数学分析

（上）

数学系自学丛书

数　学　分　析

（上册）

李世金　陈广义　主编

辽宁人民出版社
一九八四年·沈阳

出版说明

为了适应广大在职人员和社会青年自学成才的需要，根据国家建立高等教育自学考试制度的精神，以满足学员自学教材的要求，由辽宁人民出版社出版一套大学数学系自学丛书。

本丛书是由东北师范大学数学系，根据教育部规定的普通高等院校本科必修课现行教学计划和教学大纲编写的。教材内容系统，数据充实，条理清晰，深入浅出；每章均有学习指导和习题解答，便于自学。经过刻苦自学，即可无师自通，达到本科毕业水平。

本丛书有：空间解析几何、高等代数、数学分析、高等几何、常微分方程、复变函数论、近世代数、实变函数论、微分几何、计算机与算法语言BASIC、概率论与数理统计、计算方法等。本丛书既可供自学应试之用，也可供大专院校的本科在校生和函授生及业余大学学生使用。

本丛书由于水平所限，不当之处在所难免，我们热诚希望广大自学读者批评指正。

目　　录

第一章　函数……………………………………………………1
§1.1　实数……………………………………………………1
一　实数　二　数集
§1.2　绝对值不等式……………………………………………5
§1.3　函数……………………………………………………9
一　常量与变量　二　函数概念　三　函数的图象
§1.4　函数举例………………………………………………14
一　函数举例　二　数列
§1.5　某些函数的重要性质……………………………………21
一　函数的奇偶性　二　函数的周期性
三　函数的单调性　四　函数的有界性
§1.6　反函数与复合函数………………………………………26
一　反函数　二　复合函数
§1.7　初等函数………………………………………………32
一　基本初等函数　二　初等函数　三　双曲函数
学习指导…………………………………………………42
习题……………………………………………………………54

第二章　极限……………………………………………………59
§2.1　数列极限………………………………………………59
一　极限思想　二　数列$\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$的极限　三　数列极

限概念　四　对数列极限概念的几点说明　五　举例

§2.2　收敛数列的性质及四则运算……………………71

一　收敛数列的性质　二　收敛数列的四则运算

§2.3　数列极限存在判别法……………………………79

一　确界　二　两个判别法　三　柯西收敛准则

四　子数列

§2.4　函数极限……………………………………………95

一　当$x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限　二　当$x\to a$时，

函数$f(x)$的极限　三　单侧极限

§2.5　函数极限的性质及四则运算 ……………………109

§2.6　函数极限存在判别法 ……………………………115

一　两个判别法　二　两个重要极限　三　柯西收

敛准则

§2.7　无穷小量与无穷大量 ……………………………123

一　无穷小量　二　无穷大量　三　无穷小量阶的比较

§2.8　函数极限与数列极限的关系 ……………………131

学习指导 ………………………………………134

习题 ……………………………………………………178

第三章　连续函数 ……………………………………185

§3.1　函数的连续与间断 ………………………………185

§3.2　函数间断点的分类 ………………………………189

§3.3　连续函数的运算 …………………………………193

一　连续函数的四则运算　二　反函数的连续性

三　复合函数的连续性

§3.4　连续函数的性质 …………………………………197

§3.5　初等函数的连续性 ………………………………201

一　基本初等函数的连续性　二　初等函数的连续性

三　函数的连续性在计算极限上的应用

学习指导……………………………………… 208

习题 ……………………………………………………228

第四章　导数与微分 ……………………………………231
§4.1　问题的提出 ……………………………………231
一　瞬时速度　二　曲线的切线斜率
§4.2　导数的定义 ……………………………………234
§4.3　求导数举例 ……………………………………236
§4.4　求导法则 ………………………………………240
一　导数的四则运算　二　反函数的求导法则
三　复合函数的求导法则
§4.5　初等函数的导数 ………………………………248
§4.6　函数不存在导数举例 …………………………253
§4.7　微分 ……………………………………………256
一　微分的定义及其与导数的关系　二　微分的几何意义
三　运算法则　四　近似计算　五　微分形式的不变性
§4.8　高阶导数与高阶微分 …………………………265
一　高阶导数　二　几个基本初等函数的高阶导数公式
三　运算法则　四　高阶微分
§4.9　参数方程的导数 ………………………………274
学习指导 ………………………………………………277
习题 ……………………………………………………295

第五章　中值定理与泰勒公式 …………………………302
§5.1　中值定理 ………………………………………302
一　费尔马定理　二　中值定理　三　举例
§5.2　洛比达法则 ……………………………………312
一　不定型$\frac{0}{0}$的求值法　二　不定型$\frac{\infty}{\infty}$的求值法
三　其它不定型的求值法
§5.3　泰勒公式 ………………………………………323
一　泰勒公式的引出　二　泰勒公式　三　泰勒公式的余项

学习指导 ……………………………………………333

习题 ……………………………………………………354

第六章 导数在研究函数上的应用 ……………………357
§6.1 函数单调性的判别法 ……………………………357
§6.2 函数极值的判别法 ………………………………360
一 极值的判别法 二 最大值和最小值的求法
§6.3 函数作图 …………………………………………367
一 曲线的凸性 二 曲线的拐点 三 曲线的渐近线 四 函数作图

学习指导 ……………………………………………380

习题 ……………………………………………………396

第七章 实数的基本定理与连续函数的性质（续） ………398
§7.1 实数的基本定理 …………………………………398
一 闭区间套定理 二 有限覆盖定理 三 柯西收敛准则
§7.2 闭区间上连续函数性质的证明 ……………………405
§7.3 一致连续 …………………………………………408

学习指导 ……………………………………………415

习题 ……………………………………………………425

第八章 不定积分 ……………………………………427
§8.1 原函数与不定积分 ………………………………427
§8.2 基本积分表与不定积分的运算法则 ………………431
§8.3 求不定积分的基本方法 …………………………436
一 换元积分法 二 分部积分法

§8.4 有理函数和可化为有理函数的积分法 ……………451
一 有理函数的分解 二 有理函数的积分 三 三角函数有理式的积分法 四 简单无理函数的不定积分
学习指导 ……………………………………466
习题 ………………………………………………484

第九章 定积分 ……………………………………488
§9.1 定积分概念 ……………………………………488
一 两个实例 二 定积分的定义
§9.2 函数的可积条件 ………………………………494
一 可积的必要条件 二 大和与小和
三 可积准则 四 可积函数类
§9.3 定积分的性质 …………………………………505
§9.4 微积分基本公式 ………………………………513
一 用定义计算定积分 二 积分上限函数及其性质
三 微积分基本公式
§9.5 定积分的计算 …………………………………521
一 定积分的换元公式 二 分部积分公式
三 瓦里斯公式
学习指导 ……………………………………528
习题 ………………………………………………553

第十章 定积分的应用 ……………………………557
§10.1 平面图形的面积……………………………557
§10.2 平面曲线的弧长及曲率……………………564
一 平面曲线的弧长 二 平面曲线的曲率
三 曲率圆与曲率中心
§10.3 体积及旋转体的侧面积……………………576
一 已知立体截面面积求体积 二 旋转体的体积
三 旋转体的侧面积

§10.4 定积分在物理上的应用……………………………582
一 微元法 二 静水侧压力 三 变力作功
四 物体的重心
§10.5 平均值………………………………………………592
学习指导……………………………………………597
习题 ……………………………………………………… 619

习题答案及提示 …………………………………… 623
后记 ………………………………………………………656

第一章 函　　数

函数是变量与变量之间相互依赖关系的一种数学抽象．它不仅是中学数学的重要组成部分，而且也是数学分析要研究的主要对象．在这一章里，我们将在中学数学的基础上进一步讨论函数概念，以及函数的重要性质．

§ 1.1 实　　数

由于数学分析是在实数范围内讨论的，因此，在这一节里，我们将简要地复习实数及其性质．

一 实　　数

1　实数的组成

数是计数和度量的结果．在度量中，当被度量的量是单位量的整数倍时，则度量的结果将得到**整数**；当被度量的量与单位量可通约时，则度量的结果将得到**分数**；当被度量的量与单位量不可通约时，则度量的结果将得到**无理数**．例如，正方形的对角线的长度与每边的长度是不可通约的，度量的结果将得到无理数$\sqrt{2}$．圆的周长与其直径的长度也是不可通约的，度量的结果将得到无理数π。

正、负整数与正、负分数，连同零，统称为**有理数**．任何有理数均可表示成分数$\frac{p}{q}$的形式，其中p是整数q是正整数．由于有理数可化为无限十进循环小数，而任何无限十进循环小数

又可以化为有理数，因此也常用无限十进循环小数来表示有理数。与此同时，无理数可用无限十进非循环小数表示。当我们按一定规则能写出一个无限非循环小数的任意位数时，这个无理数就是已知的。

有理数和无理数统称为**实数**。

2　实数的运算

对实数可进行加、减、乘、除（除数不为零）四则运算，并且对任意两个实数进行四则运算的结果仍是实数。

3　实数的性质

实数的有序性　任意两个实数a,b,必满足下述关系之一：

$$a<b,\quad a=b,\quad a>b.$$

实数的传递性　a,b,c是任意实数，如果有$a\leqslant b$，$b\leqslant c$，则$a\leqslant c$。

实数的稠密性　在任意两个不同实数之间存在着无穷多个有理数和无理数。

实数的连续性　实数与数轴上的点是一一对应的，即任一实数在数轴上必有唯一的一点与之对应，反之，数轴上任一点也必有唯一的一个实数与之对应。这样一来，全体实数在数轴上所对应的所有点无空隙地充满了整个数轴。因此，从几何上反映出实数的连续性。在数轴上，把有理数所对应的点叫做**有理点**，把无理数所对应的点叫做**无理点**。

实数的阿基米德性　对于任意两个正实数a与b，存在自然数n，使得$nb>a$。

二　数　　集

1　集合

在现代数学中，集合是一个最基本的概念。为了研究问题的需要，现叙述如下：具有某种特定性质（具体的或抽象的）的对象的全体称为**集合**（简称集），组成集合的对象称为这个集合的**元素**。由数组成的集合称为**数集**。例如，自然数全体组

成了自然数集；有理数全体组成了有理数集；实数全体组成了实数集；平面上一切点的全体组成了平面点集等等。

对于给定的集合来说，可以判定任何一个对象或是这个集合的元素，或不是这个集合的元素，二者必具其一。如果 a 是集 A 的一个元素，就记作 $a\in A$，读作 a 属于 A。如果 a 不是集 A 的元素，就记作 $a\overline{\in} A$，读作 a 不属于 A。例如，如果 A 是偶数集，则 $2\in A$，而 $5\overline{\in} A$。

2　集合的表示

有的集合可以用列举其元素的方法来表示。例如，集合 A 是由元素 1，2，5，6 四个自然数组成，将记作

$$A=\{1,2,5,6\}.$$

有的集合也可以用其元素具有性质 $\boldsymbol{P}$ 来表示。集合 A 的元素具有性质 $\boldsymbol{P}$，将集合 A 表示为

$$A=\{x|\ x\text{ 具有性质}\boldsymbol{P}\}.$$

在 $\{\cdots\cdots\}$ 中，“ | ”之前表示集合 A 是由元素 x 组成，“ | ”之后表示其元素 x 所具有的性质。例如：

$$A_1=\{n\ |n=1,2,3,\cdots\cdots\},$$

$$A_2=\{x\ |x^2-5x+6=0\},$$

$$A_3=\{(x,y)|\ x^2+y^2<1\},$$

分别表示 A_1 是自然数集，A_2 是方程 $x^2-5x+6=0$ 根的集，A_3 是以原点为心的单位圆内所有点组成的集。

凡是含有有限个元素的集合叫做**有限集**，上述集合 A_2 是个有限集。在有限集中，仅含一个元素的集合叫做**单元集**。例如，A 是方程 $2x-6=0$ 根的集就是单元集，即

$$A=\{x\ |2x-6=0\}\text{ 或 }A=\{3\}.$$

非有限集叫做**无限集**，上述集合 A_1 和 A_3 都是无限集。

为了研究问题的需要，把不含任何元素的集合叫做**空集**，记作 ϕ。例如，A 是方程 $x^2+1=0$ 实根的集，A 就是空集，即 $A=\phi$。

3　集合的关系

两个集A与B，若集A的所有元素都属于集B，则称集B包含着集A或A是B的子集，记作$A\subset B$。若$A\subset B$，而B中存在元素b不属于A，则称A是B的**真子集**。例如N是自然数集，Z是整数集，N是Z的真子集。

两个集A，B，如果$A\subset B$，$B\subset A$，则称A与B**相等**，记作$A=B$。

4　集合的运算

属于A或属于B的所有元素所组成的集合称为A和B的**并集**，记作$A\cup B$。

既属于A又属于B的所有元素所组成的集合，称为A和B的**交集**，记作$A\cap B$。

例如，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3, 4, 5, 6\}$，那么$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A\cap B=\{3,4\}$。

5　区间和邻域

在数学分析中我们最常用的数集是区间和邻域。

设a,b为两个实数，且$a<b$。

数集$\{x\mid a<x<b\}$叫做**开区间**，记作(a,b)。在数轴上，它表示介于a,b两点间的所有点，但端点a和b不包括在内。

数集$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$叫做**闭区间**，记作$[a,b]$。在数轴上，它表示介于$a,b$两点间的所有点，且端点$a$和$b$包括在内。

把数集

$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$或$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$。叫做**半开区间**。

除了上述那些有限区间外，还有无限区间

$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x\}.$$

$$(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\}.$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\text{是一切实数}\}.$$

设δ为正数，a为某一个实数，把以点a为心以δ为半径的开区间

$$(a-\delta,\ a+\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

叫做点a的δ邻域，用记号$U(a,\delta)$表示。

§ 1.2 绝对值不等式

在数学分析中，绝对值及其不等式是常用的工具之一。下面将给出绝对值的定义，并讨论其性质：

定义 某一数a的绝对值用记号$|a|$表示，由

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{当}a\geqslant 0\text{时}, \\ -a, & \text{当}a<0\text{时} \end{cases}$$

来定义。即，若$a\geqslant 0$，那么a的绝对值就是它本身a，若$a<0$，那么a的绝对值就是它的相反数$-a$。

在数轴上，数a的绝对值$|a|$表示点a与原点O之间的距离。

根据绝对值的定义，对任一数a，不等式

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a| \tag{1.1}$$

总成立。事实上，如果$a\geqslant 0$，就有$-|a|\leqslant a=|a|$；如果$a<0$，就有$-|a|=a<|a|$。因此，对任一数a，(1.1)式总是成立的。

绝对值具有如下性质：

性质1 $|a|\leqslant b$ $(b>0)$成立的充要条件是$-b\leqslant a\leqslant b$。

证明 **必要性** 已知$|a|\leqslant b$，求证$-b\leqslant a\leqslant b$。将不等式

$$|a|\leqslant b \tag{1.2}$$

$|a|\leq b$

两边乘以-1，得

$$-b\leqslant -|a|.$$

$-b\leq -|a|$

再应用(1.1)和(1.2)式，得

$$-b\leqslant -|a|\leqslant a\leqslant |a|\leqslant b.$$

于是，不等式

$$-b\leqslant a\leqslant b$$

成立。

充分性 已知$-b\leqslant a\leqslant b$，求证$|a|\leqslant b$。

分两种情况证明：

如果 $a\geqslant 0$，则$a=|a|$，从而有$|a|\leqslant b$。

如果$a<0$，则$-a=|a|$．由已知的不等式$-b\leqslant a$，两边乘以-1，得

$$-a\leqslant b.$$

于是，有

$$|a|=-a\leqslant b. \qquad \square$$

同理可证，$|a|<b$ $(b>0)$成立的充要条件是

$$-b<a<b.$$

性质1表明，不等式$|a|\leqslant b$与$-b\leqslant a\leqslant b$是等价的．当$\delta>0$时不等式$|x-x_0|<\delta$与$x_0-\delta<x<x_0+\delta$也是等价的，这是数学分析中经常使用的不等式．

性质2 $|a|\geqslant b$ $(b>0)$成立的充要条件是

$$a\geqslant b \quad 或 \quad a\leqslant -b.$$

证明 必要性 已知$|a|\geqslant b$，求证$a\geqslant b$或$a\leqslant -b$．

如果$a>0$，则$|a|=a$，得$a\geqslant b$．

如果$a<0$，则$|a|=-a$，得$-a\geqslant b$，两边同乘以-1，得$a\leqslant -b$．

充分性 已知$a\geqslant b$或$a\leqslant -b$，求证$|a|\geqslant b$．

如果$a\geqslant b>0$，则$|a|=a$，得$|a|\geqslant b$．

如果$a\leqslant -b<0$，则$|a|=-a$，从而有

$$|a|=-a\geqslant b. \qquad \square$$

性质3 和的绝对值不大于每个数的绝对值的和，即

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|.$$

证明 由（1.1）有

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,$$

$$-|b|\leqslant b\leqslant |b|.$$

将两个不等式相加，得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|.$$

由性质1有

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|. \qquad \square$$

由性质3可直接推得

$$|a-b|=|a+(-b)|\leqslant|a|+|b|.$$

性质 4 差的绝对值不小于两数绝对值的差，即

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

证明 由于$a=(a-b)+b$,根据性质 3，有

$$|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|.$$

移项后得

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$ □

由性质 4 可直接推得

$$|a+b|=|a-(-b)|\geqslant|a|-|-b|=|a|-|b|.$$

性质 5 积的绝对值等于各因数绝对值的积，即

$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|.$$

性质 6 商的绝对值等于被除数及除数的绝对值的商，即

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}(b\neq 0).$$

性质 5 和性质 6 显然成立.

用数学归纳法可以把性质 3 和性质 5 推广到任意有限数的情形：

$$|a+c+d+\cdots+k|\leqslant|a|+|b|+|c|+\cdots+|k|.$$

$$|a\cdot b\cdot c\cdot\cdots\cdot k|=|a|\cdot|b|\cdot|c|\cdots\cdots|k|.$$

例 1 解不等式 $|x-10|<\dfrac{1}{1000}$.

解 由性质 1，有

$$-\frac{1}{1000}<x-10<\frac{1}{1000},$$

$$10-\frac{1}{1000}<x<10+\frac{1}{1000},$$

$$10-0.001<x<10+0.001,$$

$$9.999<x<10.001.$$

例 2 解不等式 $|2x+4|>10$.

解 由性质 2，有

$$2x+4>10 \quad 或 \quad 2x+4<-10.$$

分别解得

$$x>3 \quad 或 \quad x<-7.$$

例 3 解不等式 $\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|>\dfrac{x-2}{x+1}$.

解 当$\dfrac{x-2}{x+1}\geqslant 0$时，原不等式为

$$\frac{x-2}{x+1}>\frac{x-2}{x+1}.$$

因这个不等式对任意x 都不成立，故此时无解。

当$\dfrac{x-2}{x+1}<0$时，原不等式为

$$-\frac{x-2}{x+1}>\frac{x-2}{x+1},$$

即

$$2\ \frac{x-2}{x+1}<0.$$

因此解不等式

$$\frac{x-2}{x+1}<0$$

就可以了.

当$x-2<0$，$x+1>0$时，解得$-1<x<2$;

当$x-2>0$，$x+1<0$时，此时无解．于是，原不等式的解是开区间（-1，2）.

例 4 解不等式 $|x+2|+|x-2|\leqslant 12$.

解 由于不等式里含有$|x+2|$和$|x-2|$的项，当考虑$x+2$与$x-2$的符号时，自然要把实数轴分为三个区间:

$$(-\infty,-2),\ [-2,2],\ (2,\ +\infty).$$

当$x\in(-\infty,-2)$时，原不等式为

$$-(x+2)-(x-2)\leqslant 12.$$

从中解得$x\geqslant -6$，故其解为$(-\infty,\ -2)\cap[-6,+\infty)=[-6,\ -2)$.