华章数学译丛

HZ BOOKS
华章教育

52

# Matrix Analysis
## (Second Edition)

# 矩阵分析
## （原书第2版）

（美）Roger A. Horn
Charles R. Johnson 著

张明尧 张凡 译

机械工业出版社
China Machine Press

华章数学译丛
52

# Matrix Analysis
(Second Edition)

# 矩阵分析
(原书第2版)

(美) Roger A. Horn
Charles R. Johnson 著
张明尧 张凡 译

机械工业出版社
China Machine Press

**图书在版编目（CIP）数据**

矩阵分析（原书第 2 版）/（美）霍恩（Horn, R. A.），（美）约翰逊（Johnson, C. R.）著；张明尧，张凡译．—北京：机械工业出版社，2014.9
（华章数学译丛）
书名原文：Matrix Analysis, Second Edition

ISBN 978-7-111-47754-9

I. 矩… II. ①霍… ②约… ③张… ④张… III. 矩阵分析－研究生－教材 IV. O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 195855 号

本书版权登记号：图字：01-2014-0328

This is a simplified Chinese of the following title published by Cambridge University Press:

Roger A. Horn and Charles R. Johnson: Matrix Analysis, Second Edition (ISBN 978-0-521-54823-6).

© Roger A. Horn and Charles R. Johnson 1985, 2013

This **simplified Chinese** for the People's Republic of China (excluding Hong Kong, Macau and Taiwan) is published by arrangement with the Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom.

© Cambridge University Press and China Machine Press in 2014

This **simplified Chinese** is authorized for sale in the People's Republic of China (excluding Hong Kong, Macau and Taiwan) only. Unauthorized export of this **simplified Chinese** is a violation of the Copyright Act. No part of this publication may be reproduced or distributed by any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of Cambridge University Press and China Machine Press.

本书原版由剑桥大学出版社出版．

本书简体字中文版由剑桥大学出版社与机械工业出版社合作出版．未经出版者预先书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分．

此版本仅限在中华人民共和国境内（不包括香港、澳门特别行政区及台湾地区）销售．

本书从数学分析的角度阐述了矩阵分析的经典和现代方法，主要内容有特征值、特征向量、范数、相似性、酉相似、三角分解、极分解、正定矩阵、非负矩阵等．新版全面修订和更新，增加了奇异值、CS 分解和 Weyr 标准范数等相关的小节，扩展了与逆矩阵和矩阵块相关的内容，对基础线性代数和矩阵理论作了全面总结，有 1100 多个问题，并给出一些问题的提示，还有很详细的索引．

本可作为工程硕士以及数学、统计、物理等专业研究生的教材，对从事线性代数纯理论研究和应用研究的人员来说，本书也是一本必备的参考书．

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码：100037）
责任编辑：明永玲　　责任校对：殷　虹
印　　刷：北京市荣盛彩色印刷有限公司　　版　　次：2014 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
开　　本：186mm × 240mm　1/16　　印　　张：35.5
书　　号：ISBN 978-7-111-47754-9　　定　　价：119.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
客服热线：（010）88378991　88361066　　投稿热线：（010）88379604
购书热线：（010）68326294　88379649　68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

**版权所有・侵权必究**
封底无防伪标均为盗版
本书法律顾问：北京大成律师事务所　韩光／邹晓东

# 译 者 序

Roger A. Horn 和 Charles R. Johnson 是线性代数和矩阵理论领域的国际著名专家，两位所著的《Matrix Analysis》一书最初于 1985 年出版，这次出版的《矩阵分析(原书第 2 版)》是该书英文第 2 版的中文译本.

本书的第 1 版共有 9 章和 5 个附录，而第 2 版有 9 章和 6 个附录. 单从章节和附录的目录名称来看，它们几乎没有太大的变化. 但是实际上本书的第 2 版与第 1 版相比有巨大的改变. 关于所有这些改变(包含更加丰富的新内容、新方法、新结果以及新的习题)，作者在第 2 版前言中作了极其详尽的说明，这里译者仅提及一件事：1991 年，两位作者曾经在同一出版社出版了有关矩阵分析的另一部著作——《Topics in Matrix Analysis》，作为其英文第 1 版的一个补充，现在的第 2 版里也包含了该书的许多内容.

在翻译本书的过程中，译者发现了书中有一些错误，其中绝大多数都是印刷排版方面的错误. 我们曾试图与原作者联系，希望他们能对发现的错误予以确认. 为此出版社也作了相应的努力，但迄今为止我们所有的努力都未能获得成功. 鉴于此，本书中文版只能根据我们的认识和理解将我们发现的所有错误一一做了更正(如果有心的读者对照中英文版本，当不难发现我们的修改之处)，这些修改如有谬误之处，盖由译者负责.

对于本书责任编辑明永玲女士为出版和编辑本书所付出的巨大努力以及合作和敬业精神，谨此表示衷心的感谢！此前，我们与她已经愉快地合作过多次，因而是相互非常信任的老朋友了. 但愿这部中文版能对数学专业以及其他专业的学生与教师都有良好的助益.

张明尧　张　凡

2014 年 3 月 27 日

# 第 2 版前言

第 2 版里保留了第 1 版的基本结构，因为它与我们的如下目标仍然一致：我们的目的是撰写“一部书，用有用的现代方法处理范围广泛的论题……它可以用作本科生或者研究生的教材，也可用作各类读者的自学参考书.”引号中的话取自第 1 版前言，该书当初所宣告的写作目的现在依然没有改变.

那么本书第 2 版有何不同之处呢？

标准型的核心作用在第 2 版将得以扩充，成为理解相似性(复的、实的以及同时相似)、酉等价、酉相似、相合、* 相合、酉相合、三角等价以及其他等价关系的统一性元素. 对于本书考虑的许多不等式中等式出现的情形，也给予了更多的关注. 在新版的阐述中处处都有分块矩阵出现.

学习数学从来都不像观看比赛那样被动地接受，所以在新版里继续强调了习题和问题对于积极主动型读者所具有的价值. 本书自始至终都用大量 $2\times 2$ 矩阵的例子来阐释概念. 问题的线索(有一些问题跨越了几章的内容)发展成为特别的论题，成为正文中内容演化的基础. 例如，有一些关于转置伴随矩阵、复合矩阵、有限维量子系统、Loewner 椭球与 Loewner-John 矩阵以及可正规化矩阵的线索，见关于这些线索的参考文献的页面索引. 第 1 版大约有 690 个问题，而第 2 版则有 1100 多个. 许多问题带有提示，这些提示可以在恰好位于索引前面出现的附属材料中找到.

对一本书来说，一份详尽全面的索引是很重要的，这样在书起初作为教材用过之后，它还可以被用作参考资料. 第 1 版的索引大约有 1200 个条目，而新版本的索引条目则超过 3500 个. 在正文中遇到一个不熟悉的术语应该查询索引，在那里很可能会找到一个指向定义的指示(在第 0 章或者其他某个地方).

自 1985 年以来获得的新发现已经形成许多论题的现在的表述形式，它们还持续地刺激新的内容的加入. 几个代表性的例子是：秩 1 摄动的 Jordan 标准型，它是由于受到学生对于 Google 矩阵的兴趣启发而产生的；实正规矩阵的推广(使得 $A\overline{A}$ 是实矩阵的正规矩阵 $A$)；关于同时酉相似或者同时酉相合的可计算的分块矩阵判别法；G. Belitskii 发现的结论，即矩阵与 Weyr 标准型可交换，当且仅当它是分块上三角的，且有一种特殊的构造；由 K. C. O'Meara 和 C. Vinsonhaler 发现的，即与 Jordan 标准型对应的情形不同，交换族可以通过相似这样一种方式来实现同时上三角化，使得这个族中任何一个指定的矩阵都在 Weyr 标准型中；关于相合与 * 相合的标准型.

来自许多读者的疑问促使我们对于某些论题的表达方式做出改变. 例如，Lidskii 的特征值优化不等式的讨论由原本专门讲述奇异值不等式的那一节转移到了讨论优化的这一节. 幸运的是，Lidskii 不等式现在有了由 C. K. Li 和 R. Mathias 给出的一个极为美妙的新证明，它与第 4 章的新方法完美地密切配合，给出关于 Hermite 矩阵的特征值不等式. 第

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

二个例子是 Birkhoff 定理的一个新的证明，它与第 1 版中给出的证明有完全不同的味道.

那些习惯于第 1 版中的论题排列次序的教师可能会对以下逐章简短介绍新版中不同之处的评述感兴趣.

第 0 章大约增加了 75％的内容，其中包含了有用的概念以及结果的更为广泛的总结，目的是作为方便的参考资料. 在整本书中用到的术语以及记号的定义都可在其中找到，但这一章里没有习题或者问题. 正式的课程或者自学阅读通常从第 1 章开始.

第 1 章包含与相似以及特征多项式有关的新的例子，还进一步强调了左特征向量在矩阵分析中的作用.

第 2 章包含了有关实正交相似的一个详尽的阐述，对有关同时三角化的 McCoy 定理的一个说明，以及对特征值的连续性的一个严格的处理，它在本质上用到了 Schur 酉三角化定理的酉的以及三角的这两个方面. 2.4 节(Schur 三角化定理的推论)的篇幅几乎是第 1 版中对应章节篇幅的 2 倍. 有两节是新增加的，一节讨论奇异值分解，而另一节讨论 *CS* 分解. 较早引入奇异值分解允许我们将矩阵分析的这个基本工具应用到本书其余部分.

第 3 章通过 Weyr 特征来处理 Jordan 标准型；它包含对于 Weyr 标准型及其酉不变量的一个说明，这些材料都不曾在第 1 版中出现. 3.2 节(Jordan 标准型的推论)讨论了许多新的应用；它包含的材料要比第 1 版中对应的那一节多出 60％的内容.

第 4 章对变分原理和关于 Hermite 矩阵的特征值不等式现在有一个用子空间的交给出的现代表述. 对于与交错性以及其他经典结果有关的反问题，这一章里对它们的处理增加了很大的篇幅. 它对酉相合的详细处理既包括了 Youla 定理(复方阵 $A$ 在与 $A\overline{A}$的特征构造相伴的酉相合下的正规型)，也包括了关于共轭正规矩阵、相合正规矩阵以及平方正规矩阵的标准型. 它还给出了新近发现的关于相合与* 相合的标准型以及构造共轭特征空间的基的一种新算法的介绍.

第 5 章展开讨论了范数对偶，还包含许多新的问题以及对于半内积的处理，而半内积对讨论第 7 章中的有限维量子系统有应用价值.

第 6 章对 Geršgorin 定理“不相交的圆盘”这一部分有一个新的处理方式，重新组织了对特征值摄动的讨论，包括单重特征值的可微性.

第 7 章现在进行了重新组织：将奇异值分解放在第 2 章介绍. 对极分解有一个新的处理方式，给出了一些与奇异值分解相关的新的分解，并特别强调了行与列的包容性. Von Newmann 迹定理(通过 Birkhoff 定理证明的)现在成了奇异值分解的许多应用赖以存在的基础. 如同关于正定矩阵的经典的行列式不等式那样，对 Loewner 偏序以及分块矩阵用新的技术详细进行了研究.

第 8 章用到第 1 章里介绍的有关左特征向量的结果，从而使得对于正的以及非负矩阵的 Perron-Frobenius 理论的阐述更为精简高效.

附录 D 包含了多项式零点以及矩阵特征值的新的用显式表达的摄动界限.

附录 F 用现代的表格形式列出了一对 Hermite 矩阵或者其中一个为对称矩阵另一个为斜对称矩阵这样一对矩阵的标准型. 这些标准对是第 4 章里给出的相合以及* 相合标准型

的应用.

对于书籍制作的技术感到好奇的读者，有可能也会对这本书是怎样由印度的一家公司从第 1 版的实体书通过手工造出一组 LaTeX 文件的制作过程感兴趣. 那些文件利用了 Scientific WorkPlace® 图形用户界面以及排版系统加以编辑修改.

第 2 版的封面艺术设计来自 2003 年春天从盐湖城乘达美航空公司的航班飞往洛杉矶途中的一次幸运邂逅. 坐在中间座位上的一位年轻人说他是画抽象画的艺术家，他的画作的灵感有时候来自于数学. 在友好交谈的过程中，他显露出他特别欣赏的数学领域是线性代数，而且他还曾经学过**矩阵分析**. 在我们相互对这次会面的机缘表示惊叹且进行了一次愉快的讨论之后，我们认同合适的封面艺术设计会提高第 2 版的视觉吸引力；他说他愿意寄一些东西供我参考. 在约定的期间从西雅图寄来一个包裹. 里面有一封信以及一张令人喜之不胜的 4.5 英寸×5 英寸的照片，背面显示它是 2002 年绘于画布上的一幅 72 英寸×66 英寸油画的图片. 那封信上说："这幅画的标题是 *Surprised Again on the Diagonal*，它的灵感来自于数学(无论是几何、分析、代数、集合论还是逻辑)中对角线的反复盛行. 我认为它会给你的优秀著作增添吸引力."Lun-Yi Tsai，为了你杰出的封面设计，谢谢你!

自从本书的第 1 版于 1985 年问世以来，大量的学生、教师以及同行都对推进这部书新版的形成有所贡献. 这里要特别对以下各位表示谢意：T. Ando，Wayne Barrett，Ignat Domanov，Jim Fill，Carlos Martins da Fonseca，Tatiana Gerasimova，Geoffrey Goodson，Robert Guralnick，Thomas Hawkins，Eugene Herman，Khakim Ikramov，Ilse Ipsen，Dennis C. Jespersen，Hideki Kosaki，Zhongshan Li，Teck C. Lim，Ross A. Lippert，Roy Mathias，Dennis Merino，Arnold Neumaier，Kevin O'Meara，Peter Rosenthal，Vladimir Sergeichuk，Wasin So，Hugo Woerdeman 以及 Fuzhen Zhang.

R. A. H.

# 第 1 版前言

线性代数以及矩阵理论长期以来既是数学各个分支的基本工具，也有理由自身成为研究的肥沃土壤. 在这部书中，以及在与之相伴的另一卷书《Topics in Matrix Analysis》中，我们要讲述矩阵分析的那些已被证明对应用数学极为重要的经典结论以及新近发现的结果. 本书可以用作本科生或者研究生的教材，也可用作各类读者的自学参考书. 我们要求读者掌握相当于一学期的初等线性代数课程以及有关基本分析概念的知识. 我们的讲述从特征值以及特征向量开始，不要求事先了解这些概念.

超出初等线性代数课程范围的有关矩阵的知识对于从实质上理解数学科学的任一领域(无论是微分方程、概率统计、最优化，还是在理论和应用经济学、工程学以及运筹学中的应用，等等)都是必需的. 但直到最近，还有众多必要的材料仅散见于(甚至根本就没有出现在)本科生以及研究生的教学计划中. 鉴于人们对应用数学的兴趣日益高涨，有更多的课程专门研究高等矩阵论，正如同需要有关这一题材的现代参考资料一样，显而易见也需要一部教材以提供广泛选择的论题.

关于矩阵论已经有几部备受喜爱的经典著作，但它们不太适合一般的课堂使用，也不适合用于系统地自学. 这些书缺少问题，不注重应用，没有激发读者的学习动力；索引不完善，一些传统参考资料的读者用过时的陈旧方法会遇到困难. 更为现代的书籍倾向于要么是初等的教材，要么是讨论特殊专题的专著. 我们的目的是撰写一部书，用有用的现代方法处理范围广泛的论题.

“矩阵分析”的一种观点是：矩阵分析的**论题**由线性代数中那些因为数学分析(如多元微积分、复变量、微分方程、最优化以及逼近论)的需要而产生的内容组成. 另一种观点是：矩阵分析是解决实的与复的线性代数问题的一种**途径**，它会毫不犹豫地采用分析中的概念(如极限、连续以及幂级数)，只要这些概念看起来比纯粹的代数方法更有效且更自然. 矩阵分析的这两种观点在本书论题的选择以及处理方法上都有所体现. 我们更倾向于用**线性代数的矩阵分析**这样的术语来作为这个领域中广泛的范围以及研究方法的确切表达.

为了复习以及方便查阅，在第 0 章介绍了初等线性代数的必备知识以及其他一些虽然未必初等但却是有用的结果. 第 1～3 章主要介绍可能包含在线性代数或者矩阵论的第二课程中的核心内容：特征值、特征向量和相似性的基本处理；酉相似、Schur 三角化及其含义，正规矩阵；标准型与分解，包括 Jordan 型、$LU$ 分解、$QR$ 分解以及友矩阵. 除此之外，每章都相当独立地做了展开，而且对主要的论题都做了有某种深度的处理.

1. **Hermite 矩阵与复对称矩阵**(第 4 章). 我们重点介绍研究 Hermite 矩阵的特征值的变分方法，包括优化概念的简要介绍.

2. **向量与矩阵上的范数**(第 5 章). 它们对于数值线性代数算法的误差分析以及矩阵幂

级数与迭代过程的研究来说都是很重要的. 我们在一定程度上详细讨论了范数的代数、几何以及解析性质，并对依赖于矩阵范数的次积性公理的矩阵的范数结果以及与矩阵范数的次积性公理无关的矩阵的范数结果做了仔细的区分.

3. **特征值位置以及摄动的结果**(第 6 章). 这是对于一般性的(不一定是 Hermite)矩阵来讨论的，并且在许多应用中都是重要的. 我们对于 Geršgorin 区域的理论、它的某些现代改进以及相关的图论概念做了详细的介绍.

4. **正定矩阵**(第 7 章)以及它们的应用，包括不等式，都用一定的篇幅做了介绍. 极分解以及奇异值分解的讨论也包含其中，同时还讨论了在矩阵逼近问题中的应用.

5. **逐个元素非负的以及正的矩阵**(第 8 章)出现在许多应用中，在这些应用中(概率论、经济学和工程学等)必定会出现非负的量，而且它们引人注目的理论也推动了应用. 我们对于非负的、正的、本原的以及不可约的矩阵的理论展开的方式是以利用范数的初等方式进行的.

在本书的姊妹篇中，我们处理了一些同样值得关注的论题：值域和推广，惯性指数、稳定矩阵、$M$-矩阵和有关的特殊类型，矩阵方程、Kronecker 乘积和 Hadamard 乘积，将函数与矩阵联系起来的各种方法.

根据特定的读者对象选取适宜的章节，本书可作为一学期或两学期的课程的基础素材. 我们建议教师根据特定课程的需要事先对本书的章节以及章节中的部分内容做审慎的选择. 这大概会包括第 1 章、第 2 章和第 3 章的绝大部分，第 4 章和第 5 章中关于 Hermite 矩阵以及范数的内容.

大多数章节都包含一些较为专业或者非传统的内容. 例如，第 2 章不仅包括 Schur 关于单独一个矩阵酉三角化的基本定理，而且也讨论了矩阵族的同时三角化. 在关于酉等价那一节里，介绍了常见的结果之后我们还讨论了两个矩阵成为酉等价的迹条件. 第 4 章中关于复对称矩阵的讨论提供了与 Hermite 矩阵的经典理论不尽相同的补充及对照. 在每章的开始几节里给出一个论题的基本内容，而在这些章节的结尾或者在该章的后面几节中再来做更为精细的讨论. 这样的策略有一种好处：它可以按照顺序对论题加以讨论，提高了本书作为参考书的价值. 它还给教师提供了广泛选择的余地.

本书所讨论的许多结果对于定义在其他的域或者定义在某种更为广泛的代数结构上的矩阵是正确的，或者是可以推广成为正确的. 不过，我们有意限于在实数域或者复数域中讨论，在这些域中，可以利用熟知的经典分析方法以及形式代数技巧.

尽管我们一般考虑的矩阵都有复的元素，但大多数的例子仅限于实的矩阵，所以不要求掌握高深的复分析知识. 熟悉复数的算术运算对于理解矩阵分析就够用了，附录中涵盖了所必需的知识内容. 其他简要的附录则覆盖了一些次要的但仍然基本的论题，例如 Weierstrass 定理以及凸性.

我们在本书中加入了许多习题和问题，因为我们认为这些东西对于逐步理解书中的论题及其内涵是至关重要的. 习题是自始至终作为每节的内容的一部分呈现的；一般而言它们是初等的，直接用于理解概念. 我们建议读者至少动手做其中的大部分. 每一节的最后

列出了一些问题(没有特别的次序)，涉及一系列难题和典型题(从理论到计算)，它们有可能是对论题的一种拓广，展现特别的内容，或者对重要的想法提供其他可供选择的证明. 对于更为困难的问题则给出有意义的提示. 有些问题的结果可能要参考其他问题或正文本身的内容. 我们特别强调，读者要积极参与完成习题以及求解问题.

虽然本书自身并不讨论应用，但为了阐述动机，我们在每一章的开始一节会概述几个应用问题，以期引入这一章的主题.

如果读者希望查阅所论述的主题的其他处理方式以及与之相关的资料，可以参看附录后面所列出的参考文献.

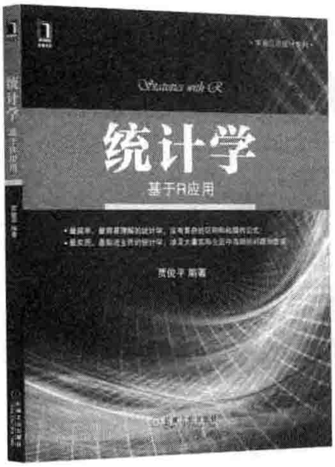
书中所列出的参考文献并非包罗万象. 在一部有多个一般论题的著作中，迫于篇幅有限的缘故，我们在正文中对引用文献的数量做了最小化处理. 仅选取了我们明显用到其结果的少量论文作为参考文献出现在绝大多数章节的末尾，并伴随一个简明扼要的讨论，但是我们并未试图对经典的结果搜集相关的历史文献. 更为广泛的图书文献资料在我们推荐参考的更为专门的著作中可以找到.

感谢我们的同事以及学生们提供有助益的建议，他们对作为本书前期脚本的课堂笔记以及初始手稿提出了修改意见. 他们当中包括 Wayne Barrett，Leroy Beasley，Bryan Cain，David Carlson，Dipa Choudhury，Risana Chowdhury，Yoo Pyo Hong，Dmitry Krass，Dale Olesky，Stephen Pierce，Leiba Rodman 以及 Pauline van den Driessche.

R. A. Horn

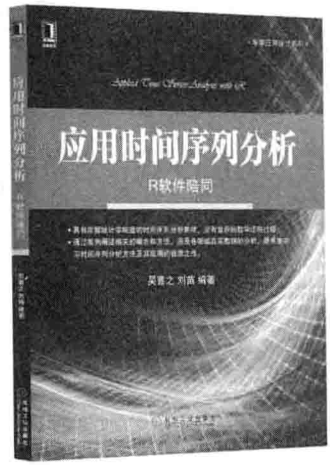
C. R. Johnson

# 推荐阅读




**统计学：基于R应用**

作者：贾俊平 ISBN：978-7-111-46651-2 定价：39.00元

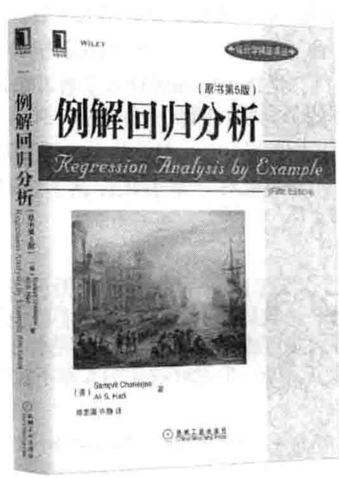



**应用时间序列分析：R软件陪同**

作者：吴喜之 刘苗 ISBN：978-7-111-46816-5 定价：39.00元


**金融数据分析导论：基于R语言**

作者：Ruey S. Tsay ISBN：978-7-111-43506-8 定价：69.00元

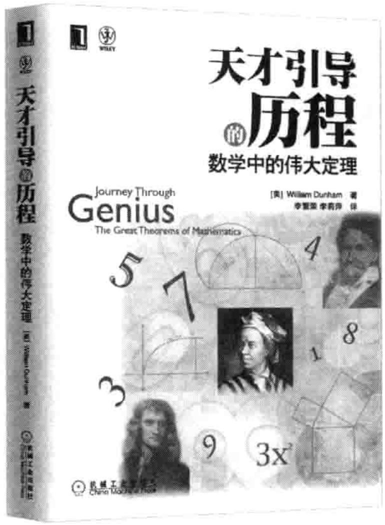



**例解回归分析（原书第5版）**

作者：Samprit Chatterjee 等 ISBN：978-7-111-43156-5 定价：69.00元

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 推荐阅读




## 天才引导的历程：数学中的伟大定理

作者：William Dunham ISBN：978-7-111-40329-6 定价：45.00元

**“Dunham的这本书如此特别，是我以前从未遇到过的……娓娓道来的一个个推理精巧与颇具洞察力的个案，引人入胜。”**

**——当代美国最著名的科普作家、科幻小说家、文学评论家Isaac Asimov**

**“把Dunham的这本书推荐给所有热爱探索、思想活跃的人们，不管他们感兴趣的是艺术还是科学，阅读本书都是一次重要的文化体验。”**

**——英国著名数学教育家暨《上帝掷骰子吗？》的作者Ian Stewart**

**“如果有一本书让你读了会对数学产生毕生爱好的话，那肯定就是Dunham的这本书。”**

**——Amazon读者评论**

**“这门几乎每个人都觉得沉闷、无聊、呆板的学科，在Dunham的笔下充满生机与活力……我是拥有计算机科学学位的外行，但是我喜欢这本书……Dunham巧妙地将数学中的伟大定理编织成数学史，使得本书容易理解，而且我敢说，事实上很有趣味性！本书是一颗珍宝，每一个爱好数学的人都不能与它失之交臂。”**

**——Amazon读者评论**

这是二十年多年来一直畅销不衰的数学大众读物！长期雄踞亚马逊数学大众读物畅销榜榜首！

本书将两千多年的数学发展历程融为十二章内容，每章都包含了三个基本组成部分，即历史背景、人物传记以及在这些“数学杰作”中所表现出的创造性。作者精心挑选了一些杰出的数学家及其所创造的伟大定理，如欧几里得、阿基米德、牛顿和欧拉。这一个个伟大的定理，不仅串起了历史的年轮，更是串起了数学这门学科所涵盖的各个深邃而不乏实用性的领域。当然，这不是一本典型的数学教材，而是一本大众读物，它会让热爱数学的人体会到绝处逢生的喜悦，让讨厌数学的人从此爱上数学。

# 目　录

# 第 0 章　综述与杂叙

## 0.0　引言

在首章我们要总结许多有用的概念和结果，其中的一些内容给本书其余部分的材料提供了基础. 这部分材料中有一些已包含在规范的线性代数的初等课程之中，不过我们还另外增加了一些有用的内容，尽管这些内容在后面的阐释中并不出现. 读者可以将这一章当作本书第 1 章中主要部分开始讲述之前的一个温习热身；其后，它还可以被用作后续章节中遇到的记号和定义的一个方便的参考资料. 我们假设读者已经熟悉线性代数的基本概念以及类似矩阵乘法和矩阵加法这样的矩阵运算的技术手段.

## 0.1　向量空间

有限维的向量空间是矩阵分析的基本架构.

### 0.1.1　纯量域

构成向量空间的基础是它的**域**(field)，或者说是纯量的集合. 就我们的目的而言，典型的基础域是实数 **R** 或者复数 **C**(见附录 A)，不过它也可以是有理数，以一个特殊的素数为模的整数，或者是某个另外的域. 当域被指定时，我们就用符号 **F** 来表示它. 为验证它是一个域，集合必须关于两个二元运算"加法"与"乘法"是封闭的. 这两个运算都必须满足结合律和交换律，且在该集合中每一运算都需有一个单位元；对于加法，每一元素在该集合中都必须有逆元存在，而对于乘法，除了加法的单位元之外，其他每一元素在该集合中也都必须有逆元存在；乘法关于加法必须是可分配的.

### 0.1.2　向量空间

域 **F** 上的一个**向量空间**(vector space)$V$ 是一组对象(称为**向量**)的集合 $V$，它关于一个满足结合律和交换律的二元运算("加法")封闭，有一个单位元(**零向量**，记为 0)并且加法 1
在该集合中有逆元. 该集合关于用纯量域 **F** 中的元素进行向量的"数乘"运算也是封闭的，且对所有 $a$，$b\in\mathbf{F}$ 以及所有 $x$，$y\in V$ 有下述性质：$a(x+y)=ax+ay$，$(a+b)x=ax+bx$，$a(bx)=(ab)x$，又对乘法单位元 $e\in\mathbf{F}$ 有 $ex=x$.

对给定的域 **F** 和给定的正整数 $n$，由 **F** 中的元素形成的 $n$ 元数组的集合 $\mathbf{F}^n$ 在 $\mathbf{F}^n$ 中逐个元素相加的加法之下构成 **F** 上的一个向量空间. 我们约定 $\mathbf{F}^n$ **中的元素总是表示成列向量**，通常称之为 $n$ **元向量**($n$-vector). 特殊的例子 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 是这本书中基本的向量空间，$\mathbf{R}^n$ 是一个实向量空间(即它是实数域上的向量空间)，而 $\mathbf{C}^n$ 既是实向量空间，又是复向量空间(即复数域上的向量空间). 实系数或者复系数(不高于一个指定次数或者任意次数的)多项式的集合以及在 **R** 或者 **C** 的子集合上的实值函数或者复值函数的集合(全都带有通常的函数加法以及数与函数的乘法的概念)也都是实的或者复的向量空间的例子.

### 0.1.3 子空间，生成子空间以及线性组合

域 $\mathbf{F}$ 上的向量空间 $V$ 的一个**子空间**(subspace)是 $V$ 的一个子集，其本身也是 $\mathbf{F}$ 上的一个向量空间，它有与 $V$ 中同样的向量加法以及数乘运算．确切地说，$V$ 的一个子集是一个子空间，当然，前提是它关于这两个运算是封闭的．例如，$\{[a,\ b,\ 0]^{\mathrm{T}}:\ a,\ b\in\mathbf{R}\}$是 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间，转置记号见(0.2.5)．子空间的交总是一个子空间，子空间的并不一定还是一个子空间．子集$\{0\}$和 $V$ 永远是 $V$ 的子空间，所以它们常被称为**平凡的子空间**(trivial subspace)；$V$ 的一个子空间称为**非平凡的**(nontrivial)，如果它异于$\{0\}$和 $V$．$V$ 的一个子空间称为**真子空间**(proper subspace)，如果它不等于 $V$．我们把$\{0\}$称为**零向量空间**(zero vector space)．由于一个向量空间总是包含零向量，故而子空间不可能是空的．

如果 $S$ 是域 $\mathbf{F}$ 上向量空间 $V$ 的一个子集，则 $S$ 的生成子空间 span$S$ 是 $V$ 中所有包含 $S$ 的子空间的交．如果 $S$ 非空，那么 $\operatorname{span}S=\{a_1v_1+\cdots+a_kv_k:\ v_1,\ \cdots,\ v_k\in S,\ a_1,\ \cdots,\ a_k\in\mathbf{F},\ k=1,\ 2,\ \cdots\}$；如果 $S$ 是空集，则它包含在 $V$ 的每一个子空间中．$V$ 的每个子空间的交就是子空间$\{0\}$，故而此定义确保 $\operatorname{span}S=\{0\}$．注意，即使 $S$ 不是子空间，span$S$ 也总是一个子空间；$S$ 称为 span$V$，如果 $\operatorname{span}S=V$.

域 $\mathbf{F}$ 上向量空间 $V$ 中向量的一个**线性组合**(linear combination)是任意一个形如 $a_1v_1+\cdots+a_kv_k$ 的表达式，其中 $k$ 是正整数，$a_1,\ \cdots,\ a_k\in\mathbf{F}$，而 $v_1,\ \cdots,\ v_k\in V$．于是，$V$ 的一个非空子集 $S$ 的生成子空间就由 $S$ 中有限多个向量的所有线性组合组成．线性组合 $a_1v_1+\cdots+a_kv_k$ 是**平凡的**(trivial)，如果 $a_1=\cdots=a_k=0$；反之，它就是**非平凡的**(nontrivial)．根据定义，一个线性组合就是向量空间中**有限多个**元素的和．

设 $S_1$ 和 $S_2$ 是域 $\mathbf{F}$ 上一个向量空间的子空间．$S_1$ 与 $S_2$ 的**和**(sum)是子空间

$$S_1+S_2=\operatorname{span}\{S_1\cup S_2\}=\{x+y:x\in S_1,y\in S_2\}$$

如果 $S_1\cap S_2=\{0\}$，我们就说 $S_1$ 与 $S_2$ 的和是**直和**(direct sum)，并将它记为 $S_1\oplus S_2$；每
2 一个 $z\in S_1\oplus S_2$ 都可以用唯一一种方式表示成 $z=x+y$，其中 $x\in S_1$，而 $y\in S_2$.

### 0.1.4 线性相关与线性无关

我们称域 $\mathbf{F}$ 上向量空间 $V$ 中有限多个向量 $v_1,\ \cdots,\ v_k$ 是**线性相关的**(linearly dependent)，当且仅当存在不全为零的纯量 $a_1,\ \cdots,\ a_k\in\mathbf{F}$，使得 $a_1v_1+\cdots+a_kv_k=0$．于是，一组向量 $v_1,\ \cdots,\ v_k$ 是线性相关的，当且仅当 $v_1,\ \cdots,\ v_k$ 的某个非平凡的线性组合是零向量．通常更为方便的是说“$v_1,\ \cdots,\ v_k$ 是线性相关的”，而不用更为正式的说法“一组向量 $v_1,\ \cdots,\ v_k$ 是线性相关的”．称向量组 $v_1,\ \cdots,\ v_k$ 的**长度**(length)为 $k$．有两个或者更多个向量的向量组是线性相关的，如果这些向量中有一个是其余向量中某一些的线性组合．特别地，至少含有两个向量且有两个向量相等的向量组是线性相关的．两个向量是线性相关的，当且仅当其中一个是另一个的纯量倍数．仅由零向量组成的一组向量是线性相关的，因为对 $a_1=1$ 有 $a_10=0$.

域 $\mathbf{F}$ 上的向量空间 $V$ 中的有限多个向量 $v_1,\ \cdots,\ v_k$ 的向量组是**线性无关的**(linearly independent)，如果它不是线性相关的．再次可以方便地说成“$v_1,\ \cdots,\ v_k$ 是线性无关的”，而不说“一组向量 $v_1,\ \cdots,\ v_k$ 是线性无关的”.

有时会遇到一组自然状态的向量，它们有无穷多个元素，例如，所有实系数多项式组成的向量空间中的单项式 1，$t$，$t^2$，$t^3$，…，以及以$[0, 2\pi]$为周期的复值连续函数组成的向量空间中的复指数 1，$e^{it}$，$e^{2it}$，$e^{3it}$，….

如果在一个向量组(有限或者无限的)中去掉某些向量，则得到的向量组是原来向量组的一个**子向量组**(sublist). 一个有无穷多个向量的向量组称为是线性相关的，如果它的某个有限的子向量组是线性相关的；它称为是线性无关的，如果它的任何一个有限的子向量组是线性无关的。线性无关的向量组的任意一个子向量组都是线性无关的，而具有一组线性相关的子向量组的任何一组向量都是线性相关的. 由于仅由零向量组成的向量组是线性相关的，因而包含零向量的任意一组向量都是线性相关的. 有可能一组向量是线性相关的，然而它的任意一个真子向量组都是线性无关的，见(1.4.P12). 一组空向量组不是线性相关的，故而它是线性无关的.

一个有限集合的**基数**(cardinality)是它的(必定不相同的)元素的个数. 对于向量空间 $V$ 中一组给定的向量 $v_1$，…，$v_k$，集合$\{v_1, \cdots, v_k\}$的基数小于 $k$，当且仅当该组中至少有两个向量是相同的；如果 $v_1$，…，$v_k$ 线性无关，那么集合$\{v_1, \cdots, v_k\}$的基数就是 $k$. 一组向量(有限或无限多个)的**生成子空间**(span)是该组中元素集合的生成子空间；一组向量张成 $V$，如果 $V$ 是这组向量的生成子空间.

称向量的集合 $S$ 是线性无关的，如果 $S$ 中每一组有限多个不同的向量都是线性无关的；称 $S$ 是线性相关的，如果 $S$ 中某一组有限多个不同的向量是线性相关的.

### 0.1.5 基

向量空间 $V$ 中一组以 $V$ 作为其生成子空间的线性无关的向量称为 $V$ 的一组**基**(basis). $V$ 的每一个元素都可以用唯一一种方式表示成基中向量的线性组合，而只要向基中添加或者从基中删除任何一个向量，这一结论就不再成立. $V$ 中一组线性无关的向量是 $V$ 的一组基，当且仅当任何一组包含它作为真子集的向量都不会是线性无关的. 一组生成 $V$ 的向量是 $V$ 的一组基，当且仅当它的任何一个真子集都不可能生成 $V$. 空的向量组是零向量空间的基. 3

### 0.1.6 扩充成基

向量空间 $V$ 中任何一组线性无关的向量看起来都可以用多于一种方式扩充成为 $V$ 的一组基. 向量空间可以有非有限的基，例如，无限多个单项式 1，$t$，$t^2$，$t^3$，…就是所有实系数多项式组成的实向量空间的一组基，每一个多项式都是这组基中(有限多个)元素的唯一的线性组合.

### 0.1.7 维数

如果存在一个正整数 $n$，使得向量空间 $V$ 的一组基恰好包含 $n$ 个向量，那么 $V$ 的每组基都恰好由 $n$ 个向量组成，基的这个共同的基数就是向量空间 $V$ 的**维数**(dimension)，并记为 $\dim V$. 在此情形，$V$ 是**有限维的**(finite-dimensional)，反之则 $V$ 是**无限维的**(infinite-dimensional). 对于无限维的情形，任何两组基的元素之间都有一个一一对应. 实向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的维数是 $n$. 向量空间 $\mathbf{C}^n$ 关于域 $\mathbf{C}$ 的维数是 $n$，而关于域 $\mathbf{R}$ 的维数则是 $2n$. $\mathbf{F}^n$ 中的

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com