測量平差原理

（附實例計算及電腦平差程式設計）

增 訂 版

王 壽 雄　編著

國彰出版社　印行

序　　言

測量平差在測量學術上佔極重要之地位，凡舉辦各種測量作業，不論其規模之大小，測量之精度如何，及其用途如何，均需涉及平差問題。測量平差之原理甚爲簡單，即使誤差之平方和爲最小，亦即最小二乘法之原理，該原理係德人高斯（Gauss）於 1794 年首創，而應用於測量平差上。在此要特別強調者，即測量平差問題只針對測量時所產生之偶然誤差，應用最小二乘法之原理以求得各觀測值之最或是值，或使其符合某種定約條件而言。致於人爲的誤差（或錯誤），儀器（或測量用具）之系統差等，並不列入平差之範圍內。因此在測量之前，儀器之校正及觀測者個人的情緒，非常重要，此項誤差及系統差一定要設法消除之，否則不能進行測量工作，更不能解算平差問題。

本書共計八章，理論與實例計算並重，可供大專之教本及從事測量工作之參考。各章平差公式推演後，即附有例題，使讀者能學以致用，第四章詳述有關測量平差之原理，觀測精度及誤差之擴張等，後四章介紹有關直接觀測，獨立間接觀測及條件觀測等平差法之原理與實例計算。在第八章中之導線網，三角網及水準網等計算實例乃筆者在服務單位所實際工作之成果。

一般市面上專論測量平差之書籍較少，筆者有鑒於此，乃參考中外有關書籍、文獻並參酌自己的工作經驗，利用公餘加以編著而成，遺漏、錯誤之處將難免，敬請讀者，測量界先進加以指正，至盼。

王　壽　雄　謹識

民國六十八年元月於台中

增訂版序言

本書初版後承蒙讀者及測量界先進常來函加以指正，在此特一併致謝，初版之內容如有印刷錯誤，已在本版中一一修正，今後更盼讀者及測量界先進隨時來函賜正。

近年來電腦應用於各行各業已漸普遍，應用電腦解算繁雜的測量平差問題，可得精確、迅速之效果，為應讀者要求，特參考日文版書籍於本書第九章中加入有關應用電腦解算測量平差問題，以供讀者參考。

王壽雄　謹識

民國七十一年二月於台中

目　　錄

第一章　觀測之誤差

1－1　前言

吾人在進行觀測時，不論量距或測角，對同一目標連續觀測二次以上時，則所得之結果必有差異，此種差異之所以產生乃因觀測者之經驗，儀器之精度及觀測時之環境不同都有影響。因此在從事觀測時爲達到良好的成果必須小心施測，隨時注意環境的變化，儀器在觀測之前應加以校正。以使觀測之誤差減至最小。

爲增加觀測之精度，使成果更爲可靠起見，吾人常採用兩種方法：一爲對同一對象重複觀測，如丈量兩點間之距離，必以測尺往返量之，以求其是否有較大之誤差，如誤差甚小則可以平均之，如此所得之結果較爲準確可靠。另一爲利用某種幾何條件之關係以檢驗觀測結果。例如施測一三角形之三內角其和必爲180°倘所測結果能符合此一條件或在可靠的精度內符合容許的觀測誤差，則所測之角度必爲精確可靠。否則必須重新加以觀測。

1－2　觀測的種類

觀測可分爲獨立觀測（Independent Observation）及條件觀測（Conditioned Observation）每一種觀測又可分爲直接觀測（Direct Observation）及間接觀測（Indirect Observation）兩種。爲求易於瞭解起見，茲將觀測的種類列表如下並舉例說明之：

觀 測 的 種 類

獨立觀測		條件觀測	
直接觀測	間接觀測	直接觀測	間接觀測
例如： 1. 使用鋼尺測定兩點間之距離。 2. 使用經緯儀測定三角形之兩內角。 3. 使用水準儀測定兩點間之高低差。	例如： 1. 先測定距離 S 及仰角 α 則兩點之高低差可由下式求出： $h = S\tan\alpha$ 2. 測出三角形之底邊 b 高 h 則三角形之面積可由下式求出： $A = \frac{1}{2}bh$	例如： 1. 測定一三角形三內角則 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ 2. 由一導線出發點之方向角求終點之方向角是否與已知之方向角一致。	例如： 1. 由一導線出發點之坐標利用幾何關係求終點之坐標是否與已知坐標一致。 2. 由三角鎖之出發邊計算到最後一邊是否與直接測定之距離相符合。

由上表吾人可以很清楚的得到觀測種類的概念，而平差的問題乃是根據上述不同的分類而進行不同之平差方法。

1－3 誤差的種類

在討論平差問題之前吾人對於誤差的種類必須事先瞭解，今將誤差的種類分述如下：

1. 定誤差（Constant Error）－或稱系統誤差，規則誤差及累積誤差。在觀測時已包含了等量的誤差在內。定誤差發生的原因不外乎人爲及儀器的定誤差，由於觀測者之視覺及聽覺之不同而產生一定的誤差（其誤差量及符號常一致）。而在觀測儀器之構造上及製作上常

有某些條件不符而產生儀器之定誤差。另外由於地球表面的自然現象亦能引起各種不同的定誤差。上述各種定誤差影響觀測成果至鉅，而以儀器方面的定誤差最容易發生，唯有在觀測之前先行校正儀器，才能得到精確的成果，至於人爲及由自然現象所引起的定誤差亦可由各種方法予以消除或改正。

2.不定誤差（Indeterminate Error）——或稱偶然誤差，此種誤差之產生多半由於儀器構造上的限制，環境的影響及觀測者之官覺所不能避免之誤差，如儀器的偶然微動、空氣的污染、濕度的變化而引起的光線不規則的折射等均能產生不定誤差。此種誤差無法完全消除，且其影響可正可負，此與定誤差所不同之處，本書卽針對不定誤差利用最小二乘法之原理予以平差。

除上述兩種誤差之外尚有所謂錯誤，其來源由於觀測者或紀錄者之疏忽所引起的，如量距時少記一整數或測角時誤記分數爲度數之類。因此在作業時應隨時注意以防錯誤之發生。而錯誤並不在平差範圍之內，希讀者注意之。

1－4　定誤差之消除方法

1.　個人觀測時所引起的定誤差消除方法

個人進行觀測時所引起的定誤差很多，例如個人的觀測習慣、視覺、聽覺、反應的快慢及觀測時的情緒都足以引起定誤差。當吾人使用同一測尺施測一段長距離時，可在全長的中間交換前尺手與後尺手，以消除兩者的個人定誤差。又報時時個人的聽覺反應不同而引起的定誤差，可使用儀器記錄，然後加以比較，求出兩者的誤差，再改正個人的定誤差卽可。其他消除個人的定誤差之方法還很多，以上只是擧兩個例子，以供讀者參考。

2.　義器的定誤差消除方法

關於儀器的定誤差消除方法可分爲兩方面說明：一爲利用觀測法消除，二爲求出定誤差加以改正，茲將上述兩種方法分述如下：

A. 利用觀測方法

A－1　經緯儀之視準軸誤差，水平軸誤差及外心誤差等可利用望遠鏡之正鏡及倒鏡觀測值取其算術平均值。

A－2　經緯儀之水平度盤之偏心誤差，在觀測時可同時讀出 180° 所對之觀測值，然後再取算術平均值。

A－3　經緯儀之垂直度盤與望遠鏡視準軸或化微尺所產生之誤差，亦可利用正倒鏡之方法消除之。

A－4　經緯儀之刻度盤，物差及標尺等的刻劃誤差可變換刻劃的位置，再取其算術平均值，則誤差將可減少至最小程度。

A－5　直接水準測量時，望遠鏡之視準軸誤差，大氣折光差等可由等距離觀測而消除上述之誤差。

B. 定誤差之各種改正公式：

B－1　測距尺之溫度改正值公式

$$Ct = S(t - t_0)\alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{-}1)$$

式中：Ct 爲溫度改正值

S 爲測定之距離

t 爲測量時之溫度

t_0 爲測距尺檢定時之溫度

α 爲測距尺之膨脹係數

B－2　大氣折光差之改正值公式（垂直方向之折光差）

$$At = -\frac{ks^2}{2r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{-}2)$$

式中：At 為大氣折光之改正值

S 為兩點間之距離

k 為折光係數（約0.13）

r 為地球半徑（6370公里）

B－3 傾斜改正值公式

$$I=-\frac{h^2}{2s}=-2s\sin^2\frac{\theta}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{-}3)$$

式中：I 為傾斜改正值

h 為兩點間之高低差（公尺）

s 為兩點間之距離（公尺）

θ 為垂直角度

B－4 偏心觀測所引起之觀測角度改正值公式

$$X''=\rho\frac{\ell}{S}\sin\theta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{-}4)$$

式中：X'' 為觀測角度改正值（秒）

$\rho=206265''$（1弧度之秒數）

ℓ 為基準點至偏心點之偏心距離

S 為至視準點之距離。

$\theta=360°-\phi+$觀測角，觀測角＝從零方向起算之角度

ϕ＝以零方向為基準之偏心角度

B－5 球面差之改正值公式

$$V=+\frac{S^2}{2r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{-}5)$$

式中：V 爲球面差之改正值

S 爲兩點間之距離

r 爲地球半徑（ 6370 公里）

B－6　傾斜攝影畫面之距離誤差

$$\triangle S = 2S\sin^2\frac{\theta}{2} \quad \cdots\cdots (1\text{-}6)$$

式中：△S 爲傾斜攝影畫面之距離誤差

S　爲畫面上兩點間之距離

θ　爲攝影時之傾斜角度

第二章 誤差分佈定律及最小二乘法之原理

2－1 偶然誤差之或是率（Probability）

有關或是率之理論及計算方法，乃爲數學之一部份，本章不擬詳論，爲應用起見，僅將要旨簡述如下：

吾人都知道或是率乃是針對偶然事件發生之可能性作預計之方法，而偶然事件亦卽對該事件是否發生，不能依據任何原理，公式作確定之結論。例如某人購買愛國獎券是否能中獎，則事先無法推知，如果恰好中獎卽爲偶然之事件，而其中獎之可能性可以按照或是率之原理求得。

或是率卽爲該事件發生情形之數目與所有可能情形之數目之比例。如上例設有愛國獎券共賣出十萬號，而特獎只有一個，今有一人買得獎券一張，則該號中特獎之或是率爲十萬分之一。或是率如以數學方法表示時，則爲一分數，最大爲1，卽該事件必能發生，最小爲0，卽該事件決不發生。誤差定律卽以或是率爲依據，用數學方法表示誤差分佈定律，首由高斯（Gauss）於1794年引證得出，而於1809年發表始創立最小二乘法，應用於測量平差。

進行觀測時偶然誤差之發生，最初並無規律，但觀測次數逐漸增加，至於無窮次時，而每一次觀測均在同一環境之下進行者，則所有偶然誤差之大小及分佈卽產生一定的規則，此一定則乃是根據無窮多次的觀測數目而導出者。但事實無法做到無窮多次的觀測，因此觀測次數漸漸增大時，其結果必愈接近無窮多次。今依據偶然誤差之定義，可得到下列三點結論：

(1) 同樣大小之正負誤差，其出現之或是率必相等。

(2) 較小誤差之或是率，必大於較大誤差之或是率。

(3) 誤差近於零之或是率應爲最大。

以上所指的誤差係純粹爲偶然誤差，若含有定誤差在內則以上三點結論就不存在。

誤差之或是率與誤差之大小有關，今設一誤差之值爲 σ ，則誤差出現之或是率必爲 σ 之函數，而以 $f(\sigma)$ 表示一誤差發生於 0 與 σ 之間之或是率，則一誤差發生於 σ 與 $\sigma + d\sigma$ 間之或是率必爲：

$$P = f(\sigma + d\sigma) - f(\sigma) = f'(\sigma)\,d\sigma = \phi(\sigma)\,d\sigma \quad \cdots\cdots (2\text{-}1)$$

上式因 $d\sigma$ 之值極小故 P 即代表誤差出現於 σ 與 $\sigma + d\sigma$ 間之或是率。函數 $\phi(\sigma)$ 即爲誤差分佈定律。若一誤差發生介於兩數 a 及 b 之間其或是率可以

$$P_a^b = \int_a^b \phi(\sigma)\,d\sigma \cdots\cdots (2\text{-}2)$$

表示之，若 a 及 b 兩數爲 $-\infty$ 與 $+\infty$ 時，則其或是率必等於 1 ，因誤差之值必介於 $-\infty$ 與 $+\infty$ 之間，故：

$$P_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\sigma)\,d\sigma = 1 \quad \cdots\cdots (2\text{-}3)$$

爲求上式之誤差定律，必需假定多次觀測值之算術平均值最近於眞值（Ture Value），而觀測次數逐漸增加時則漸近乎眞值，今將根據算術平均值之假定以求誤差定律之演算分述如下：

設有一段距離，經丈量 n 次，每次丈量時精度相同（亦即使用同一測尺在同一環境之下進行丈量），n 爲一相當大的數目，欲求此段距離之最或是值，此 n 次之觀測值係在同一精度施測下，吾人並不能

取任一值來代表或放棄任何一值，因此以算術平均值來代表最爲適當，若丈量次數 n 漸漸增加而至於無窮大時，則算術平均值即趨近於眞值。誤差定律公式之推演，卽根據此項假設。

今有一組直接觀測之結果爲 ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 … ℓ_n ，其眞值爲T，則每次所觀測之誤差爲：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= T - \ell_1 \\ \sigma_2 &= T - \ell_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma_n &= T - \ell_n \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}4)$$

設誤差 σ_1，σ_2 …… σ_n 之或是率以 $P(\sigma_1)$，$P(\sigma_2)$ …… $P(\sigma_n)$ 表之，由或是率之乘法原理知，所有 n 個誤差同時出現之或是率爲各個誤差或是率之乘積，亦卽：

n 個誤差同時出現之或是率 $= P(\sigma_1) \cdot P(\sigma_2) \cdots\cdots P(\sigma_n)$ ⋯(2-5)

上式之或是率應爲最大，茲將（2-5)式化爲自然對數得

$$\ln P(\sigma_1) + \ln P(\sigma_2) + \cdots + \ln P(\sigma_n) = \text{最大值} \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}6)$$

微分（2-6）式得：

$$\frac{d\ln P(\sigma_1)}{d\sigma_1} \cdot \frac{d\sigma_1}{dT} + \frac{d\ln P(\sigma_2)}{d\sigma_2} \cdot \frac{d\sigma_2}{dT} + \cdots + \frac{d\ln P(\sigma_n)}{d\sigma_n} \cdot \frac{d\sigma_n}{dT}$$

$$= 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}7)$$

微分第（2-4)式可得下列關係：

$$\frac{d\sigma_1}{dT} = \frac{d\sigma_2}{dT} = \cdots\cdots\cdots = \frac{d\sigma_n}{dT} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}8)$$

因此第（2-7）式可改寫成：

$$\frac{d\,ln\,P(\sigma_1)}{d\,\sigma_1}+\frac{d\,ln\,P(\sigma_2)}{d\,\sigma_2}+\cdots\cdots+\frac{d\,ln\,P(\sigma_n)}{d\,\sigma_n}=0\cdots\cdots\cdots(2\text{-}9)$$

同時亦可寫成下面之形式：

$$\frac{d\,ln\,P(\sigma_1)}{\sigma_1\,d\sigma_1}\sigma_1+\frac{d\,ln\,P(\sigma_2)}{\sigma_2\,d\,\sigma_2}\sigma_2+\cdots+\frac{d\,ln\,P(\sigma_n)}{\sigma_n\,d\,\sigma_n}\sigma_n=0\cdots\cdots(2\text{-}10)$$

以上各式乃誤差或是率與眞誤差 σ_1，σ_2，…… σ_n 間之關係 ，設算術平均值X爲最或是值，且觀測次數 n 爲無窮大時，X之值則趨近於眞值T ，以公式表之如下：

$$X=\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\ell_i}{n}=\frac{[\ell]}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}T\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{-}11)$$

式中〔 ℓ 〕表示 $\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_n$（各觀測值之總和）

今由（2-4）式中之各式相加卽得：

$$[\sigma]=nX-[\ell]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{-}12)$$

由第（2-11）式及（2-12）式卽可求得：

$$[\sigma]=\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{-}13)$$

從第（2-10）式及（2-13）式知所有眞誤差 σ_1，σ_2，… σ_n 之係數必須相等，因此可得下式：

$$\frac{d\,ln\,P(\sigma_1)}{\sigma_1\,d\,\sigma_1}=\frac{d\,ln\,P(\sigma_2)}{\sigma_2\,d\,\sigma_2}=\cdots\cdots=\frac{d\,ln\,P(\sigma_n)}{\sigma_n\,d\,\sigma_n}=k\cdots\cdots\cdots(2\text{-}14)$$

上式中 k 爲一常數，今對任一觀測誤差而言，必須有下式關係：

$$\frac{d\,ln\,P(\sigma)}{d\sigma}=k\sigma \quad \cdots\cdots(2\text{-}15)$$

積分第(2-15)式如下：

$$\int d\,ln\,P(\sigma)=k\int\sigma\,d\sigma \quad \cdots\cdots(2\text{-}16)$$

或 $$ln\,P(\sigma)=\frac{1}{2}k\sigma^2+C \quad \cdots\cdots(2\text{-}17)$$

式中C爲積分常數，上式並可化爲：

$$P(\sigma)=e^{C}\cdot e^{\frac{1}{2}k\sigma^2} \quad \cdots\cdots(2\text{-}18)$$

(2-18)式即爲誤差或是率之公式，其中 k，C均爲常數，根據 2-1 節所論之較小誤差或是率必大於較大誤差之或是率，故知(2-18)式中 k 爲一負數，設，$\frac{1}{2}k=-h^2$，$e^C=R$，則(2-18)可改寫成：

$$P(\sigma)=R\,e^{-h^2\sigma^2} \quad \cdots\cdots(2\text{-}19)$$

新的常數R可由 $\int_{-\infty}^{+\infty}P(\sigma)d\sigma=1$ 之關係求得：

$$R\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2\sigma^2}d\sigma=1 \quad \cdots\cdots(2\text{-}20)$$

設 $t=h\sigma$，　$dt=hd\sigma$，代入上式得：