优秀教材，其中包含针对高等院校（尤其独立学院、民办高校、应用技术学院）的数学教材.

编者在编写教材过程中，是根据“线性代数”教学大纲与基本要求，参考了兄弟院校的有关资料，结合编者多年教学实践经验，在适度注意本课程自身的系统性与逻辑性的同时，着重把握“理论体系完整，重在实际应用”的原则，侧重于学生完整全面地掌握基本概念、基本方法、强调了培养和提高学生基本运算能力. 本书取材少而精，文字叙述通俗易懂，论述确切，对超出基本要求的内容一般不编入. 对一些理论性较强的内容尽量做好背景的铺垫，并通过典型的例题，简洁细腻的解题方法帮助学生掌握本课程的知识.

本书由朱开永组织策划，制定编写计划和思路. 第一章由王升瑞编写，第二章由冯洁编写，第三章由张伟编写，第四章由于海波编写. 全书由王升瑞统稿、定稿及编写多媒体课件，由朱开永和曹德欣对本教材进行了全面的审核. 本教材的编者都是在教学第一线工作多年、教学经验丰富的教师，在编写和审定教材时，大家紧扣指导思想和编写原则，准确的定位，注重构建教材的体系和特色，并严谨细致对内容的排序，例题和习题的选择深入探讨、斟字酌句，倾注了大量的心血，为教材的质量提供了重要的保障. 由于编者水平有限，书中难免有不足之处，欢迎批评指正.

编　者

2013 年 8 月

目　　录

第一章 行 列 式

在现实世界中，变量与变量之间的关系是多种多样的，但是可以把它们分成线性和非线性的两大类. 变量之间的关系中最简单的就是线性关系，线性关系主要是由加法和数乘来表现. 在解析几何中，直线和平面是比较简单的图形，其坐标变量之间就存在线性关系. 一些力学量之间也存在这种关系. 在研究非线性关系时，一个重要的方法就是把问题线性化，即把问题化为解线性代数方程之类的运算.

§1.1 行列式的概念

首先我们考察用消元法求解二元一次方程组和三元一次方程组，从中引出二阶和三阶行列式的概念，然后把这些概念推广，得到高阶（n 阶，$n \geqslant 4$）行列式的概念.

一、二阶行列式

考察两个未知量 x_1，x_2 的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

其中，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 是未知量的系数，可简记为 a_{ij}（i，$j=1$，2）. a_{ij} 有两个下标 i，j. a_{ij} 表明是第 i 个方程中第 j 个未知量 x_j 的系数. 例如，a_{21} 就是第二个方程中第一个未知量 x_1 的系数. b_1，b_2 是常数项.

现在采用消元法求解方程组(1)，为了消去 x_2，用 a_{22} 乘第一个方程，a_{12} 乘第二个方程，即

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2. \end{cases}$$

然后相减，得到只含 x_1 的方程

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2. \tag{2}$$

为消去 x_1，用 a_{21} 乘第一个方程，a_{11} 乘第二个方程，即

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1+a_{12}a_{21}x_2=b_1a_{21}, \\ a_{11}a_{21}x_1+a_{11}a_{22}x_2=a_{11}b_2. \end{cases}$$

然后相减，得到只含 x_2 的方程

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}. \tag{3}$$

由式(2)和式(3)可知，若

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0, \tag{4}$$

则方程组(1)有唯一解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{5}$$

由式(5)给出的 x_1 与 x_2 的表达式，分母都是 D，它只依赖于方程组(1)的四个系数. 为了便于记住 D 的表达式，我们引进二阶行列式的概念.

定义 1 称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{6}$$

为**二阶行列式**.

它含有两行，两列. 横写的叫做**行**，竖写的叫做**列**. 行列式中的数 a_{ij} $(i,\ j=1,2)$ 称为行列式的**元素**，i 表示 a_{ij} 所在的**行数**，j 表示 a_{ij} 所在的**列数**. a_{ij} 表示位于行列式第 i 行第 j 列的元素，如 a_{12} 表示位于第 1 行第 2 列的元素.

二阶行列式表示一个**数**，此数为 2! 项的代数和：一个是在从左上角到右下角的对角线(又称为行列式的主对角线)上两个元素的乘积，取正号；另一个是从右上角到左下角的对角线上两个元素的乘积，取负号. 例如，

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=1\times 5-(-2)\times 3=11,$$

其中，$a_{11}=1$，$a_{12}=-2$，$a_{21}=3$，$a_{22}=5$. 又如，

$$\begin{vmatrix} a+b & a \\ a & a-b \end{vmatrix}=(a+b)(a-b)-a\cdot a=-b^2,$$

其中，$a_{11}=a+b$，$a_{12}=a$，$a_{21}=a$，$a_{22}=a-b$.

根据定义，我们容易得知式(5)中两个分子可以分别写成

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

如果我们记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

那么，方程组(1)的唯一解可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{8}$$

其中，D 是由方程组(1)的系数确定的二阶行列式，与右端常数项无关，故称 D 为方程组(1)的**系数行列式**.

D_1 是把 D 中第 1 列(x_1 的系数)a_{11}，a_{21} 换成了常数项 b_1，b_2，D_2 是把 D 的第 2 列(x_2 的系数)a_{12}，a_{22} 换成了常数项 b_1，b_2. 这样求解二元一次方程组就归结为求 3 个二阶行列式的值. 像这样用行列式来表示解的形式简便，容易记忆.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=7, \\ x_1-3x_2=-2. \end{cases}$$

解 这里 $$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-7,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-19,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-11.$$

因此，所给方程组的唯一解是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-19}{-7}=\frac{19}{7},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-11}{-7}=\frac{11}{7}.$$

二、三阶行列式

对于含有 3 个未知量 x_1，x_2，x_3 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{9}$$

也可以用消元法求解. 为了求得 x_1,需要消去 x_3 和 x_2. 消元过程可以分两步进行:

第一步,从式(9)的前两个方程和后两个方程中消去 x_3,得到含有 x_1 和 x_2 的线性方程;第二步,再消去 x_2,由第一步(第一个方程乘 a_{23},减去第二个方程乘 a_{13};第二个方程乘 a_{33},减去第三个方程乘 a_{23}),得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})x_1+(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})x_2=b_1a_{23}-a_{13}b_2, \\ (a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})x_1+(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})x_2=b_2a_{33}-a_{23}b_3. \end{cases}$$

再由第二步[第一个方程乘$(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$减去第二个方程乘$(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$]整理得到

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13})x_1 \\ &=b_1a_{22}a_{33}-b_1a_{32}a_{23}+b_2a_{32}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}.\end{aligned}$$

若 x_1 的系数不为零,于是得到

$$x_1=\frac{D_1}{D}.$$

其中

$$\begin{aligned} D &=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13} \\ &=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &=b_1a_{22}a_{33}-b_1a_{32}a_{23}+b_2a_{32}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13} \\ &=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

同理可得

$$x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

与解二元线性方程组一样，称 D 为式(9)的系数行列式，D_1，D_2，D_3 分别是用常数项来替换 D 中的第 1 列(x_1 的系数)，第 2 列(x_2 的系数)，第 3 列(x_3 的系数)得到的.

我们把形如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 的表示式称为**三阶行列式**. 根据二阶行列式的定义，系数行列式 D 可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

的形式. 这样我们便可以用二阶行列式来定义三阶行列式了.

定义 2　三阶行列式为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}. \end{aligned}$$

按第 1 行的展开式

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

按第 1 列的展开式

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

说明　三阶行列式表示一个数，它是由 3 个二阶行列式来表示的. 若把 3 个二阶行列式展开得到的三阶行列式是由 $3\cdot 2=3!$ 项的代数和组成.

例 2　利用三阶行列式的定义可以计算出三阶行列式的值. 如

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2\times12+4\times(-1)-2\times(-5)=30.$$

例 3 用行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-\ x_2+\ x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=1, \\ \ x_1+3x_2-2x_3=4. \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$$
$$=2\times11-3\times(-1)+3=28,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=47,\quad D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21.$$

因此,方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{13}{28},\quad x_2=\frac{47}{28},\quad x_3=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

三、n 阶行列式

比较 2 个未知量和 3 个未知量的线性方程组解的表达式可以看出,当方程的个数等于未知数的个数时,虽然方程组所含未知量的个数不同,但当引进二阶和三阶行列式后,只要系数行列式 $D\neq0$,它们的解可以表示成相同的形式,即都可以表示成两个行列式之商. 这样我们自然会问,对于更多个未知量(如 n 个未知量)的线性方程组来说,是否也有类似的结果呢? 下面我们首先定义 n 阶行列式.

仿照用二阶行列式来定义三阶行列式的方法. 我们可以利用三阶行列式来定义四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+$$

$$a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

在定义了四阶行列式之后，同样可用递推式定义五阶，六阶，…，n 阶行列式，在 $n-1$ 阶行列式已经定义的情况下，n 阶行列式可以定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$(-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

说明 （1）n 阶行列式是由 n^2 个数 $a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$排成 n 行 n 列的表构成，横写的称为行，竖写的称为列. a_{ij} 表示位于行列式第 i 行第 j 列的元素.

（2）n 阶行列式表示一个数，它是由 n 个 $n-1$ 阶行列式表示.

（3）式(13)右端的书写规律是：$n-1$ 阶行列式前面的系数是 n 阶行列式的第一列元素 a_{11}，a_{21}，…，a_{n1}，其符号是正号与负号相间. 第一个 $n-1$ 阶行列式是原 n 阶行列式中划去 a_{11} 所在的行（第一行）和所在的列（第一列）后剩下的行列式，……，第 i 个 $n-1$ 阶行列式是原 n 阶行列式中划去 a_{i1} 所在的行（第 i 行）和所在的列（第一列）后剩下的行列式，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

（4）特定阶行列式 $|a|=a$，这里 $|a|$ 不是 a 的绝对值，如 $|-3|=-3$.

例 4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

解 $D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}=abcd.$

说明 此行列式 D 的特点是，主对角线（即自左上角到右下角的那条对角线）的元素不完全为零，其他元素均为零. 这种形式的行列式称为对角形行列式.

习 题 1.1

1. 计算行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$.

2. 用行列式解线性方程组.

(1) $\begin{cases} ax_1-2bx_2=c, \\ 3ax_1-5bx_2=2c \end{cases}$ $(a,\ b\neq 0)$； (2) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=1, \\ 3x_1+5x_2+2x_3=8, \\ x_1-2x_2-3x_3=-1. \end{cases}$

§1.2 行列式的性质

根据行列式的定义可以计算行列式，但是这样对计算高阶行列式是很困难的. 如计算五阶行列式就要计算 5 个四阶行列式，即要计算 20 个三阶行列式，计算量是很大的. 所以一般不采用行列式的定义计算行列式. 为了解决行列式的计算问题，就要先讨论行列式的性质，利用这些性质简化行列式的计算.

一、三阶行列式的性质

性质 1 将行列式的行与列依次互换，行列式值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

证明 只要把上式左右两边的三阶行列式按式(12)展开,然后进行比较即得证(学生自己完成).

若上述等式左端的行列式记为 D,则右边的行列式记为 D^{T},则称行列式 D^{T} 为行列式 D 的**转置行列式**. 例如,设

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix},$$

则 D 的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

利用定义 2 可以算出 $D=D^{\mathrm{T}}=60$.

说明 (1) $(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D$,因此 D 与 D^{T} 互为转置行列式.

(2) 由性质 1 可知,在行列式中行与列所处地位相同,因此凡是对行成立的性质对列也成立,反之亦然. 故下面我们只讨论行列式关于行的性质,至于对列的性质就不再赘述.

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ e & b & 0 & 0 \\ f & g & c & 0 \\ h & i & j & d \end{vmatrix}.$$

解 $$D=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a & e & f & h \\ 0 & b & g & i \\ 0 & 0 & c & j \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} b & g & i \\ 0 & c & j \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix} c & j \\ 0 & d \end{vmatrix}=abcd.$$

说明 (1) 上式中 D 为下三角形行列式,其主对角线右上方的元素全为零. D^{T} 为上三角形行列式,其主对角线左下方的元素全为零. 上、下三角形行列式统称为**三角形行列式**.

(2) 三角形行列式的值等于其主对角线上诸元素的乘积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

或
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 2 行列式任意两行互换后行列式反号.

证明 设将行列式的第 1 行与第 2 行互换(记为 $r_1 \leftrightarrow r_2$),则得到新行列式并按第 1 列展开

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

说明 (1) 为了以后运算方便,我们以 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示行列式中第 i 行与第 j 行互换,以 $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示行列式中第 i 列与第 j 列互换.

(2) 在计算时要注意每互换一次则变一次正负号.

练习 互换行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

第 2 行与第 3 行,验证性质 2 成立.

推论 行列式 D 两行(列)对应元素相等,则 $D=0$.

因为对换相同的两行(列)的对应元素的位置后,出现 $D=-D$,则 $D=0$.

下面的性质 3 至性质 7 由学生自证.

性质 3 行列式某一行的所有元素同乘以常数 k，其结果等于用 k 乘这个行列式. 或者说，如果行列式某一行的所有元素具有公因数 k，那么可以把 k 提到行列式的前面.

设
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

则
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=kD.$$

练习 用行列式
$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix},$$
验证性质 3 成立.

由性质 3 可得到下面的性质 4.

性质 4 行列式中如果有两行的对应元素成比例，则行列式的值等于零.

例如，
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0.$$

练习 用性质 4 计算行列式
$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ 5 & 10 & 15 \end{vmatrix}.$$

性质 5 如果行列式的某行的各元素是两项之和，那么这个行列式等于两个行列式的和.

例如，
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$