JI SUAN FANG FA

计算方法

王英英 林 玎 于铁民 主编

吉林科学技术出版社

计 算 方 法

王英英　林　玎　于铁民　主编

吉林科学技术出版社

计算方法
王英英　林　玎　于铁民　主编
责任编辑:司荣科　郝沛龙　　封面设计:马继东
*
吉林科学技术出版社出版、发行
长春市东文印刷厂印刷
*
787×1092 毫米　16 开本　5 印张　128 000 字
2004 年 7 月第 1 版　2004 年 7 月第 1 次印刷
定价:13.50 元
ISBN 7-5384-2738-4/TU·124

社址　长春市人民大街 4646 号　邮编　130021
发行部电话　0431-5677817　5635177
电子信箱　JLKJCBS@public.cc.jl.cn
传真　0431-5635185　5677817
网址　www.jkcbs.com　　实名　吉林科技出版社

前　　言

作为土建工程师，经常涉及到建筑工程计算问题，而这些计算往往不是人工手算所能胜任的，单凭经验和查表来解决，又适应不了飞速发展的科学技术的需要，所以只能求助于现代化的电子计算机。为此，计算方法的掌握和研究就显得十分必要。

本教材不仅包括了计算方法的基本内容（代数插值、曲线拟合、数值微分与数值积分、方程求根与方程组求解、特征值和特征向量的数值计算和常微分方程的数值解法），而且还注意到它在供暖通风、建筑结构、建筑工程等方面的应用。它可以作为进一步学习这方面内容的入门。

本门课的教学时数可为 36 学时左右。其中有些带“*”号的章节可按专业需要进行取舍。学习本门课只需具有一般的高等数学知识和线性代数的基本知识。

计算方法是实践性较强的一门课，建议在教学过程中加强上机实习，结合专业需要解决实际课题。

由于时间仓促，作者水平有限，教材中一定存在不少问题，诚望读者批评指正。

主编　王英英　林　玎　于铁民
编者　王英英　林　玎　于铁民
　　　魏　萍　裴立秋

目　录

第一章 误 差

在实际问题的数值计算中，理想的准确值(或真值)往往得不到，人们常常用与准确值相近的数值来代替，这样产生误差的大小便是人们所关心的，因此，要对其误差的大小进行必要的估计。

§1 误差的来源

用近似计算解决实际问题时，一般都有误差，其来源主要有下列四种：

一、描述误差

在将实际问题归结为数学问题时，通常总要加上许多限制，总要忽略一些次要因素，这样建立的“理想化”的数学模型，虽然具有“精确”的外表，其实只是客观现象的一种近似而粗糙的描述，而这种数学上的近似必然会产生误差，这种误差称为**描述误差**。

二、观测误差

在数学模型的建立时所用到的数据往往是通过观测得来的，而观测的结果不可能绝对准确，总是近似的，因而就产生了误差，这种误差称为**观测误差**。

三、截断误差

计算机只能进行有限次的四则运算，而许多数学问题(如微分、积分、无穷级数求和等)是通过极限过程来定义的，要上机算题，就必须把这些数学问题转化为有限次的四则运算，这种转化必然产生误差，我们称它为**截断误差**。

例如：求 e^x 时，由表达式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{1.1}$$

取部分和

$$S_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \tag{1.2}$$

作为 e^x 的近似值，就有截断误差

$$e^x - S_3(x) = \frac{e^{\theta x}}{24}x^4 \quad 0 < \theta < 1 \tag{1.3}$$

四、舍入误差

计算机数系是有限集，不仅无理数 e、π 等不属于计算机数系，一些有理数，如$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{33}$等也不

属于计算机数系，常常用计算机数系中和它们比较接近的数来表示它们，由此产生的误差称为舍入误差。

以上说明，在数值计算中会出现各种各样的误差，有时误差会严重“泛滥”，而完全“淹没”了所要的真值。因此，进行任何一项计算，首先必须考虑这些误差，从而保证精度。但前两种误差往往不是计算工作者所能独立完成的。因此，在计算方法课程中所涉及的误差一般指后两种截断误差和舍入误差。

§2 绝对误差和绝对误差限

定义 假设某一量的准确值是 x，其近似值为 x^*，则 x 与 x^* 的差

$$\varepsilon(x) = x - x^* \tag{1.4}$$

叫做近似值 x^* 的绝对误差，简称误差。

$\varepsilon(x)$的大小标志着 x^* 的精确度。一般来说，在同一量的不同近似值中，$\varepsilon(x)$越小，x^* 的精确度越高。

准确值 x 一般是未知的，因而 $\varepsilon(x)$也是未知的，但往往可以估计出误差的“上界”，即可求出一正数 η，使

$$|\varepsilon(x)| \leqslant \eta \tag{1.5}$$

满足上式的 η 称为 x^* 的绝对误差限，由(1.5)式显然有

$$x^* - \eta \leqslant x \leqslant x^* + \eta$$

有时也用 $x = x^* \pm \eta$ 表示近似值 x^* 的精确度或准确值 x 所在范围。

例如 $x = 0.310\,6 \pm 0.001\,4$

指的是准确值 x 在 0.310 6 左右，但不超过 0.001 4 的误差限或准确值 x 的取值范围为

$$0.309\,2 \leqslant x \leqslant 0.312\,0$$

§3 相对误差和相对误差限

上节引入的误差概念，还不能完全反映近似值的好坏程度。例如工人甲平均生产一百块砖有一块次品，而工人乙平均生产五百块砖有一块次品，他们的次品都只是一块，但显然乙的技术水平高于甲。这就启发我们除了要看次品的多少外，还要注意到产品的合格率，甲的次品是 1%，而乙的次品是 0.002%。为了说明准确程度，我们引入相对误差的概念。

定义 近似值的绝对误差与准确值的比值

$$\varepsilon_r(x) = \frac{\varepsilon(x)}{x} = \frac{x - x^*}{x} \qquad (x \neq 0) \tag{1.6}$$

称为 x^* 的相对误差。

相对误差说明了 x^* 的误差与 x 比较起来所占的比例，它可以反映一个近似值的准确程度。

但是和误差一样，我们不能定出 $\varepsilon_r(x)$的准确值，只能估计它的范围。如果

$$|\varepsilon_r(x)| \leqslant \delta \tag{1.7}$$

我们就把 δ 称做 x^* 的相对误差限。

§4 有效数字

对于一个近似值，我们希望知道它的准确程度，为此再引进有效数字的概念。

定义 如果 $|\varepsilon(x)|=|x-x^*|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-n}$，则说 x^* 近似表示 x 准确到小数点后第 n 位，并从这第 n 位起直到 x^* 的第一位非零数字之间的一切数字都称为有效数字，并把有效数字的位数称为有效位数。

例 1 设 $\pi=3.141\,592\,6\cdots\cdots$，那么

$x_1=3$，$e_1=0.151\,5\cdots\leqslant0.5\times10^0$，

x_1 的有效数字为 1 位，或说 x_1 精确到个位；

$x_2=3.14$，$e_2=0.00159\cdots\leqslant0.5\times10^{-2}$，

x_2 的有效数字为 3 位，或说 x_2 精确到 0.01；

$x_3=3.141\,6$，$e_3=0.000\,007\,34\cdots\leqslant0.5\times10^{-4}$，

x_3 的有效数字为 5 位，或说 x_3 精确到 0.000 1；

$x_4=3.141\,5$，$e_4=0.000\,092\,6\cdots\leqslant0.5\times10^{-3}$，

x_4 的有效数字为 4 位，或说 x_4 精确到 0.001。

用四舍五入方法取准确值 x 的前 n 位作为近似值 x^*，则 x^* 有 n 位有效数字。上面例 1 中的 $x_2=3.14$ 是以三位有效数字来表示 π；$x_3=3.141\,6$ 是以 5 位有效数字来表示 π。

第二章　插值法与数值微分

插值法在工程及建筑设计中应用十分广泛。例如，已知一天 24 小时的逐时室外气温、综合温度、冷热负荷等值，需要知道其它任意时刻的值，即可应用插值计算求得；又如，我国工业企业采暖通风和空气调节设计规范中，仅给出了有限个地区相应有限个方位的夏季太阳辐射热总强度值，以及透过窗玻璃的太阳总辐射强度值，至于其它任意方位(0～3590)的中间值，也要用插值法求得。因此，插值法的研究很有必要。

在高等数学中，我们所讨论的函数 $y=f(x)$ 一般都给出解析表达式，但在实际问题中，函数 $y=f(x)$ 往往是通过实验观测得到的一组数据来给出的，即在某个区间 $[a,b]$ 上给出一系列点的函数值

$$y_i=f(x_i),\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{2.1}$$

或者给出一张数据表：

表 2—1

x	$x_0\quad x_1\quad x_2\quad\cdots\quad x_n$
y	$y_0\quad y_1\quad y_2\quad\cdots\quad y_n$

如何通过这些对应关系去找出函数 $f(x)$ 的一个近似表达式呢？可以利用插值。简单地说，插值就是根据给定的数据表，寻找一个解析形式的函数 $p(x)$，近似代替 $f(x)$。

函数 $p(x)$ 的类型可以有各种不同的选择，但最常用的类型是代数多项式，这是因为代数多项式具有一些很好的特性，如它具有各阶导数，计算多项式的值比较方便，等等。

用代数多项式近似代替 $f(x)$ 这一方法，被称为**代数插值法**。

对于代数插值，其数学提法如下：

设已知 $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的函数值分别为 $y_0,y_1,\cdots,y_n$。求一个 n 次多项式 $p_n(x)$①，使之满足如下条件

$$p_n(x_i)=y_i\qquad i=0,1,\cdots,n \tag{2.2}$$

$p_n(x)$ 称为插值多项式；$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 称为插值节点；$[\min(x_0,x_1,\cdots,x_n),\max(x_0,x_1,\cdots,x_n)]$ 称为插值区间。

下面我们从最简单的情形着手，介绍如何构造这种插值多项式 $p_n(x)$，并在一定条件下，讨论插值得到的多项式与被插函数的误差。

§1　线性插值和抛物插值

已知函数 $y=f(x)$ 在节点 x_0,x_1 上的函数值 y_0,y_1，要求一个一次多项多 $p_1(x)$，使之满

① 实际上是次数不超过 n 的多项式

足 $p_1(x_0)=y_0, p_1(x_1)=y_1$。其几何意义就是通过 A、B 两点作一条直线近似代替曲线 $f(x)$，如2—1所示。

由解析几何，我们立即可以得到 $p_1(x)$ 的表达式

$$p_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1 \tag{2.3}$$

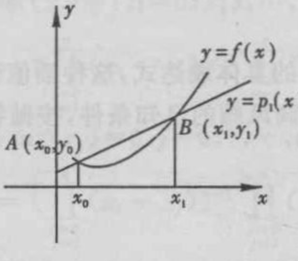

图 2—1

这样的 $p(x)$ 一般是 x 的一次多项式，即一次函数。这种插值称为**线性插值**（或一次插值）。

例 2.1 已知某多叶调节风阀，当叶片数为 $n=3$ 时，叶片与气流方向呈各种角度 α 时，某局部阻力系数 β 值如下表所示：

α	0°	15°	20°	45°	60°	75°
β	0.25	0.7	2.8	6.5	20	60

求当 α 等于 30°时，多叶调节风阀的局部阻力系数 β 的线性插值。

解 取 $x_0=20, y_0=2.8, x_1=45, y_1=6.5$ 并将其代入公式(2.3)有

$$\beta=p_1(30)=\frac{30-45}{20-45}\times 2.8+\frac{30-20}{45-20}\times 6.5 \doteq 4.28$$

线性插值仅仅利用两个节点上的信息，即直线代替曲线。精度自然很低，为了改善精度，我们来考察下述三点插值问题。给定函数 $y=f(x)$ 在节点 x_0, x_1, x_2 上的函数值 y_0, y_1, y_2，求一个二次多项式 $p_2(x)$，使之满足 $p_1(x_i)=y_i (i=0,1,2)$，其几何意义是通过三点 $A(x_0,y_0)$，$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$ 作一条曲线来近似代替曲线 $y=f(x)$。若 A、B、C 不在一条直线上，则做出的曲线就是抛物线。一般来说，这样的 $p_2(x)$ 是 x 的二次函数，其形式为

$$p_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \tag{2.4}$$

其中 a_0, a_1, a_2 为待定常数，若将 A、B、C 三点分别代入(2.4)会得到一个有唯一解的三元一次方程，从而 a_0, a_1, a_2 即可确定，但求起来较麻烦，现在我们用较简单的办法求 $p_2(x)$，因为点 $A(x_0,y_0)$，$B(x_1,y_1)$ 满足方程 $y=p_1(x)$，故可设

$$p_2(x)=p_1(x)+a(x-x_0)(x-x_1)$$

即

$$p_2(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1+a(x-x_0)(x-x_1) \tag{2.5}$$

a 为待定常数。

由(2.5)式不难看出 $p_2(x_0)=y_0, p_2(x_1)=y_1$。若再用条件 $p_2(x_2)=y_2$，就可求出常数 a，从而求得 $p_2(x)$ 的表达式为：

$$p_2(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} + \frac{\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0} - \frac{y_1-y_0}{x_2-x_0}}{x_2-x_1}(x-x_0)(x-x_1)$$

稍加整理可得

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 \tag{2.6}$$

这就是抛物插值多项式 $p_2(x)$ 的具体表达式，这种插值称为**抛物插值(或二次插值)**。

例 2.2 如上例中所示的多叶调风阀的已知条件，按抛物插值进行插值计算

解 取 $x_0=15,\quad y_0=0.7;$

$x_1=20,\quad y_1=2.8;$

$x_2=45,\quad y_2=6.5.$

并将其代入公式(2.6)，有

$$\beta = p_2(30) = \frac{(30-20)(30-45)}{(15-20)(15-45)}\times 0.7 + \frac{(30-15)(30-45)}{(20-15)(20-45)}\times 2.8 + \frac{(30-15)(30-20)}{(45-15)(45-20)}\times 6.5 \doteq 5.64$$

由多叶调风阀这个实际例子可知，抛物插值比线性插值的结果要理想。

例 2.3 分别计算下列问题：

1)利用 100 和 121 求 115 的平方根；

2)利用 100,121 和 144 求 115 的平方根。

解 用线性插值求解问题 1)，取 $x_0=100, y_0=10; x_1=121, y_1=11$ 可求得

$$\sqrt{115} \approx \frac{115-121}{100-121}\times 10 + \frac{115-100}{121-100}\times 11 = 10.714\ 28$$

与所求平方根的实际值 10.723 8 比较，得到了具有三位有效数字的结果 10.714 28。

用抛物插值求解问题 2)，取 $x_0=100, y_0=10; x_1=121, y_1=11; x_2=144, y_2=12$ 求得

$$\sqrt{115} \approx \frac{174}{924}\times 10 + \frac{435}{483}\times 11 = \frac{90}{1012}\times 12 = 10.722\ 755\ 51$$

与平方根实际值 10.723 8 比较，10.722 755 51 具有四位有效数字，显然比线性插值的结果好。一般地说，抛物插值比线性插值近似程度要好些。

§2 拉格朗日(Lagrange)插值公式

这节就具有一般形式的代数插值问题(即已知函数 $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个点上的函数值 $y_i=f(x_i), i=0,1,\cdots,n$，求一个 n 次多项式 $p_n(x)$，并满足条件 $p_n(x_i)=y_i, i=0,1,\cdots,n$)来讨论如何构造其插值多项式 $p_n(x)$。

为了构造满足 $p_n(x_i)=y_i, i=0,1,\cdots,n$ 要求的多项式，我们先来解决一个简单问题：求一个 n 次多项式 $w_0(x)$，使之满足条件 $w_0(x_0)=1, w_0(x_i)=0, i=1,2,\cdots,n$，从而可设

$$w_0(x) = a_0\prod_{i=1}^{n}(x-x_i), \qquad a_0 \text{ 为待定常数}$$

再由 $w_0(x_0)=1$，可求得

$$a_0 = [\prod_{i=1}^{n}(x_0 - x_i)]^{-1}$$

于是求得

$$w_0(x) = [\prod_{i=1}^{n}(x_0 - x_i)]^{-1}\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

同理可作出满足条件 $w_1(x_1)=0, w_1(x_i)=1, i=0,2,3,\cdots,n$ 的 n 次多项式为

$$w_1(x) = [\prod_{\substack{i=0\\i\neq1}}^{n}(x_1 - x_i)]^{-1}\prod_{\substack{i=0\\i\neq1}}^{n}(x - x_i)$$

一般地可作出满足条件 $w_i(x_i)=1, w_i(x_j)=0, j=0,1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n$ 的 n 次多项式为

$$w_i(x) = [\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)]^{-1}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x - x_j)$$

取 $i=0,1,\cdots,n$ 便得到 $n+1$ 个多项式，$w_0(x), w_1(x), \cdots, w_n(x)$。以这些多项式为基础，容易看出要构造满足条件 $p_n(x_i)=y_i, i=0,1,\cdots,n$ 的多项式，只需取

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n}(\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{x - x_j}{x_i - x_j})y_i \tag{2.7}$$

这就是所要求的插值多项式，称为**拉格朗日(Lagrange)插值多项式**。当 $n=1$ 时，就得出线性插值多项式(2.3)，$n=2$ 就得出抛物插值多项式(2.6)。

下面给出拉格朗日插值法的简单框图(图 2—2)，为大家上机实习提供方便。

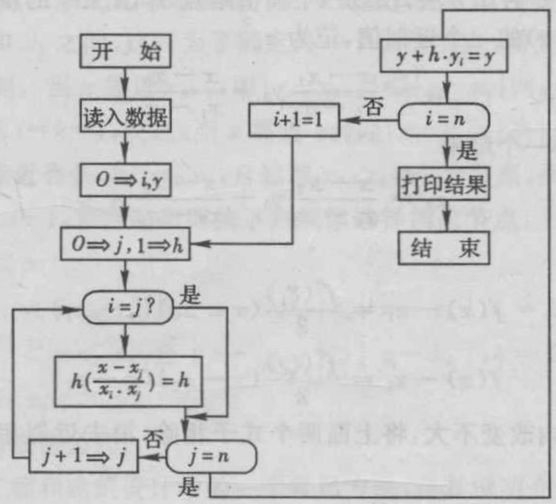

图 2—2

这里我们使用了两种形式的框，一种是矩形框 ，称为**叙述框**，计算公式就填在这种框内。另一种是圆边框 ，称**判断框**，判断框有两个出口，究竟选择哪个出口，要看框内的判断条件是否成立来决定。如图 2—2 第一个判断框 $i=j?$ 有两个出口；若 $i=j$ 则走“是”这个出口，若 $i\neq j$ 则走“否”这个出口。

今后所有框图都以 $\boxed{开始}$ 框标志计算过程开始启动，而用 $\boxed{结束}$ 框表示计算过程的最终结束。另外，我们将箭头“→”指明各框执行的顺序。

有了比较详细的框图，编制程序就很方便，今后介绍方法时，我们尽量提供这种“细框”。

§3 插值多项式的误差

我们讨论插值多项式 $p_n(x)$ 与函数 $f(x)$ 之间的误差，令

$$R_n(x)=f(x)-p_n(x)$$

称这为插值公式(2.7)的余项。

下面我们看到，若进一步提供关于导数 $f^{n+1}(x)$ 的信息，即可对余项 $R_n(x)$ 做出估计。

定理 2.1 对于给定的插值点 x，有

$$R_n(x)=\frac{f^{n+1}(\zeta)}{(n+1)!}w(x) \tag{2.8}$$

其中 $w(x)=\prod\limits_{k=0}^{n}(x-x_k)$，$\zeta$ 是与 x 有关的点，它位于 $\min(x_0,x_1,\cdots,{}_n,x)$ 与。$\max(x_0,x_1,\cdots,x_n,x)$ 之间（证明略）。

根据余项公式(2.8)，若能估计出 $|f^{n+1}(x)|$ 的上界 m_{n+1}，那么将有

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{m_{n+1}}{(n+1)!}|w(x)|$$

问题在于若只是给出 $y=f(x)$ 的一张数据表，并未给出具体的解析式子，那么提供 $|f^{n+1}(x)|$ 的上界 m_{n+1} 这项要求显然是不切实际，但此结论在理论研究上有它的一定价值。

下面介绍另一种误差估计方法，仅以三个插值结点 x_0,x_1,x_2 的情形为例。我们先用 x_0，x_1 作线性插值，求出 $f(x)$ 的一个近似值，记为 z_1。

$$z_1=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

然后取 x_0 和 x_2，再求得一个结果

$$z_2=\frac{x-x_2}{x_0-x_2}y_0+\frac{x-x_0}{x_2-x_0}y_2$$

利用余项公式(2.8)知

$$f(x)-z_1=\frac{f''(\zeta_1)}{2}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$f(x)-z_2=\frac{f''(\zeta_2)}{2}(x-x_0)(x-x_2)$$

假定 $f''(x)$ 在插值区间内改变不大，将上面两个式子相除，消去近似相等的 $f''(\zeta_1)$ 与 $f''(\zeta_2)$，结果有

$$\frac{f(x)-z_1}{f(x)-z_2}\doteq\frac{x-x_1}{x-x_2}$$

稍加整理得

$$f(x)-z_1\doteq\frac{x-x_1}{x_1-x_2}(z_1-z_2)$$

§4 分段插值法

适当提高插值多项式的次数，可以提高计算的精确度，但次数太高又会产生不好的效果，

因为次数越高，计算越繁，积累误差就越大；曲线就会出现过多的扭摆，当局部插值点有微小变动时，就可能引起曲线大幅度的变化，使计算很不稳定。因此，插值多项式次数越高，其所求得的插值越显得不可靠，从而也大大降低了它的工程应用价值，这也就是很少采用拉格朗日插值公式的原因。因此，在工程应用中，多采用分段插值法，即将插值区间分为若干个小段，在每一个小段上使用低阶插值——如线性插值或抛物插值。

设已给出一系列离散节点

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

应用低阶插值的关键是恰当地挑选插值节点，余项公式(2.8)说明，选取的节点 x_k 离插值点 x 越近，误差 $|R_n|$ 就越小，因而插值效果也就越好。因此，应当尽量在插值点的邻近选取插值节点。

下面，我们就以三个节点为例，介绍一下分段抛物插值，取点 x_{i-1}，x_i 和 x_{i+1} 进行插值，公式为：

$$\begin{aligned} y = & \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}y_{i-1} \\ & + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}y_i \\ & + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}y_{i+1} \end{aligned} \tag{2.10}$$

那么 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} 这三点究竟该如何取？也就是在 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中应取那三个，若插值点 x 位于节点 x_{k-1} 和 x_k 之间，这时为了确定另一个插值节点，需要进一步判断 x 究竟偏向区间(x_{k-1}, x_k)的那一侧。当 x 靠近 x_{k-1}，即 $|x-x_{k-1}| \leqslant |x-x_k|$ 时，我们补选 x_{k-2} 为节点，而令公式(2.10)中的下标 $i=k-1$；反之，当 x 靠近 x_k，即 $|x-x_{k-1}| > |x-x_k|$ 时，则被选 x_{k+1} 为节点，而令 $i=k$；若 x 靠近表头，即 $x \leqslant x_1$，自然取 x_0, x_1, x_2 为节点，而令 $i=1$，若 x 靠近表尾，即 $x > x_{n-1}$ 时，则取 $i=n-1$，总结起来即按下列规律选择插值节点：

$$i = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \leqslant x_1 \\ k-1 & \text{当 } x_{k-1} < x \leqslant x_k\text{，且 } |x-x_{k-1}| \leqslant |x-x_k|, k=2,3,\cdots,n-1 \\ k & \text{当 } x_{k-1} < x \leqslant x_k\text{，且 } |x-x_{k-1}| > |x-x_k|, k=2,3,\cdots,n-1 \\ n-1 & \text{当 } x > x_{n-1} \end{cases} \tag{2.11}$$

式(2.11)称为**分段抛物插值公式**。

分段抛物插值是工程和建筑设计中的一个常用方法，将其框图介绍如下：

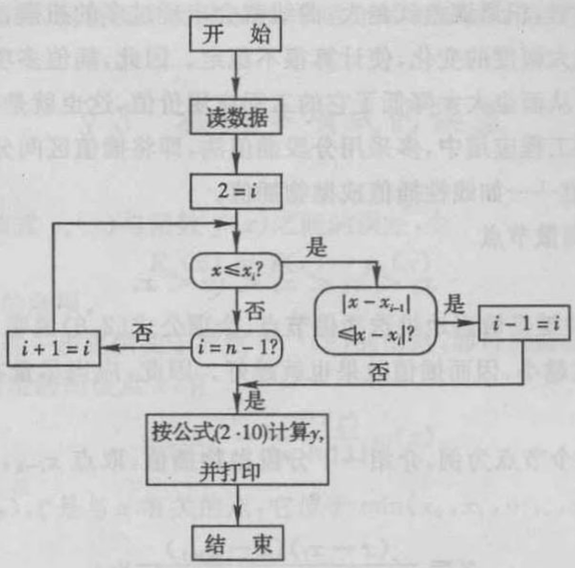

图 2—3

§5 三次样条插值

我们已经看到，当插值节点的个数较多时，用拉格朗日公式得出的插值多项多的次数就很高，对于高次多项式，它虽然可以保证曲线光滑，但将出现计算繁重，计算误差积累大，计算稳定性差等缺点，采用分段低次插值，可以避免这些缺点，但在各段连接点处只能保证曲线连续，而不能保证光滑性要求，这就往往不满足某些工程技术的高精度要求。例如，在房屋、桥梁等设计中要绘制某些外型的理论模线，不仅要求曲线连续，而且要求曲线的曲率也连接，这就要求分段插值函数具有连续的二阶导数，下面介绍的三次样条插值就能满足上述要求。

样条这一名词来源于工程中的样条曲线，绘图员为了将一些指定点（称作样点）连接成一条光滑曲线，往往用细长的木条（称作绘图员的样条）把相近的几点连接在一起，再逐步延伸连接起全部指定点，使形成一条光滑的样条曲线，它在连接点处具有连续曲率。我们对绘图员的样条曲线进行数学模拟，得出的函数叫做样条函数，它在连接处具有一阶和二阶连续微商，下面用数学语言来描述并建立其计算公式。

设给定 $n+1$ 个点：

$$(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n) \tag{2.12}$$

其中 $x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n$，要构造一个函数 $s(x)$，使其满足下列条件：

1) $s(x_i)=y_i, \qquad i=0,1,\cdots,n$

2) $s'(x_i-0)=s'(x_i+0)$,

$s''(x_i-0)=s''(x_i+0), \qquad i=1,2,\cdots,n-1$

3) 在每个小区间〔x_i-1,x_i〕上，$s(x)$ 是 x 的三次多项式，这样的函数 $s(x)$ 就称为三次样条函数。

简单地说，三次样条函数就是通过 $n+1$ 个点，二阶连续可微的分段三次多项式函数。