清华大学公共基础平台课教材

线性代数与几何

（第2版）（上）

俞正光 鲁自群 林润亮 编著

清华大学出版社

清华大学公共基础平台课教材

线性代数与几何

（第2版）（上）

俞正光 鲁自群 林润亮 编著

清华大学出版社

内 容 简 介

本书的核心内容包括矩阵理论以及线性空间理论，分上、下两册出版，对应于两个学期的教学内容. 上册系统地介绍线性代数与空间解析几何的基本理论和方法，具体包括行列式、矩阵、几何空间中的向量、向量空间 F^n、线性空间、线性变换、二次型与二次曲面共 7 章内容. 本书将空间解析几何与线性代数密切地联系在一起，层次清晰，论证严谨，例题典型丰富，习题精练适中.

本书可作为高等院校理、工、经管等专业的教材及教学参考书，也可供自学读者及有关科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与几何. 上/俞正光，鲁自群，林润亮编著. --2 版. --北京：清华大学出版社，2014
清华大学公共基础平台课教材
ISBN 978-7-302-36844-1

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①俞…　②鲁…　③林…　Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材　②解析几何—高等学校—教材　Ⅳ. ①O151.2　②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 127812 号

责任编辑：刘　颖
封面设计：常雪影
责任校对：赵丽敏
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
　　社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：三河市君旺印务有限公司
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　印　张：19.25　　字　　数：418 千字
版　　次：2008 年 8 月第 1 版　　2014 年 8 月第 2 版　　印　　次：2014 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：35.00 元

产品编号：060600-01

第2版前言

清华大学数学科学系“线性代数”教学团队在近几年教学实践的基础上，根据教师的教学经验及在教学中遇到的问题、提出的意见和建议，对第1版中的部分内容作了调整，重新改写了部分章节.

调整的内容主要体现在以下方面. 在第1版中，数域概念安排在第5章引进抽象的线性空间时才提出，之前的讨论涉及数的概念时，总是默认为大家熟悉的实数域或复数域. 其实，这些概念在一般数域上也是成立的. 这次，我们将数域概念作为预备知识放到最前面，使得讨论的问题不仅仅局限于实数域或复数域. 在第1版中，一般矩阵的相似对角化内容安排在下册，考虑到部分专业的学生只选修一个学期的课程，为了保持教学内容的完整性，现将这部分内容从下册调整到上册. 另外，作为代数中的一些非常基本的概念，如集合、映射、关系等(有的在中学已经学过)，在第1版中它们是分散在各章中陆续地引入的. 这次，我们将这些内容作为附录较系统地集中介绍，供师生参考使用. 改写的内容主要是矩阵的秩以及子空间的直和分解这两部分. 希望这次改编的教材能更加适合教学.

感谢清华大学数学科学系“线性代数”教学团队老师们的支持和帮助，欢迎广大读者批评指正.

作　者

2014年4月

前　言

线性代数是学习自然科学、工程和社会科学的一门重要的基础理论课程，作为高等学校基础课，除了作为各门学科的重要工具以外，还在提高人才的全面素质中起着重要的作用.它在培育理性思维和审美功能方面的作用也应得到充分的重视.研究型学习重在思想方法的培养，理性思维能力是当前学生较为薄弱的方面，代数学中较为抽象的数学结构和形式推理为培养学生的抽象思维能力、符号运算能力、空间想象能力和逻辑推理能力等有着其他课程难以替代的重要作用.同时也为学生了解现代数学的思维方式提供了一个窗口.通过本书的学习，希望在以下三个方面能发挥其应有的作用：能够全面系统地掌握线性代数与几何的基本知识；能够深刻领会处理代数问题的思想方法；能够培养和提高抽象思维能力、逻辑推理能力、计算能力.为了实现这些目的，不仅要突出重点，抓住关键，解决好难点，而且要善于透过知识的表面，深入揭示代数的本质思想方法.本书涵盖了线性代数和解析几何、射影几何等基础内容.在内容安排上，注重突出科学性，简单扼要，循序渐进，不过分强调技巧的训练.代数学与分析、几何学共同构建了近代数学的核心，更是当今数学中最富有活力的学科之一.线性代数是代数学的基础，它在理科、工科，甚至在经济和社会科学各个领域都有广泛的应用.特别是由于信息科学与技术的快速发展，离散数学的基础训练在各专业学生的数学能力和科学素质的培养中的地位日益突出.解析几何是几何中极其基础的部分，一方面可用代数对其进行理论归纳，同时又是代数理论发展的重要背景.代数与几何相互渗透，代数为研究几何问题提供了有效的方法，几何为抽象的代数结构和方法提供了形象的几何模型和背景，这样就使学习者更好地领略到抽象的作用及其美.本教材加强了几何内容，如在上册中增加了仿射坐标系的内容，在下册中增加了射影几何这个初等模型，目的是加深读者对“形”的认识，有利于培养读者的形象思维及理性思维的习惯.

本书的核心内容包括矩阵理论以及线性空间理论.这些概念和理论不仅为各个专业领域提出相关问题时提供了准确的数学表达语言，而且也为解决问题提供了有力的工具.本书分上、下两册出版，对应于两个学期的教学内容.上册共有 7 章.第 1 章在中学的二、三阶行列式的基础上引入 n 阶行列式的概念，并通过例子介绍利用行列式的性质计算行列式的基本方法.矩阵在线性代数中的地位很特殊，一方面矩阵本身有许多理论问题可以研究；另一方面它又是研究其他对象的一种重要的工具.更为重要的是，矩阵论在许多工科领域应用很广泛.而且，许多线性代数问题都可以化成矩阵问题来研究解决.这充分说明了矩阵学习的

重要性.在第 2 章介绍矩阵的代数运算、矩阵的初等变换和相抵标准形,以及矩阵分块的技巧,为以后进一步学习线性代数打好基础.第 3 章介绍几何空间中的向量代数,引入仿射坐标系和直角坐标系,运用代数工具讨论有关平面和直线等几何问题.第 4 章引入 n 维向量的概念,重点讨论了向量组的线性相关和线性无关的概念和性质,这不仅是学习线性空间理论的基础,而且是训练学生抽象思维能力和逻辑推理能力的关键部分.这一章还引入了矩阵的秩这个重要的参数.线性方程组是线性代数的一个极其重要的内容.通过线性方程组的研究,不仅可以得到很有用的结论,而且能体现代数研究问题、解决问题的思想方法.有关线性方程组理论的研究及应用始终贯穿课程的始末,在这里,通过解空间结构的研究以及它和矩阵的秩之间的关系,给出了有关线性方程组解的结构的完整理论.线性空间与线性变换是线性代数的核心内容.由于线性空间内容比较抽象,本书采用从特殊到一般、从具体到抽象,循序渐进的方法.从第 3 章的三维几何空间,到第 4 章的 n 维向量空间,最后在第 5 章引入抽象的线性空间概念,着重研究了线性子空间的性质.并在实数域的线性空间上引入度量概念,建立了欧几里得空间.为了进一步深刻揭示线性空间的向量之间的内在联系,在第 6 章重点研究线性变换的性质及其与矩阵之间的联系.线性代数中,各种类型的变换随处可见,线性变换是其中最重要的一种变换.在线性变换的研究和讨论中,几何的思想和矩阵理论的运用都得到了充分的体现,最能体现线性代数研究问题和解决问题的思想方法.这一章还讨论了科学技术中非常有用的特征值问题并由此引入矩阵相似的概念.几何与代数的联系,除了在三维空间平面和直线的研究之外,更深入的就是二次型一般理论的研究对于二次曲面分类的应用.第 7 章介绍二次齐次函数即二次型的化简和实二次型的正定性,由于三元二次齐次函数的几何背景是二次曲面,通过主轴化方法将一般二次曲面方程化为直角坐标系下的标准方程,从而对二次曲面实现分类.下册共有 5 章,分别讨论一元多项式的理论,矩阵的相似标准形,酉空间,矩阵分析和射影几何等.

本书是在清华大学出版的《线性代数与解析几何》、《理工科代数基础》两书的基础上,总结了清华大学近十年教学实践,经过对课程进行整合,改编而成.由林润亮编写第 1,2 章,鲁自群编写第 3,4 章,俞正光编写第 5,6,7 章.本书编写得到清华大学数学科学系李津教授,张贺春教授,朱彬教授,邢文训教授和李铁成教授等的支持和帮助,清华大学出版社的刘颖博士为本书出版做了大量细致的工作,在此一并表示感谢.

由于水平有限,不妥之处实属难免,敬请读者批评指正.

本书可供理、工、经济管理各专业学生作为学习线性代数的教科书或教学参考书.也可供科技人员和自学者参考.

作　者

2008 年 6 月

目　录

预备知识

数域

线性代数所研究的问题,都与一个事先规定的数集有关,同一个问题对不同的数集,其结果常常是不同的.这一点,大家在中学数学中已经有所了解.例如,二次方程 $x^2+1=0$,在复数集上有解,但在实数集上就没有解.再如在整数集上,4 除以 3 是没有意义的,但是在有理数集上,任何两个整数,只要除数不为零,除法总是可以做的,等等.因此,在开始学习线性代数之前,先来讨论一下数域这个最基本的概念.

我们熟悉的数集,如全体有理数的集合$\mathbb{Q}$,全体实数的集合$\mathbb{R}$及全体复数的集合$\mathbb{C}$,它们都含有无穷多个非零元,而且对加、减、乘、除运算都具有一个共同的特征,即对集合中任意两个数,作加、减、乘或除运算(除数不能为零)时,其结果仍属于这个集合,这个性质也称为对加、减、乘、除运算封闭.具有这样性质的数集对问题的研究是重要的,而且具有这样性质的数集远不止这三个,为此,引入一般的数域概念.

定义 设 F 为复数集$\mathbb{C}$的一个子集.若 F 满足:

(1) F 中至少含有一个不等于零的数;

(2) 对 $\forall a,b\in F$,$a+b,a-b,ab\in F$,并且,当 $b\neq 0$ 时,$\frac{a}{b}\in F$.

则称 F 为一个**数域**(number field).

显然,有理数集$\mathbb{Q}$,实数集$\mathbb{R}$,复数集$\mathbb{C}$都是数域,它们分别称为**有理数域**、**实数域**和**复数域**.数域不只有这三个,而且有无穷多个.我们举一个例子.

例 令 $F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$,证明 F 是一个数域,通常将此数域记作$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

证 显然 $0,1\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$,故满足定义的条件(1).$\forall a+b\sqrt{2},c+d\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$,则

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

这是因为 $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$,而$\mathbb{Q}$为数域,故 $a\pm c,b\pm d\in\mathbb{Q}$.又$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2}$,因为 $ac+2bd,bc+ad\in\mathbb{Q}$,故$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

再设 $c+d\sqrt{2}\neq 0$，则有 $c-d\sqrt{2}\neq 0$. 这是因为若 $c-d\sqrt{2}=0$，则在 $d=0$ 时推出 $c=0$，即 $c+d\sqrt{2}=0$，矛盾. 当 $d\neq 0$ 时，推出 $\frac{c}{d}=\sqrt{2}$，由 $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$，推出 $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. 矛盾. 因而

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

综上所述，即知 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 为一个数域. ■

最后，给出数域的一个重要性质.

定理 所有的数域都包含有理数域 $\mathbb{Q}$.

证 设 F 为一数域. 由定义中的条件(1)，即 $\exists\, a\in F$ 且 $a\neq 0$，再由定义中的条件(2)，有 $\frac{a}{a}=1\in F$，接下来，有 $a-a=0\in F$. 用 1 与它自己重复相加，可得 $\mathbb{N}\subseteq F$. 再由 F 对减法的封闭性可知，对 $\forall\, b\in\mathbb{N}$ 均有 $0-b=-b\in F$. 故 F 又含有全体整数，即 $\mathbb{Z}\subseteq F$. 由于任一有理数都可以表示成两个整数的商(分母不为 0)，故再由 F 对除法的封闭性，可知 F 必含有有理数域 $\mathbb{Q}$. ■

由此定理可知，有理数域是最小的数域. 因此，整数集 $\mathbb{Z}$，自然数集 $\mathbb{N}$ 均不是数域.

在本书中，如果没有特别说明，我们总是取一个固定的数域 F，所涉及的数都是这个数域的数.

第1章 行 列 式

行列式是一个重要的数学工具，不但在数学中有广泛的应用，而且在其他学科中也经常会碰到它.在初等代数中，为求解二元和三元线性方程组，引入了二阶和三阶行列式.本章的目的是在二阶和三阶行列式的基础上，进一步建立 n 阶行列式的理论，并且讨论 n 阶行列式对求解 n 元线性方程组的应用.

1.1 n 阶行列式的定义

在本节中，我们将先对二阶和三阶行列式的定义以及如何利用它们求解二元和三元线性方程组，作一简单的回顾，然后介绍排列的概念及其基本性质，最后给出 n 阶行列式的定义.

1.1.1 二阶行列式与三阶行列式

对二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=d_1, \\ a_2x+b_2y=d_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

进行消元，可得

$$(a_1b_2-b_1a_2)x=d_1b_2-b_1d_2,\quad (a_1b_2-b_1a_2)y=a_1d_2-d_1a_2.$$

若 $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$，则线性方程组(1.1)有唯一解

$$\begin{cases} x=\dfrac{d_1b_2-b_1d_2}{a_1b_2-b_1a_2}, \\ y=\dfrac{a_1d_2-d_1a_2}{a_1b_2-b_1a_2}. \end{cases} \tag{1.2}$$

为了便于记忆这些解的公式，我们引入**二阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

其中 a_{ij} 叫做行列式的**元素**，用两个下标表示该元素的位置，第一个下标 i 叫行指标，表示该元素位于第 i 行，第二个下标 j 叫列指标，表示位于第 j 列. 利用二阶行列式，(1.2)式可表示为

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

其中分母是由线性方程组(1.1)的系数按原来位置排列成的行列式，称为线性方程组(1.1)的**系数行列式**. 于是可以把线性方程组(1.1)的解法总结为：若线性方程组(1.1)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.4}$$

则线性方程组(1.1)有唯一解 $x=\frac{D_1}{D}, y=\frac{D_2}{D}$，其中

$$D_1=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix},$$

它们是将系数行列式(1.4)中的第 1 列和第 2 列分别换成线性方程组(1.1)中的常数项 d_1，d_2 所得到的行列式.

例 1.1 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 5x-7y=29. \end{cases}$$

解 由于系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}=-31\neq 0,$$

所以此线性方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 29 & -7 \end{vmatrix}=-93, \quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 29 \end{vmatrix}=62,$$

故线性方程组的解为

$$\begin{cases} x=\frac{D_1}{D}=\frac{-93}{-31}=3, \\ y=\frac{D_2}{D}=\frac{62}{-31}=-2. \end{cases}$$

■

为了得出关于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

的类似解法,我们引入**三阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.6}$$

这是一个包括六项的代数和,每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积,其中前三项前面带正号,后三项前面带负号.

通过类似于对线性方程组(1.1)所做的讨论,可以得到线性方程组(1.5)的下述解法.若线性方程组(1.5)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.7}$$

则线性方程组(1.5)有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D}, \quad y=\frac{D_2}{D}, \quad z=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

它们是将系数行列式(1.7)中第 1,2,3 列分别换成线性方程组(1.5)中的常数项所得到的行列式.

例 1.2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$$

解 由于线性方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1) \\ +1\times2\times1-1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times(-3)\times1 \\ =-5\neq0,$$

所以此线性方程组有唯一解.经计算可得

$$D_1=\begin{vmatrix}-2&-2&1\\1&1&-3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\-1&0&-1\end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\2&1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-5.$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$ ■

从上面的例子可以看出，对于未知量个数与方程个数相等的线性方程组(1.1)和线性方程组(1.5)，如果它们的系数行列式不等于0，用行列式求解是方便的.

在实际应用中，遇到的线性方程组所包含的未知量常常多于三个，而且在某些理论研究中往往需要考虑 n 个未知量的线性方程组的求解问题，我们自然希望能把上面二元和三元线性方程组的解法推广到包含 n 个未知量 n 个方程的线性方程组. 为此首先要把二阶和三阶行列式加以推广，引入 n 阶行列式的概念.

1.1.2 排列

n 阶行列式的定义和研究，需要用到排列的某些事实. 作为预备知识，本小节介绍排列的概念及其基本性质.

把 n 个不同的元素按一定顺序排成一行，叫做这 n 个元素的一个**排列**. 为了方便起见，用 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 代表 n 个不同的元素来讨论有关排列的性质.

定义 1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 **n 阶排列**(permutation). 通常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示 n 阶排列.

如 2341 是一个四阶排列，25134 是一个五阶排列. n 阶排列共有 $n!$ 个. $12\cdots n$ 是一个 n 阶排列，它具有自然顺序，称为**自然排列**，在这个排列中的任何两个数，小的数总排在大的数的前面.

定义 1.2 一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列的逆序总数称为这个排列的**逆序数**. 以后用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为**偶排列**，否则称为**奇排列**.

例 1.3 在四阶排列 2341 中，共有逆序 21,31,41，即 $\tau(2341)=3$，所以 2341 是奇排列.

在五阶排列 25134 中，共有逆序 21,51,53,54，即 $\tau(25134)=4$，所以 25134 是偶排列. ■

例 1.4 自然排列 $12\cdots n$ 的逆序数 $\tau(12\cdots n)=0$，所以 $12\cdots n$ 是偶排列，而 n 阶排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数