物 理 类

高 等 数 学

中　　册

张 国 玳

南京航空学院数学教研室

1985.9.

目　录

第六章　定积分

许多实际问题，例如，如何计算平面封闭曲线所围成的图形的面积？如何计算变力所作的功？已知密度如何求物体的质量？已知速度如何计算路程？总之如何度量连续变量作用的总效果？这就是积分学的基本课题。

本章将从上述实际问题出发抽象出定积分的概念，然后研究定积分的性质、计算方法和应用。

定积分问题称为积分学的第二个基本问题，称不定积分问题为积分学的第一个基本问题。这两个从表面上看似乎没有什么联系的问题历史上一开始时是彼此独立的发展着的，直到十七世纪牛顿、莱布尼兹发现了微积分学基本定理，阐明了微分学与积分学之间的深奥联系之后，才使这两个问题彼此紧密相连，这个联系给极广泛的一类函数提供了计算定积分的普遍方法，从而使积分学发展成为介决实际问题的有力工具。

第一节　定积分的概念

§1.1　问题的提出．

在实践中经常遇到各种求和问题，积分问题也是一种求和问题，不过它与普通加法不同，要经过极限过程，因而是一种特殊的求和问题。为了说明这一点，请看下面的例题。

例1．曲边梯形的面积。

设$f(x)$是区间〔a，b〕上的非负连续函数，求由$x=a$，$x=b$，$y=0$及$y=f(x)$所围成的曲边梯形的面积A（图6－1）。

介：在第二章中，我们利用极限方法求出了由$y=x^2$，$y=0$，$x=1$所围成的曲边三角形的面积，类似的方法可以用到曲边梯形上来。我们把这个方法归为下列四步：

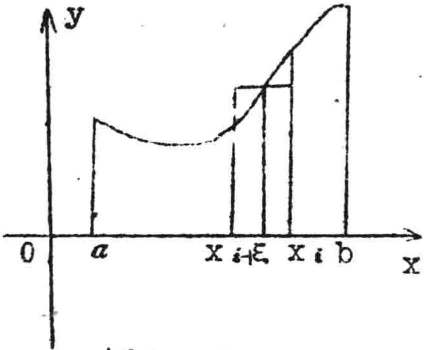

图6－1

1. 分割，在〔a.b〕内任意插入$n-1$个分点

$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

则将〔a.b〕分割成n小段。每小段的长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$（$i=1.2.\cdots n$）。过每一分点作X轴垂线$x=x_i$把原曲边梯形分成n个小曲边梯形它们的面积分别记为ΔA_1.ΔA_2 $\cdots\Delta A_n$

则 $A=\sum_1^n\Delta A_i$

2. 局部近似代替。尽管小曲边梯形的顶部是曲线段。但因为Δx_i很小。连续函数f(x)的函数值变化不大。故可视为不变也就是说可用直线段去代替曲线段。因而可用小矩形的面积去近似小曲边梯形的面积。即 $\forall\xi_i\in[x_{i-1}.\ x_i]$有

$$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$$

直观可见。Δx_i越小近似程度越好。

3. 求和得A近似值

$$A=\sum_1^n\Delta A_i\approx\sum_1^n f(\xi_i)\Delta x_i\stackrel{\Delta}{=}\sigma_n$$

4. 取极限得A精确值。直观可见分点越多且每段长越短上式的近似程度就越好。若记$\lambda=\max\{\Delta x_1.\Delta x_2\cdots\Delta x_n\}$。则当分法无限变细即$\lambda\to0$时$\sigma_n$将由A的近似值转化为A的精确值。即

$$A=\lim_{\lambda\to0}\sum_1^n f(\xi_i)\Delta x_i\quad\cdots\cdots\quad(1)$$

综上。求曲边梯形面积归为求上述特定结构的和式极限。只要这

个极限存在．就说曲边梯形有面积．而上述极限值就定义为曲面梯形的面积。这里我们要指出．当我们提出问题时．我们只有面积的直观概念．而没有确切的定义．由于上面讨论的结果．我们才获得了面积概念的确切定义．这就是极限(1)．由此也获得了计算面积的方法。

例2．变速直线运动的路程

设质点以速度$V(t)$作直线运动．求从时刻a到时刻b质点所走过的路程S。

解：如果质点以常速V作直线运动．则在时间间隔$[a.b]$内质点所走的路程为$S=V(b-a)$．现质点以变速作直线运动如何求路程呢？我们又遇到了变与不变的矛盾．仿照例1我们仍立足于：

“在小范围内．速度变化不大”

这一事实．用类似于例1的方法来介决。

1．分割　　在$[a.b]$内任意插入$n-1$个分点

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$$

将$[a.b]$分成n段．设在时间间隔$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$内质点所走过的路程为ΔS_i（$i=1.2.\cdots.n$）则$S=\sum_1^n \Delta S_i$

2．局部近似代替．当$\Delta t_i\ll 1$时连续函数$V(t)$的函数值变化不大故运动可近似地看作是以$V(\xi_i)$为速度的等速运动．其中ξ_i是$[t_{i-1}, t_i]$中任一点．因而有近似公式

$$\Delta S_i\approx V(\xi_i)\Delta t_i$$

直观可见，Δt_i越小近似程度越好。

3．求和得S近似值

$$S=\sum_1^n \Delta S_i\approx\sum_1^n V(\xi_i)\Delta t_i\xlongequal{\Delta}\sigma_n$$

4．取极限得S精确值．直观可见．分点越多且每段长越短上式

近似程度就越好若记$\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots \Delta t_n\}$则当分法无限变细即$\lambda \to 0$时$\sigma_n$将由S的近似值转化为S的精确值。即

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_1^n V(\xi_i)\Delta t_i$$

综上，求变速直线运动的路程问题就归为求上述特定结构的和式极限。

上两例，一个是力学问题，一个是几何学问题，它们分属人类知识的不同邻域，但介决它们的方法却完全一样，都归为计算数学结构完全一样的极限，还可举出大量的实际问题如变力作功，引力、压力，物体的体积，质量，重心等等，都归为求上述特定结构的和式极限，这就足以说明这种极限的重要，因此数学上有必要把它从实际问题中抽象出来给予专门名称，并对其计算方法作一般性的研究，这就是本章的主要内容。

§1.2　定积分的定义

定义　设$f(x)$在$[a, b]$上有定义，任给分法

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将$[a, b]$分成n个小区间记$\Delta x = x_i - x_{i-1}$，$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$，任取$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，作和

$$\sigma_n = \sum_1^n f(\xi_i)\Delta x_i \qquad \text{（黎曼和）}$$

若$\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_1^n f(\xi_i)\Delta x_i$存在且此值既与$[a, b]$的分法无关也与$\xi_i$的选法无关则说$f(x)$在$[a, b]$上可积，而称此极限值为$f(x)$在$[a, b]$上的定积分记为$\int_a^b f(x)dx$　即

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_1^n f(\xi_i)\Delta x_i \qquad \cdots \qquad (2)$$

其中a称为积分下限，b称为积分上限，积分号$\int$是拉丁字Summa(和)

(…) 的头一个字母S的变体．它象征积分和σ_n中的Σ，$f(x)dx$象征σ_n中的项$f(\xi_i)\Delta x_i$．如果上式右端极限不存在则说$f(x)$于$[a,b]$上不可积。

这个定义是一个结构性的定义．其中分割．近似．积累．取极限四步介决了变与不变（曲与直）．近似与精确．局部和整体对立统一的关系．定义是十九世纪德国数学家黎曼所给．以区别其它种类的积分．上述积分称为黎曼积分。

定积分定义可用$\varepsilon-\delta$语言叙述如下

定义　设$f(x)$在$[a,b]$上有定义．若存在常数I．对$\forall\ \varepsilon>0$ $\exists\ \delta>0$不论怎样分割$[a,b]$．也不论在$[x_{i-1},x_i]$上如何选取ξ_i $(i=1,2,\cdots n)$．只要$\lambda<\delta$便有$\left|\sum\limits_{1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon$

则说$f(x)$在$[a,b]$上可积且说I是$f(x)$在$[a,b]$上的定积分。

注：1．定积分$\int_a^b f(x)dx$表示一个数．其值由$f(x)$及$[a,b]$完全确定而与积分变元的记号无关即有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$$

2．由定义显见．定积分$\int_a^b f(x)dx$要求$a<b$．而当$b\leq a$时记号$\int_a^b f(x)dx$含意不明．为计算须要．定积分定义扩充如下：

规定　$\int_b^a f(x)dx=0$

$$若\ b<a\ 则\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

3．定积分的物理意义　随着函数的不同实际背景．定积分有不同的物理意义。

质点作变速直线运动则$\int_a^b V(t)dt$表示质点由时刻a到时刻b所走过的路程。

细棒线密度为$\rho(x)$则$\int_a^b \rho(x)dx$表示长度为$b-a$的细棒的质量。

质点在变力$F(x)$作用下沿x轴由a运动到b则$\int_a^b F(x)dx$表示变力所作的功。

这里不一一列举了。

4．定积分的几何意义

若$x\in[a,b]$，$f(x)\geq 0$则$\int_a^b f(x)dx$表示图6－1所示曲边梯形的面积。

若$x\in[a,b]$，$f(x)\leq 0$则由图6－2可见$-f(x)$表示高

$\therefore -\int_a^b f(x)dx$表示图6－2所示曲边梯形的面积。

即 $\int_a^b f(x)dx=-A$

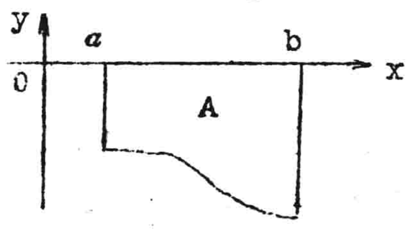

图6－2

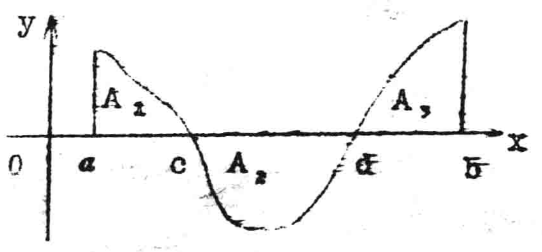

图6－3

若$x\in[a,b]$，$f(x)$变号，（图6－3）则由图可见

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx$$

$$=A_1-A_2+A_3$$

$\Longrightarrow$定积分$\int_a^b f(x)dx$的几何意义是由$y=f(x)$，$y=0$，$x=a$，$x=b$所围成平面图形面积的代数和。

§1.3．重要的可积函数类

我们知道，黎曼和$\sigma_n=\sum_1^n f(\xi_i)\Delta x_i$的值，不仅依赖于区间的分割，同时还依赖于$\xi_i$的选择，因此一般说来它不是$\lambda$的函数，因此极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_n$是一种新型的极限，现在的问题f(x)满足什么条件$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_n$存在？也就是说，什么样的函数一定可积？

根据定义，我们可得到结论：只有〔a，b〕上的有界函数才有可能是可积的，事实上，若f(x)在〔a，b〕上无界，则对任一组分割，f(x)至少会在某一小段不仿设为〔x_{k-1}，x_k〕上无界，因此，总可适当选取$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$使$|f(\xi_k)\Delta x_k|$任意大进而σ_n的绝对值任意大。$\therefore\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_n$不存在，因此我们说可积函数一定有界。

有界这个条件并不是充分的，即有界函数未必可积，

例3．狄里赫来函数$D(x)=\begin{cases}1 & x\text{是有理数}\\ 0 & x\text{是无理数}\end{cases}$

它在〔0，1〕上是有界的。

任意分割〔0，1〕则每个小段上既有有理点，又有无理点

若ξ_i（$i=1,2,\cdots n$）均取有理点则$\sigma_n=\sum_1^n D(\xi_i)\Delta x_i$

$$=\sum_1^n\Delta x_i=1$$

若ξ_i（$i=1,2,\cdots n$）均取无理点则$\sigma_n=\sum_1^n D(\xi_i)\Delta x_i$

$$=\sum_1^n 0\cdot\Delta x_i=0$$

即附ξ_i取法不同$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_n$将有不同的极限，$\therefore\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_n$不存在。

$\therefore D(x)$ 在〔0，1〕上不可积。

那么什么样的有界函数才是可积的呢？可以证明．至少下列三个个结论是正确的。

1．闭区间〔a，b〕上的连续函数在〔a，b〕上一定可积。

2．若 $f(x)$ 在〔a，b〕 有界且只有有限个间断点则 $f(x)$ 在〔a，b〕上可积。

3．闭区间〔a，b〕上的单调函数在〔a，b〕上一定可积。

这些结论的证明从略。但结论本身务必牢记．尽管上述结论只给出了可积的充分条件．但由于我们常碰到的函数大多数都能满足上述条件．因而是可积的．在微分问题中我们讨论的对象只是连续函数．但在积分问题中上述结论告知我们讨论的函数可以不是连续函数．即在范围上有所推广。

定积分定义本身给出了计算定积分的方法。

例4．利用定义计算 $\int_0^2 x^2 dx$

解：由定义知．可积情况下和式极限与区间分割方法无关与 ε_i 取法无关．因此．为计算的方便．可对〔a，b〕采取特殊的分法．对 ε_i 采取特殊的取法将 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_n$ 计算出来．就得到了定积分的值。

$\because y=x^2$ 是〔0，2〕上的连续函数 $\therefore$ 可积。

将〔0．2〕n 等分则 $x_k=\frac{2}{n}k$ ，$\Delta x_k=\frac{2}{n}$ 取 $\varepsilon_k=x_k$ 则

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k^2\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{n}k\right)^2\frac{2}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{8k^2}{n^3}$$

$$=\frac{8}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)=\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{8}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore\quad \lim_{\lambda\to 0}\sigma_n=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{8}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{8}{3}$$

$$\therefore\quad \int_0^2 x^2\,dx=\frac{8}{3}$$

第二节　微积分学基本定理

上节例4可见由定积分的定义去计算定积分是很困难的为此我们要寻求计算定积分的简便方法，先看一个力学上的例子。

质点以速度 $V(t)$ 作直线运动则在 $[t_1,t_2]$ 时间段内它所走过的路程S是

$$S=\int_{t_1}^{t_2}V(t)\,dt$$

如果我们还假定质点的运动规律是已知的： $S=s(t)$，则在 $[t_1,t_2]$ 时间段内它所走过的路程应为 $S=S(t_2)-s(t_1)$ 那么由物理的观点来看应当有

$$\int_{t_2}^{t_1}V(t)\,dt=S(t_2)-S(t_1)$$

这个等式表明了质点运动规律与速度之间的关系，从数学上来看上述等式表明要计算 $\int_{t_1}^{t_2}V(t)\,dt$ 只要找出 $V(t)$ 的原函数 $s(t)$ 就行了。那么对于一般的定积分是否也可仿上法进行计算呢？我们有下列定理。

微积分学基本定理　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $F'(x)=f(x)\quad x\in(a,b)$

则 $$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

证明：对〔a.b〕的任一分法 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

由拉格朗日中值定理有

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}(F(x_i)-F(x_{i-1}))$$

$$=\sum_{1}^{n}F'(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$$

故当 $\lambda\to0$ 时有

$$F(b)-F(a)=\lim_{\lambda\to0}\sum_{1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

由于在可积情况下积分值与区间的分割方法无关与 ξ_i 的取法无关。故由 f(x) 在〔a.b〕上是可积的知，对于上述特殊取法亦应有

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$$

$$\therefore\ \int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

这就是牛顿——莱布尼兹公式。它常写为

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

这个定理的重要意义是：它把定积分与不定积分联系起来了，从而深刻地揭示了积分与微分之间的内在联系。这种联系给相当广泛一类函数提供了求定积分的普遍计算方法——把定积分的计算问题归为求原函数的问题，大大简化了计算的手续。

例1．1）$\int_{-1}^{2}x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}=\frac{8}{3}-\frac{-1}{3}=3$

2）$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}=0 \quad (m\neq n)$$

3) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x+1)^2+1}$

$$=arctg(x+1)\Big|_{-1}^{1}=arctg2$$

在应用牛顿——莱布尼兹公式时．务必注意定理的条件．否则会导致错误的结果。

例2．1) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$

$\frac{1}{x}$ 在［－1，1］上无界 ∴ $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ 不存在。但若不注意定理中要求 f(x) 在［a．b］上可积这一条件而用上述公式将会导致错误。

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_{-1}^{1}=0$

2) $\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

$$\because \int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{2+(x-\frac{1}{x})^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{1}{x})\overset{\Delta}{=}F(x)$$

∴利用公式有 $\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=F(x)\Big|_{-1}^{1}=0$

而实际上 ∵ $-1\leq x\leq 1$ ∴ $1+x^2\geq 1+x^4$ ∴ $\frac{1+x^2}{1+x^4}\geq 1$

利用定理可知

应该有 $\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx \geq \int_{-1}^{1}dx=2$，致所以出现上面的错误。原因是忽略了定理中要求F(x)在〔a.b〕上连续这一条件。

例3．利用定积分求下列和数的极限

1) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{n+m}\right)$

解：$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+m}=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$

若将长为1的区间〔0.1〕n等分，则$\Delta x_k=\frac{1}{n}$，取$\xi_k=x_k=\frac{k}{n}$

则上式右端是函数$f(x)=\frac{1}{1+x}$在〔0,1〕上的黎曼和，因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+m}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_{0}^{1}=\ln 2$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+2n}\right)$

解：$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+2n}$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{2n}{n}}\right)=\sum_{1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{2}{2n}$$

若将长度为2的区间〔1,3〕2n等分则$\Delta x_k=\frac{2}{2n}=\frac{1}{n}$取

$\xi_k=x_k=1+\frac{k}{n}$

则上式右端是函数$f(x)=\frac{1}{x}$在〔1.3〕上的黎曼和，因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2n}\sum_{1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_1^3\frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_1^3=\ln 3$$

第三节　定积分的性质

定积分$\int_a^b f(x)dx$表示一个数，其值由被积函数$f(x)$及积分区间$[a.b]$完全确定，因此定积分的性质既与被积函数有关，又与积分区间有关，现将其最基本的性质列举于下：

1．对区域的可加性

设$f(x)$从a到b，从a到c，从c到b都可积则不论a.b.c三点位置如何恒有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

证明：不妨先设$a<c<b$

$\because f(x)$在$[a,b]$．$[a,c]$．$[c,b]$上可积$\therefore$对c为分点的特殊分法有

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{[a,c]}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{[c,b]}f(\xi_i)\Delta x_i\right)$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{[a,c]}f(\xi_i)\Delta x_i+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{[c,b]}f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

若$a<b<c$由上有$\int_a^c f(x)=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$

$$\therefore\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx=$$

$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

其它情况类似可证。

这个公式可以推广。例如 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且 $a<c_1<c_2<\cdots<c_k<b$ 则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{c_1} f(x)dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx+\cdots+\int_{c_k}^b f(x)dx$$

2．线性运算性质

设 $f(x)$．$g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积　k为任意常数则

(1) $kf(x)$ 在 $[a.b]$ 上也可积且 $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

特别 $\int_a^b kdx=k\int_a^b dx=k(b-a)$，$\int_a^b 1dx=b-a$

(2) $f(x)\pm g(x)$ 在 $[a.b]$ 上也可积且

$$\int_a^b f(x)\pm g(x)dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

证明：仅证(1)

$$\int_a^b kf(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=k\int_a^b f(x)dx$$

3．不等式性质

(1)设 $f(x)$．$\phi(x)$ 在 $[a.b]$ 上可积且在 $[a.b]$ 上 $f(x)\geq\phi(x)$ 则

$$\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b \phi(x)dx$$

证明：任意分割 $[a.b]$：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$