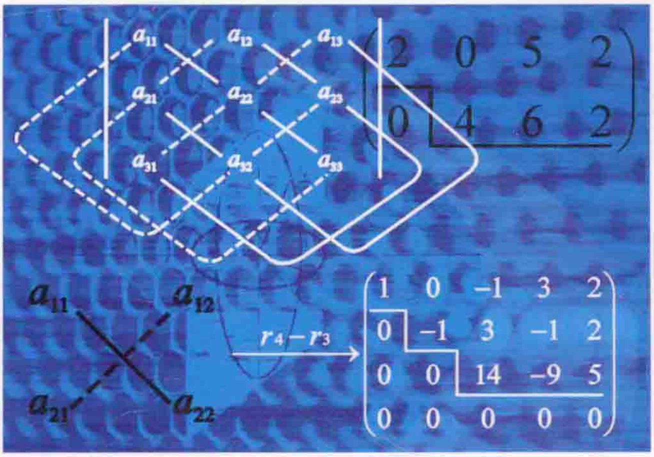
普通高等学校“十二五”精品规划教材



主编　夏学文

XIANXING DAISHU

线性代数

中南大学出版社
www.csupress.com.cn

线性代数

主编　夏学文

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/夏学文主编.—长沙:中南大学出版社,2014.8
ISBN 978-7-5487-1079-0

Ⅰ.线...　Ⅱ.①夏...　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 092338 号

线性代数

夏学文　主编

□责任编辑　刘　辉
□责任印制　易建国
□出版发行　中南大学出版社
社址:长沙市麓山南路　邮编:410083
发行科电话:0731-88876770　传真:0731-88710482
□印　　装　长沙印通印刷有限公司

□开　　本　720×1000　B5　□印张 15　□字数 267 千字
□版　　次　2014 年 6 月第 1 版　□2014 年 6 月第 1 次印刷
□书　　号　**ISBN 978-7-5487-1079-0**
□定　　价　**36.00** 元

内 容 简 介

本教材是按照教育部制定的《线性代数课程教学基本要求》编写的.

全书共7章,即 n 阶行列式、矩阵、向量与向量空间、线性方程组、特征值及二次型、线性空间与线性变换、λ-矩阵. 每章均配有习题,书后附有参考答案和历年考研真题.

本书可作为本科大学及高等专科院校的数学教材或参考书.

前　　言

数学是一门重要而应用广泛的学科,被誉为锻炼思维的体操和人类智慧之冠上最明亮的宝石.不仅如此,数学还是各类科学和技术的基础,它的应用几乎涉及所有的学科领域,它对于世界文化的发展有着深远的影响.高等学校作为培育人才的摇篮,其数学课程的开设也就具有特别重要的意义.

随着我国经济建设与科学技术的迅速发展,高等教育进入了一个飞速发展时期,已经突破了以前的精英式教育模式,发展成为一种在终身学习的大背景下极具创造和再创性的基础学科教育.高等学校教育教学观念不断更新,教学改革不断深入,办学规模不断扩大,数学课程开设的专业覆盖面也不断增大.

本教材是为普通高等学校非数学专业学生编写的,也可为各类需要提高数学素质和能力的人员使用.教材中,概念、定理及理论叙述准确、精练,符号使用标准、规范,知识点突出,难点分散,证明和计算过程严谨,例题、习题等均经过精选,具有代表性和启发性.

本教材由夏学文主编.参加讨论和编写的人员有:彭向阳、汤琼、徐立新、李珍珠、吴建国、蒋劲松等.

教材中难免有不妥之处,希望使用本教材的教师和学生能提出宝贵意见或建议.

编　者

目　　录

第 1 章　n 阶行列式

§1　全排列及逆序数

解方程是代数中的一个基本问题,中学代数中,解线性方程组问题时引出了二阶和三阶行列式,我们知道它们的展开式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{1-2}$$

其中元素 a_{ij} 的两个下标 i 与 j 分别表示 a_{ij} 所在的行与列的序数.

例如:二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,则当 $D \neq 0$ 时,方程有解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

我们观察到(1-2)式右端是一些项的代数和,其中,每一项是位于不同行不同列的三个数相乘,这三个数的第一个下标是按自然顺序排列的,第二个下标则不按自然顺序排列. 我们不禁要问:这个代数和的项数、每一项前的符号与第二个下标的排列顺序有无关系? 有什么关系? 为此我们引入全排列与逆序数等概念.

定义 1　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个n 级全排列(简称排

列).

有序数组 12 和 21,由两个数构成,称为二级排列;有序数组 213 则称为三级排列,三级排列的总数为 $3!=6$ 个;4321 为四级排列,四级排列的总数为 $4!=24$ 个;n 级排列的总数是 $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!$,读为"$n$ 阶乘".

显然 $12\cdots n$ 也是一个 n 级排列,这个排列具有自然顺序,就是按递增的顺序排起来的,其他的排列都或多或少地破坏自然顺序.

定义 2 在一个排列中,如果两个数(称为数对)的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,那么称它们构成一个逆序(反序).一个排列中,逆序的总数称为这个排列的逆序数.

一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数,一般记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

排列 12 的逆序数为 0;排列 21 的逆序数为 1;排列 231 的数对 21,31 均构成逆序,而 23 不构成逆序,因此排列 231 的逆序数为 2;同理,排列 213 的逆序数是 1,即 $\tau(213)=1$.进一步我们有以下定义.

定义 3 逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.

二级排列 12 为偶排列,21 为奇排列;三级排列 231 为偶排列,213 为奇排列.

现在我们探讨(1-1)、(1-2)式右端各项的规律:

(1-1)式右端各项的第一个下标按自然顺序排列,对它们第二个下标进行观察:第二个下标由两个自然数 1 和 2 组成,只能构成两个二级排列:12 和 21,排列个数等于(1-1)式右端的项数.且排列 12 的逆序数为 0,对应项的符号为"+";而排列 21 的逆序数为 1,所对应项的符号为"-".

(1-2)式右端各项的第一个下标按自然顺序排列,第二个下标由自然数 1,2 和 3 组成,构成的三级排列共有 $3!=6$ 个:123,231,312,132,213,321,这正好等于(1-2)式右端的项数.排列为 123,231,312 的逆序数分别为 0,2,2,它们均为偶排列,对应项的符号为"+";排列 132,213,321 的逆序数分别为 1,1,3,它们都是奇排列,对应项的符号为"-".综上所述,(1-2)式右端各项可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 这里 $j_1j_2j_3$ 是 1,2,3 的一个三级排列.当 $j_1j_2j_3$ 为偶排列时,项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为正;当 $j_1j_2j_3$ 为奇排列时,项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为负.各项所带符号均可表示为 $(-1)^J$,其中 $J=\tau(j_1j_2j_3)$ 为排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数,从而(1-2)式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对全体三级排列求和.

例 1　计算以下各排列的逆序数,并指出它们的奇偶性:

(1)42531;(2)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解　(1)对于所给排列,4 排在首位,逆序个数为 0;2 的前面有一个比它大的数,逆序个数为 1;5 的前面有 0 个比它大的数,逆序个数为 0;3 的前面有两个比它大的数,逆序个数为 2;1 的前面有 4 个比它大的数,逆序个数为 4. 把这些数加起来,即

$$0+1+0+2+4=7.$$

故排列 42531 的逆序数为 7,即 $\tau(42531)=7$,因而是奇排列.

(2)同理,可得

$$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))=0+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

所给排列当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时,为奇排列.

§2　行列式的定义

定义 4　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1-3)$$

的代数和,这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 每一项(1－3)式都按下列规则带有符号:当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,(1－3)式带有正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,(1－3)式带有负号. 这一定义可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}. \qquad (1-4)$$

这里$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$表示对所有$n$级排列求和.

例 2 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解 根据定义,D是$4!\ =24$项的代数和,但每一项的乘积$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$中,只要有一个元素为0,乘积就等于0,所以只需计算展开式中不明显为0的项. 由于第1行元素除a_{11}外全为0,故只需考虑$j_1=1$;第2行元素中只有a_{21},a_{22}不为0,现已取$j_1=1$,故必须取$j_2=2$;同理,必须取$j_3=3$,$j_4=4$. 这就是说行列式展开式中不为0的项只可能是$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$,而列标排列1234的逆序数为0,即此项符号为正,因此行列式$D=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

行列式中,从左上角到右下角的直线称为主对角线,主对角线以上的元素全为零(即$i<j$时元素$a_{ij}=0$)的行列式称为下三角行列式,它等于主对角线上各元素的乘积. 主对角线以下的元素全为零(即$i>j$时元素$a_{ij}=0$)的行列式称为上三角行列式,同理可证它等于主对角线上各元素的乘积.

行列式中,除主对角线上的元素以外,其他元素全为零(即$i\neq j$时元素$a_{ij}=0$)的行列式称为对角行列式,由上面可知它等于对主角线上元素的乘积,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \boldsymbol{O} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 3　证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

上面的行列式中,未写出的元素都是 0.

证　由于行列式的值为 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,只需对可能不为 0 的乘积 $(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 求和,考虑第 n 行元素 a_{nj_n},知 $j_n=1$,再考虑第 $n-1$ 行元素 $a_{n-1,j_{n-1}}$,知 $j_{n-1}=1$ 或 $j_{n-1}=2$,由于 $j_n=1$ 知 $j_{n-1}=2$,如此类推 $j_2=n-1$, $j_1=n$,排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 只能是排列 $n(n-1)\cdots 21$,它的逆序数为 $J=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$,所以行列式的值为

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

由此可见

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

例 4　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1D_2$.

证 记

$$D=\begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1,k+n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k+n,1} & \cdots & d_{k+n,k+n} \end{vmatrix},$$

其中

$$d_{ij}=a_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,k),$$
$$d_{k+i,k+j}=b_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n),$$
$$d_{i,k+j}=0\quad(i=1,2,\cdots,k;j=1,2,\cdots,n).$$

考察 D 的一般项 $(-1)^R d_{1r_1}d_{2r_2}\cdots d_{kr_k}d_{k+1,r_{k+1}}\cdots d_{k+n,r_{k+n}}$，$R$ 是排列 $r_1r_2\cdots r_kr_{k+1}\cdots r_{k+n}$的逆序数，由于 $d_{i,k+j}=0(i=1,2,\cdots,k;j=1,2,\cdots,n)$，因此 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 均不可大于 k 值，否则该项为 0，故 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 只能在 $1,2,\cdots,k$ 中选取，从而 $r_{k+1},r_{k+2},\cdots,r_{k+n}$只能在 $k+1,k+2,\cdots,k+n$ 中选取，于是 D 中不为 0 的项可以记作

$$(-1)^R a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n},$$

这里 $p_i=r_i,q_i=r_{k+1}-k,1\leqslant r_i\leqslant k,k+1\leqslant r_{k+i}\leqslant k+n$，$R$ 也就是排列 $p_1p_2\cdots p_k(k+q_1)\cdots(k+q_n)$的逆序数，以 P,Q 分别表示排列 $p_1p_2\cdots p_k$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数，则有 $R=P+Q$，于是

$$\begin{aligned} D &= \sum_{p_1\cdots p_k}\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^{P+Q}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n} \\ &= \sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^P a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}\Big(\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^Q b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n}\Big) \\ &= \sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^P a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}D_2 \\ &= D_1D_2. \end{aligned}$$

§3 对 换

定义 5 排列中，将某两个数对调，其余的数不动，这种对排列的变换称为对换，将相邻两数对换，称为相邻对换(邻换).

定理 1 一个排列中的任意两数对换，排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}\cdots p_n$，对换 p_i 与 p_{i+1} 排列变为 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}\cdots p_n$. 虽然 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}\cdots p_n$ 这些数的逆序数经过对换并不改变，仅 p_i 与 p_{i+1}两数的逆序数改变：当 $p_i<p_{i+1}$时，经对换后，$p_{i+1}p_i$ 是逆序，新排列的逆序数增加 1；当 $p_i>p_{i+1}$时，$p_{i+1}p_i$ 不是逆序，新排列的逆序数减少 1. 所以排列为 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}\cdots p_n$ 与排列 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}\cdots p_n$ 的逆序数相差 1，奇

偶性改变.

下证一般对换的情形.

设排列为 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}\cdots p_{i+m}p_{i+m+1}p_{i+m+2}\cdots p_n$，对换 p_i 与 p_{i+m+1}，把 p_i 往后连续作 m 次相邻对换，排列变为 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_{i+m}p_ip_{i+m+1}p_{i+m+2}\cdots p_n$，再把 p_{i+m+1} 往前连续作 $m+1$ 次相邻对换，排列变为 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+m+1}p_{i+1}\cdots p_{i+m}p_ip_{i+m+2}\cdots p_n$，从而实现了 p_i 与 p_{i+m+1} 的对换，它是经 $2m+1$ 次相邻对换而成，排列也就改变了 $2m+1$ 次奇偶性，所以两个排列的奇偶性相反.

由于数的乘法是可交换的，所以行列式各项中的元素的顺序也可任意交换. 例如，四阶行列式中，乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 可以写成 $a_{22}a_{11}a_{44}a_{33}$；一般 n 阶行列式中，乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 可以写成 $a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 都是 n 级排列.

定理 2　n 阶行列式的一般项可以写成

$$(-1)^{S+T}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n},$$

其中 S 与 T 分别是 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数.

证　该项中任意两元素互换，行下标与列下标同时对换，由定理1知 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 同时改变奇偶性，于是 $S+T$ 的奇偶性不变. 如果将排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 对换为自然顺序 $12\cdots n$（逆序数为0），排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 也相应对换为 $j_1j_2\cdots j_n$（逆序数为 J），则有

$$(-1)^{S+T}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}=(-1)^{J}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

由定理2可知，行列式也可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}. \tag{1-5}$$

若将行列式中各项的列下标按自然顺序排列，而相应行下标排列为 $i_1i_2\cdots i_n$，于是行列式又可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1-6}$$

§4 行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D' 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证　记

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$, 按行列式定义

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D. \end{aligned}$$

性质 1 表明, 行列式中行与列的地位是对称的, 即行列式中行具有的性质, 其列也具有.

性质 2　互换行列式的两行(列), 行列式反号.

证　下面只证列的情形.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

交换第 p,q 两列, 得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 D 与 D_1 按(1-6)式计算,对于 D 中任一项

$$(-1)^I a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_n n},$$

其中 I 为排列 $i_1 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n$ 的逆序数,在 D_1 中必有对应一项

$$(-1)^{I_1} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_n n}$$

(当 $j \neq p,q$ 时,第 j 列元素取 $a_{i_j j}$,第 p 列元素取 $a_{i_q q}$,第 q 列元素取 $a_{i_p p}$),其中 I_1 为排列 $i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n$ 的逆序数. 而

$$i_1 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n$$

与

$$i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n$$

只经过一次对换,由定理1知,$(-1)^I$ 与 $(-1)^{I_1}$ 相差一个符号. 又因

$$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_n n} = a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_n n},$$

故对于 D 中任一项,D_1 中必定有一项与它的符号相反而绝对值相等,又 D 与 D_1 的项数相同,所以 $D=-D_1$.

本书中,交换行列式 i,j 两行,记作 $r(i,j)$;交换行列式 i,j 两列,记作 $c(i,j)$.

推论　若行列式有两行(列)元素对应相等,则行列式为零.

性质3　行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一个数 k,等于用数 k 乘以此行列式.

第 i 行(列)乘以数 k,记作 $r(i(k))(c(i(k)))$.

推论　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子,可以提到行列式符号的外面.

性质4　行列式中若有两行元素对应成比例,则此行列式为零.

性质5　若行列式的某行(列)的元素都是两个数之和,则行列式等于相应的两个行列式之和.

例如: