信毅教材大系

高等数学（下册）

• 余达锦 编著

Advanced Mathematics

复旦大学出版社

信毅教材大系

高等数学（下册）

● 余达锦 编著

Advanced Mathematics

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/余达锦编著. —上海:复旦大学出版社,2014.8
(信毅教材大系)
ISBN 978-7-309-10920-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. 余… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 182673 号

高等数学(下册)
余达锦 编著
责任编辑/梁 玲

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
上海春秋印刷厂

开本 787×1092 1/16 印张 20.75 字数 505 千
2014 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-10920-7/O·549
定价: 42.00 元

内容提要

本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，为适应高校高等数学教育改革，充分吸收现有国内外优秀教材的精华，结合编者多年教学实践经验编写而成的。

通过本课程的学习，使学生掌握微积分学、空间解析几何与向量代数、微分方程及无穷级数的有关基本理论和方法，培养学生具有一定的抽象思维、逻辑推理、空间想象能力和自主学习能力，具有比较熟练的分析能力和运算能力，并能用数学方法解决实际问题，为后续课程奠定必要的数学基础。

本书分为上、下两册。下册主要介绍微分方程与差分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数等6章内容。部分带“*”的内容可根据不同层次教学需要选择教学。书末附有部分练习与复习题的答案或提示，供读者参考。

总序

世界高等教育的起源可以追溯到1088年意大利建立的博洛尼亚大学，它运用社会化组织成批量培养社会所需要的人才，改变了知识、技能主要在师徒间、个体间传授的教育方式，满足了大家获取知识的需要，史称“博洛尼亚传统”。

19世纪初期，德国的教育家洪堡提出“教学与研究相统一”和“学术自由”的原则，并指出大学的主要职能是追求真理，学术研究在大学应当具有第一位的重要性，即“洪堡理念”，强调大学对学术研究人才的培养。

在洪堡理念广为传播和接受之际，德国都柏林天主教大学校长纽曼发表了“大学的理想”的著名演说，旗帜鲜明地指出“从本质上讲，大学是教育的场所”，“我们不能借口履行大学的使命职责，而把它引向不属于它本身的目标。”强调培养人才是大学的唯一职能。纽曼关于“大学的理想”的演说让人们重新审视和思考大学为何而设、为谁而设的问题。

19世纪后期到20世纪初，美国威斯康辛大学查尔斯·范海斯校长提出“大学必须为社会发展服务”的办学理念，更加关注大学与社会需求的结合，从而使大学走出了象牙塔。

2011年4月24日，胡锦涛总书记在清华大学百年校庆庆典上，指出高等教育是优秀文化传承的重要载体和思想文化创新的重要源泉，强调要充分发挥大学文化育人和文化传承创新的职能。

总而言之，随着社会的进步与变革，高等教育不断发展，大学的功能不断扩展，但始终都在围绕着人才培养这一大学的根本使命，致力于不断提高人才培养的质量和水平。

对大学而言，优秀人才的培养，离不开一些必要的物质条件保障，但更重要的是高效的执行体系。高效的执行体系应该体现

在三个方面：一是科学合理的学科专业结构，二是能洞悉学科前沿的优秀的师资队伍，三是作为知识载体和传播媒介的优秀教材。教材是体现教学内容与教学方法的知识载体，是进行教学的基本工具，也是深化教育教学改革，提高人才培养质量的重要保证。

一本好的教材，要能反映该学科领域的学术水平和科研成就，能引导学生沿着正确的学术方向步入所向往的科学殿堂。因此，加强高校教材建设，对于提高教育质量、稳定教学秩序、实现高等教育人才培养目标起着重要的作用。正是基于这样的考虑，江西财经大学与复旦大学出版社达成共识，准备通过编写出版一套高质量的教材系列，以期进一步锻炼学校教师队伍，提高教师素质和教学水平，最终将学校的学科、师资等优势转化为人才培养优势，提升人才培养质量。为凸显江西财经大学特色，我们取校训“信敏廉毅”中一前一尾两个字，将这个系列的教材命名为“信毅教材大系”。

“信毅教材大系”将分期分批出版问世，江西财经大学教师将积极参与这一具有重大意义的学术事业，精益求精地不断提高写作质量，力争将“信毅教材大系”打造成业内有影响力的高端品牌。“信毅教材大系”的出版，得到了复旦大学出版社的大力支持，没有他们的卓越视野和精心组织，就不可能有这套系列教材的问世。作为“信毅教材大系”的合作方和复旦大学出版社的一位多年的合作者，对他们的敬业精神和远见卓识，我感到由衷的钦佩。

王　乔

2012年9月19日

前言

高等数学是科学和技术的基础。进入新世纪以来，随着科学技术的飞速发展，数学科学在与其他科学的相互渗透和相互影响中日益壮大。它越来越多地渗透到科学与工程技术的各个领域，成为至关重要的组成部分。高等数学已经成为自然科学、工程技术、社会科学等不可缺少的基础和工具，显示出强大的生命力。在科学技术日新月异的信息化时代，数学科学的应用范围被大大地扩展，与此同时也给高等数学教育带来了巨大影响，教育目标、内容设置、问题提出、学生的学习策略和问题解决也因此发生了变革。高等数学教育必须紧跟时代前进的潮流，进行不断的探索和创新。

“高等数学”是以讨论实函数微积分为主要内容的一门课程，它学时多，覆盖面广，影响面宽，其教学质量对工科各专业的教学质量影响很大，历来倍受重视。如今，除工科各专业学习外，越来越多的经济管理专业（如经济学、管理学、金融学、统计学、保险学等）也加入到学习“高等数学”课程当中来。“高等数学”课程已成为高校非数学各专业必修的一门重要的基础理论课。

本教材分上、下两册。主要介绍一元微积分学和多元微积分学的知识及其应用，并适当介绍空间解析几何、向量代数和无穷级数等有关基本理论和方法。上册主要介绍函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用等 6 章内容。下册主要介绍微分方程与差分方程、空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数等 6 章内容。

本教材由编者在十余年的教学讲义基础上编写，充分吸收了现有国内外优秀教材的精华，并结合江西财经大学财经和相关专业实际编写，针对性更强，适用性更好，更有利于学生的学习与掌

握。我的研究生姚远、肖伟、杨群、马良良在习题的搜集整理和书稿的校对上做了一些工作,我的各专业30余名本科生试读了本教材的初稿或正式稿,并提出了许多建议,在此表示感谢。此外,本教材编写过程中得到了江西财经大学信息管理学院众多领导和数学老师的帮助,并参考了国内外众多优秀教材或专家学者的成果,在此深致谢忱。

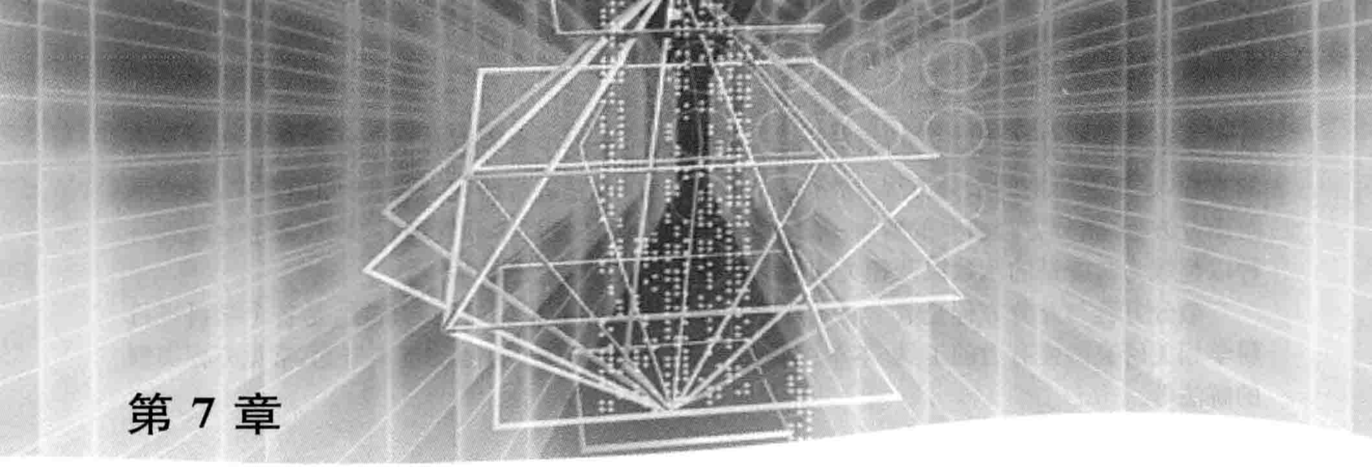
本教材的主要特色如下:①内容系统,翔实准确,反映时代要求;②图文并茂,易于学习;③语言简练流畅,可读性强;④与国际教材接轨;⑤习题丰富,适合不同学习层次;⑥相关内容与有关专业紧密联系,利于专业学习。

本教材可以作为工科类和经济管理类各专业本科生、高职生学习“高等数学”课程的教学用书,也可作为全国硕士研究生入学考试的教学参考书。由于本人的见识和水平有限,难免会有疏漏和错误,恳请广大读者批评指正。

余达锦

2014年5月16日

目录



第 7 章

微分方程与差分方程简介

【学习目标】

(1) 掌握微分方程及其阶、解、通解、特解和初始条件等概念;

(2) 熟练掌握可分离变量的微分方程及一阶线性微分方程的解法;

(3) 会解齐次微分方程和伯努利方程,会用简单的变量代换解某些微分方程;

(4) 会用降阶法解形如 $y^{(n)}=f(x)$, $y''=f(x, y')$ 和 $y''=f(y, y')$ 的微分方程;

(5) 理解线性微分方程解的性质及解的结构定理;

(6) 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法,并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程;

(7) 求自由项为多项式、指数函数、余(正)弦函数,以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程的特解和通解;

(8) 了解欧拉方程,会解包含两个未知函数的一阶常系数线性微分方程组;

(9) 掌握差分及差分方程的概念;

(10) 掌握一阶和二阶常系数线性差分方程的解法.

【学习要点】

可分离变量的微分方程及一阶线性微分方程;可降阶的高阶微分方程 $y^{(n)}=f(x)$, $y''=f(x, y')$ 和 $y''=f(y, y')$;二阶常系数齐次线性微分方程;自由项为多项式、指数函数、余(正)弦函数,以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程;齐次微分方程和伯努利方程;线性微分方程解的性质及解的结构定理;自由项为多项式、指数函数、余(正)弦函数,以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程的特解;欧拉方程;差分;差分方程;一阶常系数线性差分方程;二阶常系数线性差分方程.

微积分研究的对象是函数关系. 函数是客观事物的内部联系在数量方面的反映,利用函数关系可以对客观事物的规律性进行研究,因此如何寻找出所需要的函数关系,在实践中具有重要意义. 在许多问题中,往往很难直接找出所研究的变量之间的函数关系,但是比较容易建立

这些变量与它们导数或微分之间的关系，从而得到一个关于含有要找的函数及其导数或微分的方程，这就是所谓的微分方程. 微分方程建立以后，对它进行研究，找出未知函数来，这就是解微分方程. 微分方程研究的变量一般是连续型的，但在经济学和管理科学中，常常会碰到一种以整数为自变量的函数以及相关的离散型数学模型，即差分方程.

微分方程与差分方程是数学联系实际并应用于实际的重要途径与桥梁，是各个学科进行科学相关研究的强有力的工具. 本章主要介绍微分方程与差分方程的基本概念、常见方程类型的解法等.

§7.1 微分方程的基本概念

7.1.1 微分方程的定义

定义 含有自变量、未知函数及未知函数的导数或微分的方程称为**微分方程**. 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数，称为**微分方程的阶**.

微分方程在几何学、物理学、经济学和管理科学等都有着非常重要的应用. 下面来看几个例子.

例 1 一曲线 $y=f(x)$ 通过点 $(1, 2)$，且在该曲线上任一点 $M(x, y)$ 处的切线的斜率为 $2x$. 根据导数的几何意义，可得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x,$$

于是 $y=\int 2x\mathrm{d}x$，即 $y=x^2+C$. 将 $x=1$，$y=2$ 代入，可确定 $C=1$，进而得到曲线方程为 $y=x^2+1$.

例 2 伽利略当年在研究自由落体运动时发现，如果自由落体在时间 t 内下落的距离为 s，则加速度 $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ 是一个常数 g，也就是说有如下微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=g.$$

求解这个方程，先积分一次得 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=gt+C_1$，再积分一次得 $s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$，$C_1$，$C_2$ 为任意常数. 由于是自由落体运动，$t=0$ 时落体的运动速度和位移均为 0，故 $C_1=C_2=0$，可得自由落体运动的规律：

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

这是微分方程应用得最早的一个例子.

例 3 英国经济学家马尔萨斯(Thomas Robert Malthus，1766—1843)在 1798 年出版的《人口原理》一书中提出了马尔萨斯人口模型：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx,\\ x\big|_{t=t_0}=x_0,\end{cases}$$

其中 $x = x(t)$ 是时间变量 t 的函数，表示 t 时刻人口总数，r 为人口增长率(常数)，这是一阶微分方程的初值问题. 当人口基数不大、有足够的资源和空间来提供人类生存时，马尔萨斯人口模型基本符合人口增长实际.

上述 3 例都是微分方程实际应用的例子.

定义　未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**. 未知函数是多元函数的微分方程称为**偏微分方程**.

例如，方程

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 4xy' = 3x^2$$

是三阶微分方程；方程

$$y^{(4)} - 4y''' + 10y'' - 12y' + 5y = \sin 2x$$

是四阶微分方程；方程

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y + 5x = 0$$

是 n 阶微分方程.

n 阶微分方程的一般形式为

$$F(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n)}) = 0 \text{ 或 } y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n-1)}).$$

7.1.2　微分方程的解

定义　满足微分方程的函数(即把函数代入微分方程能使该方程成为恒等式)叫做该**微分方程的解**. 确切地说，设函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数，如果在区间 I 上，

$$F[x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \cdots,\ \varphi^{(n)}(x)] = 0,$$

那么函数 $y = \varphi(x)$ 就叫做微分方程 $F(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n)}) = 0$ 在区间 I 上的解.

如果 $\Phi(x,\ y) = 0$ 确定的隐函数 $y = \varphi(x)$ 是微分方程的解，则称 $\Phi(x,\ y) = 0$ 为微分方程在区间 I 上的**隐式解**.

定义　如果微分方程的解中含有任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做**微分方程的通解**. 如果微分方程的解中不含有任意常数，这样的解叫做**微分方程的特解**.

如方程 $s = \dfrac{1}{2}gt^2$，$s = \dfrac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$ (C_1，C_2 为任意常数) 都是微分方程 $\dfrac{d^2 s}{dt^2} = g$ 的解. $s = \dfrac{1}{2}gt^2$ 为特解，$s = \dfrac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$ (C_1，C_2 为任意常数) 为通解.

通常为了求微分方程的特解，往往要给定一些条件，以助于确定相关常数. 有如下定义：

定义　用于确定通解中任意常数的条件，称为**初始条件**. 求微分方程满足初始条件的解的问题称为**初值问题**.

一般 n 阶微分方程的初始条件是

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_{n-1},$$

其中 y_0，y_1，$\cdots$，y_{n-1} 是给定的 n 个常数.

如求微分方程 $y' = f(x,\ y)$ 满足初始条件 $y\big|_{x=x_0} = y_0$ 的解的问题，可记为

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases}$$

定义 微分方程的解的图形是一条曲线(特解时)或无数条曲线(通解时),叫做微分方程的积分曲线.

例 4 验证:函数

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$$

是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = 0$$

的解.

解 求所给函数的导数:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -kC_1\sin kt + kC_2\cos kt,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k^2C_1\cos kt - k^2C_2\sin kt = -k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt).$$

将 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ 及 x 的表达式代入所给方程,得

$$-k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) + k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) = 0.$$

这表明函数 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ 满足方程 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = 0$,因此所给函数是所给微分方程的解.

例 5 已知函数 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt\,(k \neq 0)$ 是微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = 0$ 的通解,求满足初始条件

$$x\,|_{t=0} = A,\ x'\,|_{t=0} = 0$$

的特解.

解 由条件 $x\,|_{t=0} = A$ 及 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$,得

$$C_1 = A,$$

再由条件 $x'\,|_{t=0} = 0$ 及 $x'(t) = -kC_1\sin kt + kC_2\cos kt$,得

$$C_2 = 0.$$

把 C_1, C_2 的值代入 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ 中,得特解为

$$x = A\cos kt.$$