实用工程数学

石辛民　翁　智　编著

清华大学出版社

实用工程数学

石辛民　翁　智　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书包括工程数学的几个主要部分：复变函数、特殊函数、积分变换和数理方程，遵从“少而精”的原则选材并组织、编排内容，按照工程教育注重“实用性和可操作性”的思想，尽量把基本概念和基本知识讲清、讲准、讲透，不在繁缛末节上多花力气。

全书的计算几乎都用简便易学的 MATLAB 软件进行，使读者不在烦杂的数学推导、变换和演算上花去太多时间和精力。

本书可用作高等学校非数学专业的数学教材，更适合数学学时较少的工程和物理类专业使用，也可供相关科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

实用工程数学/石辛民，翁智编著. --北京：清华大学出版社，2014
ISBN 978-7-302-37603-3

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①石… ②翁… Ⅲ. ①工程数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 186512 号

责任编辑：陈 明 赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：何 芊

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京密云胶印厂
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×230mm **印 张**：16.5 **字 数**：357 千字
版 次：2014 年 9 月第 1 版 **印 次**：2014 年 9 月第1 次印刷
印 数：1～3000
定 价：32.00 元

产品编号：059838-01

前言

FOREWORD

通常把起源和应用于物理及工程技术问题的数学方法，统称“工程数学”。它的内容相当宽泛，包括线性代数、矢量与场论、计算方法、复变函数、积分变换、数学物理方程、特殊函数、概率与统计等几乎所有的数学分支，和理科类专业设置的“数学物理方法”课程相差无几。早在20世纪，我国就出版过以“工程数学”为总冠名的许多单行本，如线性代数、复变函数、概率统计等。不过，由于那些书的年代久远，且各自独立，内容难免交叉重复，又不曾引入计算机软件，已远不能满足现在学时锐减的“少而精”教学需求。

作为一本基础性教材，本书不可能把工程数学的全部内容包揽无遗，况且有些内容早已独立开课，所以本书只能从现实情况和实际需求出发，仅包括工程数学中的几个主要基础部分：复变函数、特殊函数、积分变换和数理方程，这些都是工程数学的基础和主要内容，也是现在应用最为广泛和教学需要的几个重要部分。编写中既注意了各部分内容的相对独立性，也注意了它们间的关联性，各部分可以单独选用，方便于不同学科的需求。按照工程教育“重视实用性和可操作性”的思想，本书完全从“实用”和“需求”的角度选材和编排，并为区别于已有教材，所以取名为“实用工程数学”。

为适应计算机的应用和普及现状，书中还特别介绍和应用了现代计算机软件MATLAB。该软件功能强大、语法简单、界面友好、使用方便，加之已经极为普及，用它提供的计算、绘图、方程求解，以及特殊函数求算等功能，可使书中所有的数值计算都可以不用烦琐的手工演算。这样，既能提高教学效率，又可减轻学生负担，还有利于读者今后的学习和工作。

本书在内容选取和材料编排上，并不一味追求数学的严密性和逻辑性，尽量根据理工科专业的特点和需求，用较少篇幅讲清数学上的一些基本概念、基本定理和解决问题的基本思路及方法，力求内容深入浅出，对重点知识注重理论导出和方法运用。为了克服许多工科数学教材中“见木不见林”的缺憾，还特别注意使读者从总体上把握内容。如在数理方程部分，把微分方程和特殊函数单列一章，使之条理清楚，思路明确；在讲述数理方程主要实质内容之前，编写了介绍数理方程来源、分类和解算方法的思路等(第6章)，免得读者只会算题不知它们在其中的地位和意义，……

由于水平所限，不妥和错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者
2014年7月

(电子信箱：aushixm@126.com，wzhi@imu.edu.cn)

目录
CONTENTS

第 1 章

解析函数

复数是数学中最大的一个数域。复变函数是研究复数量之间相互依存关系的数学分支，它的主要内容就是复数域上的微积分。

本章在简要复习、总结和补充复数基本概念和运算规律的基础上，介绍复变函数及其导数、微分和解析函数的概念，并引进 MATLAB 软件在这些理论上的应用，最后给出了复变函数在一些实际问题中应用的例子。

1.1 复数与复变函数

1.1.1 复数及其代数运算

1. 复数的基本概念及几何表示

复数的概念起源于求方程的根。在二次、三次代数方程的求解过程中，经常遇到负数开平方的问题，随着数学的发展，负数开平方的重要性也日益突显。于是，就定义了虚数单位 i 或 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$，提出了与实数对应的复数概念。复数 z 的代数表示式为

$$z = x + \mathrm{i}y$$

式中的 x 和 y 均为实数，分别称为复数 z 的实部(Real)和虚部(Imaginary)，记作

$$x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z)$$

如果复数 z 的实部 $x=0$，虚部 $y\neq 0$，则复数 z 为纯虚数；反之，若 $x\neq 0$，$y=0$，则复数 z 为实数。一个复数等于零，即 $z=x+\mathrm{i}y=0$ 是指它的实部和虚部同时等于零，即 $x=y=0$。两个复数相等，必须是它们的实部和虚部分别相等。可见，复数之间是无法比较大小的，即复数是无序的。

把实部相等、而虚部绝对值相等仅差一个符号的两个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 和 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，称为

共轭复数。对于零和复数 z 的乘积，规定 $0\cdot z=z\cdot 0=0$。

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$，可以用有序的实数对(x,y)（简称序对）唯一确定。如果把复数 z 画在复平面 Z 上（图 1-1），用直角坐标系的横坐标 x 和纵坐标 y 分别表示实轴和虚轴，即 $z=x+\mathrm{i}y$，就能够建立起复平面 Z 上的全部点与全体复数间的一一对应关系。把表示复数 z 所在的复平面，常称作 Z 平面。

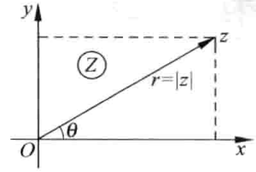

图 1-1 复平面上直角坐标系中的复数

引进复平面后就可以用几何语言和方法研究复数及其相关问题。例如，一个复数 $z\neq 0$，可以视为复平面 Z 上的一个点 z，即

$$z = x+\mathrm{i}y = r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

式中的 $x+\mathrm{i}y$ 称为复数的代数式；而把上式右端的 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，称为复数的三角式。把上式中实数 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 称为复数 z 的模，复平面中的角度 θ，称为复数 z 的辐角（或相角），记作

$$\theta = \arg z$$

由图 1-1 显见

$$\tan\theta = \tan(\arg z) = \frac{y}{x}$$

由于任何一个不为零的复数都有无穷多个辐角，通常规定在$[-\pi,\pi]$间的辐角 θ 为其主值，记作 $\arg z=\theta$。这样，任何一个复数的辐角都可以写成

$$\mathrm{Arg}z = \arg z+2k\pi,\quad k = 0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

通过欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，可以把复数的三角式变换成复数的指数式

$$z = r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

于是，任何一个复数都可以用三种形式表示：代数式、三角式和指数式。

既然一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与复平面上的一点相对应，则复平面上的图形就可以用复数形式的方程或不等式来表示；反之，由给定的复数方程或不等式，也可确定出它在复平面上的几何图形。

据此可知：Z 平面上实轴的方程为 $\mathrm{Im}z=0$；虚轴的方程为 $\mathrm{Re}z=0$；以原点为圆心的单位圆方程为$|z|<1$；以原点为圆心、R 为半径的圆周方程为$|z|=R$；以原点为圆心、R 为半径的圆形区域的方程为$|z|<R$；以 $z_0\neq 0$ 为圆心、R 为半径的圆周的方程为$|z-z_0|=R$；Z 平面上实轴 $\mathrm{Im}z=0$ 为边界的两个无界区域中，上、下半平面为 $\mathrm{Im}z>0$ 和 $\mathrm{Im}z<0$；与实轴平行的带形区域为 $y_1<\mathrm{Im}z<y_2$；原点为圆心、R 和 $r(<R)$ 为半径的圆环形区域为 $r<|z|<R$；…。

例 1.1 把过两点 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的直线用复数表示出来，并求出线段 $\overline{z_1z_2}$ 的中点。

解 复平面上过点 z_1 和 z_2 直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

把上式换成复数形式，就可写成

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad 0 \leqslant t \leqslant +\infty$$

若取参数 $t=1/2$，可得出线段 $\overline{z_1 z_2}$ 的中点 z_0 的表示式

$$z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \mathrm{i}\,\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

例 1.2　求出复平面 Z 上由下列方程表示的曲线：

(1) $|z+\mathrm{i}|=3$；(2) $|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$；(3) $\mathrm{Re}(\bar{z}+2\mathrm{i})=3$。

解　(1) 方程 $|z+\mathrm{i}|=3$ 表示所有与点 $-\mathrm{i}$ 间距离均为 3 的点的轨迹，即圆心为 $-\mathrm{i}$、半径为 3 的圆(图 1-2(a))。它在复平面上直角坐标系中的方程为

$$|x + \mathrm{i}(y+1)| = 3, \quad 即\ x^2 + (y+1)^2 = 9$$

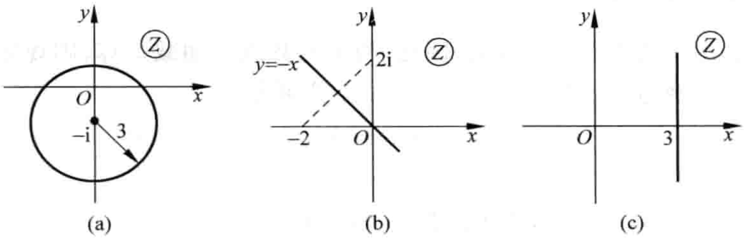

图 1-2　复平面上例 1.2 中复数方程表示的图形

(2) 方程 $|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$ 表示复平面上到点 $2\mathrm{i}$ 和点 -2 距离相等的点的轨迹，即连接 $2\mathrm{i}$ 和 -2 两点构成线段的垂直平分线(图 1-2(b))。所以方程应该为

$$y = -x$$

(3) 设复数 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\bar{z}+2\mathrm{i}=x+\mathrm{i}(2-y)$。于是，则可得出

$$\mathrm{Re}(\bar{z} + 2\mathrm{i}) = x$$

再据题设条件 $\mathrm{Re}(\bar{z}+2\mathrm{i})=3$，则得出所求曲线方程为 $x=3$，即一条平行于虚 y 轴的直线(图 1-2(c))。

例 1.3　将下列复数变换成三角式和指数式：

(1) $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$；(2) $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$。

解　(1) 复数 z 的模 $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$，辐角 $\theta=\arctan\dfrac{-2}{-\sqrt{12}}=\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。由于 x 和 y 的取值均为负数，故 θ 在 z 平面上直角坐标系的第 3 象限，于是得出 $\theta=-\dfrac{5}{6}\pi$。所以

$$z = 4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]$$

据此可以写出复数 z 的指数式

$$z = 4\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}$$

(2) 题设中 z 虽然形式上含有三角函数，但并非是复数的标准三角式，应该使其标准化。

由题设知，复数 z 的模 $r=1$，而

$$\sin\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{10}, \quad \cos\frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{10}$$

所以得出复数 z 的三角式和指数式分别为

$$z = \cos\frac{3\pi}{10} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10}; \quad z = \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{10}\mathrm{i}}$$

2. 复数的加、减和乘法

每个复数都由其实部和虚部组成，因此，两个复数进行加减运算，则规定为它们的实部和虚部分别进行加减运算。设两个复数 z_1 和 z_2 分别为

$$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$$

$$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$$

复数 z_1 和 z_2 的加、减运算，若用代数式表示，有

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) \pm (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$$

两个复数相加的几何意义为复平面上两个矢量的合成，它们应满足三角形法则，即

$$||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

复数 z_1 和 z_2 相乘，若用代数式表示，为

$$z_1z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_2y_1 + x_1y_2)$$

若用指数和三角式表示，则为

$$z_1z_2 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}(\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

表明两个复数乘积的模等于它们模的乘积，其辐角等于它们的辐角相加，即

$$|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2| = r_1r_2, \quad \mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$$

可见两个复数相乘的几何意义是复平面上矢量的缩放和旋转：由 $|z_1|z_2 = r_1r_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$ 可知，乘积相当于对矢量 z_2 的长度进行了缩放，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2+\theta_1)}$ 相当于对矢量 z_2 的旋转。由于辐角具有多值性的特点，因此，辐角 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 和 $\mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$ 都表示由无穷多个数构成的数集，它们相等则表示两个数集的全体是相同的。

n(正整数)个相同的复数 z 连乘，称为 z 的 n 次幂，记作 z^n，即

$$\underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n\text{个}z\text{连乘}} = z^n$$

若把复数 z 表示成三角式和指数式,则有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

若取上式中 $z=\mathrm{i}$,则当 n 为正整数时,有

$$\mathrm{i}^{4n} = 1, \quad \mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{4n+2} = -1, \quad \mathrm{i}^{4n+3} = -\mathrm{i}$$

若把复数 z 的整数 n 次根式$\sqrt[n]{z}$记作 w,即 $w=\sqrt[n]{z}$,设

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), \quad w = \sqrt[n]{z} = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

让 n 个复数 w 连乘等于 w 的 n 次幂,即

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

于是得出

$$\rho^n = r, \quad \cos n\varphi = \cos\theta, \quad \sin n\varphi = \sin\theta$$

使两个三角函数等式成立的充要条件是

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

由此得出

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

根据代数方程的有关理论可知,$\sqrt[n]{z}$有 n 个根 $w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}$,所以得出

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

每个 k 值对应一个根。若取 $k \geqslant n$ 时,上式的取值将会重复出现。例如,当取 $k=n$ 时,$\sqrt[n]{z}$ 的值与取 $k=0$ 的值是一样的。

在上述的三角式中,如果取复数 z 的模 $r=1$,便可得出棣莫弗(De Moivre)公式

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

如果定义 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$,则上面的公式在 n 为负整数时依然成立。

例 1.4 求出复数 $z=\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$的值。

解 由于 $|1+\mathrm{i}|=r=\sqrt{2}$,故 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$。根据$\sqrt[n]{z}$的三角式,得

$$w_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right)$$

由于整数 $k<n=4$,故取 $k=0,1,2,3$ 便可得出 w_0, w_1, w_2, w_3 四个解,它们分别为:

$$w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right)$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{16}\right)$$

$$w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{16}\right)$$

这四个根是内接于圆心在原点、半径为$\sqrt[8]{2}$的圆周的正方形的四个顶点(图 1-3),且

$$w_1=\mathrm{i}w_0,\quad w_2=-w_0,\quad w_3=-\mathrm{i}w_0$$

3. 复数间的除法运算

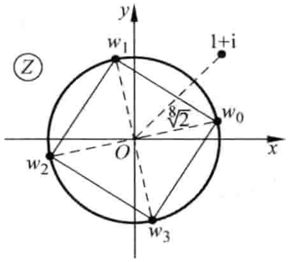

图 1-3 复平面上的 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$

规定满足关系 $z_2z=z_1(z_2\neq 0)$的复数 z 为复数 z_1 除以 z_2 的商,其中复数 $z=x+\mathrm{i}y$。假设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$,$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,根据 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$,可得出

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

由此可得

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\quad \mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

如果将复数写成指数式,即设 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$,$z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$,则

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$$

可见,两个复数相除,其商的模等于它们模的商,商的辐角等于被除数与除数辐角之差。

把实数中的二项式公式移植到复数域中亦然成立,即(式中规定 $0!=1$)

$$(z_1+z_2)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}z_1^{n-k}z_2^k,\quad n=1,2,\cdots$$

此外,很容易证明复数的代数运算满足如下规律:

(1) 交换律 $z_1+z_2=z_2+z_1$;$z_1z_2=z_2z_1$;

(2) 结合律 $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$;$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$;

(3) 分配律 $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$。

例 1.5 已知复数 $z_1=5-5\mathrm{i}$,$z_2=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$,求 $z_1\bar{z}_2$ 和$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$。

解 题设中复数 z_1 已经是代数式,将复数 z_2 也写成代数式

$$z_2=-\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}-\frac{3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\mathrm{i}-\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

(1) $z_1\bar{z}_2=(5-5\mathrm{i})\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)=\dfrac{15}{2}+\dfrac{5}{2}-\dfrac{15}{2}\mathrm{i}+\dfrac{5}{2}\mathrm{i}=5(2-\mathrm{i})$;

(2) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{5-5\mathrm{i}}{\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}}=\dfrac{10(1-\mathrm{i})}{3-\mathrm{i}}=\dfrac{10(1-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}=3+1-2\mathrm{i}=4-2\mathrm{i}$

所以得出

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = 4 + 2\mathrm{i}$$

例 1.6　利用棣莫弗公式把复数$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^7$展开。

解　先将复数写成三角式，再用棣莫弗公式。于是，有

$$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^7 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^7 = 2^7\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)^7$$

$$= 2^7\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 128\left(-\frac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right) = -64(\sqrt{3}+\mathrm{i})$$

1.1.2　复变函数及其导数

1. 复变函数的概念

以复数为自变量的函数，称为复变函数。复数自变量在复平面上的变化范围，称为复变函数的定义域，复变函数的取值范围称为复变函数的值域，复变函数的定义域和值域都是复数集合。

设 Z 是复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的一个集合，如果存在一个法则，使得 Z 中每个复数，即复平面 Z 上的一个点 z，都跟复平面 W 上的一个或多个复数值 $w=u+\mathrm{i}v$ 相对应，则称 w 是 z 的函数，记作

$$w = f(z), \quad z \in Z, w \in W$$

如果一个复数值 z 只与一个复数值 w 相对应，则称 $f(z)$为单值(或单叶)函数；若一个 z 值与多个 w 值对应，就称 $f(z)$为多值函数。一般情况下，本书只讨论单值复变函数。

例如，函数 $w=1/z$(其中 $\mathrm{Im}z>0$)是定义在上半复平面的单值函数；又如 $w=z^2$ 和 $w=\bar{z}$ 都是单值函数。而 $w=\sqrt{z}$ 是定义在整个复平面上的多值函数；$w=\sqrt[n]{z}\,(z\neq 0, n\geqslant 2)$，$w=\mathrm{Arg}z(z\neq 0)$都是多值函数。以后也把这种由函数 $w=f(z)$确定的对应关系，称为映射或变换。把点 z 称为 $f(z)$的原像，而把点 w 称为 $f(z)$的像点。实变函数 $y=f(x)$研究的是实数轴上的一点 x 与实数轴上一点 y 间的对应关系；而复变函数 $w=f(z)$研究的是复平面 Z 上的一点跟复平面 W 上一点或多点间的对应关系。

一个复数由其实部 x 和虚部 y 构成，实际上它是由一对实数(x,y)确定的。因此，一个复变函数 $w=f(z)$相当于确定了两个实变函数，其关系为

$$w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

例如，复变函数 $w=z^2$，若设 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，则

$$u + \mathrm{i}v = (x+\mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}$$

它相当于两个二元实变函数，即

$$w=f(z)=z^2\Leftrightarrow\begin{cases}u(x,y)=x^2-y^2\\v(x,y)=2xy\end{cases}$$

2. 复变函数的极限和连续性

对于定义在复平面上去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内的复变函数 $w=f(z)$，如果存在一个确定的复数值 A，对于给定的任意正数 ε，相应地必有一个正数 $\delta(\varepsilon)$（$0<\delta\leqslant\rho$）存在，使得只要 z 满足 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，就有

$$|f(z)-A|<\varepsilon$$

则称复数 A 为复变函数 $f(z)$ 在 z 趋向于 z_0 时的极限，记作

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A$$

复变函数极限的定义跟一元实变函数中极限的定义形式完全一样。不过，这里用复平面上的圆形邻域，代替了实变函数中的区间邻域。由于复变量 $z\to z_0$ 是在复平面上沿任意路径趋近的，要求复变量 z 在复平面上无论沿着怎样的路径趋向 z_0，$f(z)$ 都必须趋向于 A，所以比一元实函数极限的定义要求更加严格。

通常，把复变函数 $f(z)$ 的实部记作 $\mathrm{Re}[f(z)]=u(x,y)$，虚部记作 $\mathrm{Im}[f(z)]=v(x,y)$，于是

$$f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

这就表明给定一个复变函数 $f(z)$，相当于确定了两个二元实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$。所以实变函数论中的许多定义、公式和定理，都可以移植到复变函数论中。例如，实变函数论中关于连续的定义，移植到复变函数论中为：$w=f(z)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 点连续的定义为

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A=f(z_0)$$

它相当于一对二元实变函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，即

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=u(x_0,y_0)=u_0\\\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=v(x_0,y_0)=v_0\end{cases}$$

根据复变函数极限的定义，可以推得：如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$，则有

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)g(z)]=AB$；

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}$，$B\neq0$。

若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，即函数 $f(z)$ 在 z_0 点有极限，就说复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点处连续。如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续，就说 $f(z)$ 在 D 内连续。

复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续，其充要条件是两个实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都在 (x_0,y_0) 点处连续。

由复变函数连续性的定义以及它跟实变函数的关系，不难证明：在复平面上 z_0 点连续的两个复变函数，其和、差、积、商(在 z_0 处分母不为零)在 z_0 点仍然连续。

3. 复变函数的导数和微分

设复变函数 $w=f(z)$ 是定义在复平面 Z 上区域 D 内的单值函数，即在区域 D 内的每一个 z 值，在复平面 W 上有且仅有一个 w 值与之对应。若在点 $z_0\in D$ 存在极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

且这个极限值与在复平面 Z 上 $z\to z_0$ 的路径无关，则称 $f(z)$ 在 z_0 点可导，其极限值称为函数 $f(z)$ 在 z_0 点的导数或微商。引用新的复变量 $\Delta z=z-z_0$，可把 $f(z)$ 在 z_0 点的导数记作

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}$$

式中 $\Delta z\to 0$ 即 $z\to z_0$。

如果复变函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导，就说函数 $f(z)$ 在区域 D 内可导。只要 $f(z)$ 在区域 D 内有一点不可导，就不能说在区域 D 内可导。

例 1.7 按照导数的基本定义，求出函数 $f(z)=z^2$ 的导数。

解 因为

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z$$

所以

$$f'(z)=(z^2)'=2z$$

复变函数导数的定义，在形式上跟实变函数的定义完全一样，因而可以把实变函数中求导规则和公式移植到复变函数中。表 1-1 列出了部分求导公式及法则。

表 1-1 复变函数求导公式和法则

$\dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z}=0$，$c$ 为常数	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(w_1\pm w_2)=\dfrac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z}\pm\dfrac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z}$	$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=1\Big/\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}$
$\dfrac{\mathrm{d}(cw)}{\mathrm{d}z}=c\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$，$c$ 为常数	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(w_1w_2)=\dfrac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z}w_2+w_1\dfrac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z}$	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right)=\dfrac{w_1'w_2-w_1w_2'}{w_2^2}$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(w)=\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}w}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$	注：(1) w,w_1,w_2 均为复数 z 的函数 (2) $F(w)=F[w(z)]$ 是 z 的复合函数	

虽然复变函数跟实变函数求导的公式和法则形式相同，但实质上却有很大差异。实变函数中 $\Delta x\to 0$ 只能沿实数轴从零点的左、右两侧趋近于零。而复变函数中变量 z 是在复平