管理科学与工程经典译丛

OPERATIONS RESEARCH: AN INTRODUCTION

运筹学导论

（第9版·提高篇）

哈姆迪·A·塔哈（Hamdy A. Taha）著　刘德刚 朱建明 韩继业 译

MANAGEMENT SCIENCE AND ENGINEERING CLASSICS

PEARSON

中国人民大学出版社

PEARSON

管理科学与
工程经典译丛

OPERATIONS RESEARCH: AN INTRODUCTION
运筹学导论

（第9版·提高篇）

哈姆迪·A·塔哈（Hamdy A. Taha） 著
刘德刚 朱建明 韩继业 译

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

运筹学导论：第9版. 提高篇／（美）塔哈著；刘德刚，朱建明，韩继业译. —北京：中国人民大学出版社，2014.3
（管理科学与工程经典译丛）
ISBN 978-7-300-18989-5

Ⅰ.①运… Ⅱ.①塔… ②刘… ③朱… ④韩… Ⅲ.①运筹学 Ⅳ.①O22

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第038739号

安徽大学图书馆
藏书
www.lib.ahu.edu.cn

管理科学与工程经典译丛
运筹学导论（第9版·提高篇）
哈姆迪·A·塔哈 著
刘德刚 朱建明 韩继业 译
Xunchouxue Daolun

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京易丰印捷科技股份有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16开本	版　　次	2014年4月第1版
印　　张	22.25　插页1	印　　次	2014年4月第1次印刷
字　　数	496 000	定　　价	55.00元

版权所有　侵权必究　　印装差错　负责调换

译者序

运筹学起源于 20 世纪第二次世界大战期间, 是一门应用性很强的学科。1938 年, 英国皇家空军部门成立了一个从事作战研究的科学家小组, 小组的科学家把他们的研究工作称为 “operational research” (“operation” 在军事术语中意为 “作战”)。这是 “运筹学” 一词最早出现于文献的时间。第二次世界大战中, 英军几乎每一个大的指挥部都成立了这种运筹研究小组。之后, 美国和加拿大的军事部门也成立了若干运筹研究小组 (美国称这种研究工作为 “operations research”)。他们广泛地研究有关战果评价、战术革新、技术援助、战略选择和战术计划等问题。第二次世界大战期间, 英、美、加等国军事部门的运筹研究小组的工作为同盟国战胜德、意、日等轴心国做出了卓越的贡献。对于此后的人类社会的科学进程而言, 极其重要的是, 这些科学家的集体工作和智慧开创了一门崭新的学科——运筹学。

体现运筹学思想和方法的某些早期的先驱性的研究工作, 可以追溯到 20 世纪初。例如, 1908 年丹麦工程师埃尔朗 (Erlang) 关于电话的话务理论是运筹学中排队论的起源; 1916 年英国的兰彻斯特 (Lanchester) 关于战斗模型的方程是军事运筹学早期的一项重要成果; 1939 年苏联数学家坎托罗维奇 (Kantorovich) 在《生产组织与计划中的数学方法》一书中, 开创性地提出线性规划, 并研究了工业生产的资源合理利用和计划等问题, 这一卓越贡献使他在 1975 年获得了诺贝尔经济学奖; 基本的博弈均衡的思想可追溯到 1838 年库尔诺 (Cournot) 的文章, 1913 年德国的策梅洛 (Zermelo) 提出了抽象战略博弈的数学模型, 1928 年冯 · 诺伊曼 (von Neumann) 提出了二人零和博弈的解的一般理论。这些是关于博弈论的早期的研究。上述这些先驱性成就对后来运筹学的发展有着深远的影响。

第二次世界大战后, 美国等国家的军事部门保留和调整了运筹研究小组, 人员编制得到了扩大, 运筹学有了新的发展。1949 年, 美国成立了著名的兰德公司 (RAND)。与此同时, 许多运筹学工作者从军方转入企业、大学或政府部门。在新的更多的领域中, 运筹学的应用研究和理论研究迅速得到了蓬勃发展, 多年来它已为欧美等地创造了数以亿计的社会财富。

简言之, 运筹学的研究对象是现实世界中的运行系统, 这些运行系统的设计和运转受到管理人员的决策的影响和作用。运筹学创造出一些理论 (包括数学模型) 和方法, 被用来描述和分析运行系统的现象、性质及其变化, 以寻求影响和作用于运行系统的设计与运转的最有效 (最优) 的决策, 发挥有限资源的最大效益, 使运行系统达到总体最优的目标。

半个世纪以来, 运筹学在研究解决各种复杂的实际问题的过程中得到创新和发展, 新模型、新理论和新方法不断涌现。今天, 它已成为一个庞大的学科, 包括线性的和非

线性的、连续的和离散的、确定性的和不确定性的等许多分支。运筹学的基本方法中有数学方法、统计学方法、模拟 (仿真) 方法、计算机科学方法等, 其中各种优化方法处于非常重要的地位。

由于运筹学的非凡价值, 许多国家的大学的运筹学系、管理科学系、经济学系、工业工程系、系统科学系、数学系、计算科学系等早已开设关于运筹学及其分支学科的课程。我国的情况也大致如此。为满足不同院系专业的学生学习运筹学的需要, 应该有一本关于运筹学的基础教科书。在国外关于运筹学基础的诸多教材中, 哈姆迪 · A · 塔哈所著的《运筹学导论》是非常优秀的一本。塔哈是美国阿肯色大学工业学院工业工程教授、世界知名运筹学家。《运筹学导论》自 1968 年初版以来, 经过多次修订与扩充, 如今已推出第 9 版。该书被世界上多所大学用作运筹学基础教材, 已有西班牙文、日文、俄文、土耳其文、印尼文等多种译本。

本书共有 21 章和 2 个附录, 另外有其他 5 章和 3 个附录放到了网上 (http://www.pearsonhighered.com/taha)。书中内容涉及: 线性规划、运输问题、网络问题、目标规划、整数规划、动态规划、库存问题、非线性规划等确定性运筹分支, 以及概率动态规划、概率库存问题、排队系统、马尔可夫决策过程、决策分析、博弈论、模拟问题、预报问题等随机性运筹分支。这些内容涵盖了今天运筹学所研究的大部分重要问题。另外, 第 9 版在前一版的基础上专门增加了启发式算法和 TSP 问题及求解方法的介绍, 并在线性规划部分增加了计算软件的内容, 这些都反映了运筹学的最热点问题。第 9 版的主要特色在于: (1) 重视运筹学基本知识的讲解, 但对一些问题也作了较深入的分析, 以满足不同读者的需要。(2) 突出实用性。各章通过实际问题的求解来导出运筹问题的数学模型, 这既凸显出该运筹问题的实际背景, 也便于读者学习如何进行建模。网上的第 26 章 "案例分析" 详细地介绍了 15 个实际应用案例, 附录 E 收录了近 50 个应用例子。塔哈教授精心收集和分析的这些实例来源于许多领域: 工业、商业、金融、社会、体育、娱乐, 等等。(3) 计算方法与软件相结合。全书使用教学辅助软件 TORA、软件包 Excel 及 AMPL 等, 读者可以利用这些软件工具对所学的模型和计算方法进行计算和检验。

在我国, 运筹学基础类图书的读者众多, 但公认的优秀教材仍然偏少。2012 年中国人民大学出版社邀我们翻译《运筹学导论》(第 9 版), 既反映出我国对优秀运筹学教材的巨大市场需求, 也体现了中国人民大学出版社对发展我国运筹学教育的重视。由于原书篇幅宏大, 翻译版分成基础篇和提高篇两册出版, 每册可用作一个学期的教材。原书提供的部分习题答案, 也对应相关的章节分别放在两册的末尾。读者现在看到的提高篇涉及概率和随机优化的内容, 共 11 章。需要说明的是, 虽然翻译版对原书章节作了调整, 但网上文件保持原状。为方便读者查找, 我们保留了原有的文件序号, 未作更改, 敬请读者留意。

中译本难免有疏漏和翻译不妥之处, 敬请读者给予指正。

刘德刚

于中科院数学与系统科学研究院

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第 9 版更新说明*

本书第 9 版对教材内容和软件支持都做了进一步精简, 旨在重点突出求解算法, 以及运筹学技术的实际运用。

• 在新增的 3.7 节中, 本书首次概要性地介绍了如何运用商业化优化软件 (如 CPLEX, EPRESS) 求解不同的线性规划算法 (单纯形法、对偶单纯形法、修正单纯形法、内点算法), 以获得求解大规模问题所需的计算速度和解的精确性。

• 新增第 10 章, 介绍了不同的启发式算法和现代启发式算法, 用于对整数规划问题和组合优化问题找到较好的近似解。研究启发式算法的主要目的是, 解决精确算法从计算的角度上讲表现不佳的问题。

• 新增第 11 章, 专门讨论重要的旅行商问题。本章内容包括旅行商问题的各种应用问题, 并介绍了精确算法和启发式求解算法。

• 新增的第 10 章和第 11 章中的所有算法都采用了 Excel 编程, 便于实现这些模型的交互式数值实验。

• 将关于 AMPL 模型的所有详细内容移至附录 C, 和该附录介绍的 AMPL 句法规则放在一起, 本书中多处引用了这些模型。

• 全书增加了许多新的运筹学问题。

• 更新了 TORA 软件。

• 为适当控制纸质书的篇幅, 将有些内容 (包括有关 AMPL 的附录) 放在网上。

致　谢

我首先要感谢 Yahya Fathi 教授 (NCSU)、Marc E. Posner 教授 (The Ohio State University)、Charu Chandra 教授 (University of Michigan, Dearbon)、Yaser Hosni 教授 (University of Central Florida)、M. Jeya Chandra (Pann State University) 和 Manbir Sodhi 教授 (University of Rhode Islan), 他们对本书进行审阅并提出了重要意见。

对很多朋友和同事多年来一贯的支持, 我一直感恩在心, 他们是: John Ballard (University of Nebraska Linchln)、David Elizandro (Tennessee Tech University)、Rafael Gutiérrez (University of Texas El Paso)、José Pablo Nuño del la Parra (Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla)、June-Fa Tsai (National Taipei University of Technology)。

我还要向培生出版社的编辑制作人员表达我衷心的谢意, 感谢他们在本书出版期间所提供的帮助。

哈姆迪 · A · 塔哈

hat@uark.edu

---

* 由于原书篇幅宏大, 翻译版分成基础篇和提高篇两册出版。此为作者基于原书给出的更新说明, 其中的 “3.7 节” 对应的是《运筹学导论 (第 9 版 · 基础篇)》的 3.7 节, “第 10 章”、“第 11 章” 对应的分别是本书的第 2 章、第 3 章, 敬请读者留意。—— 译者注

目 录

第 1 章

线性规划进阶*

实际应用

泰国海军征兵的最优船只路线安排与人员指派问题

泰国海军每年征兵四次。招募的新兵到全国 34 个征兵中心之一报到，然后由汽车运送到四个海军分基地之一，再用船送到海军总基地。分基地的码头对靠岸的船型有一定的限制，分基地的能力也是有限的，但整体而言，四个分基地能确保运送所有的新兵。1983 年夏季，共有 2 929 名新兵从征兵中心被送到四个分基地，然后被送到总基地。问题是确定运送新兵的最优计划安排，如何从征兵中心到分基地，然后从分基地到总基地。这项研究运用了线性规划与整数规划的组合。网上第 26 章的案例 5 提供了这项研究的详细资料。

1.1 单纯形法的基本原理

在线性规划中，如果连接任意两个不同可行点所形成的线段仍落在可行集合内，则可行解空间构成一个**凸集** (convex set)。凸集的一个**极点** (extreme point) 是可行点，

* 为整合内容之需，将原书第 7 章调整为本书第 1 章。—— 译者注

但不能位于连接集合中任意两个不同可行点的线段上。实际上, 极点与《运筹学导论(第 9 版 · 基础篇)》第 2、第 3 和第 4 章中所称的角点相同。

图 1—1 显示了两个集合。集合 (a) 是一个 (具有六个极点的) 凸集, 集合 (b) 则不是凸集。

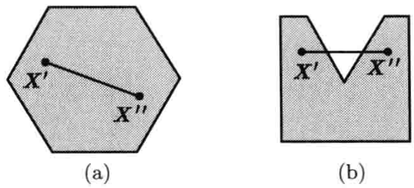

图 1—1 凸集与非凸集的例子

《运筹学导论 (第 9 版 · 基础篇)》2.3 节介绍的线性规划的图解法表明, 最优解总是与解空间中某个可行的极点 (角点) 相关。这个结果的意义显而易见, 因为在线性规划的解空间中, 每个可行点能够由其可行极点的函数来确定。例如, 在图 1—1 的凸集 (a) 中, 可行点 $\boldsymbol{X}$ 可以表示为极点 $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$, $\boldsymbol{X}_4$, $\boldsymbol{X}_5$ 和 $\boldsymbol{X}_6$ 的**凸组合** (convex combination), 其表达式为:

$$\boldsymbol{X} = \alpha_1\boldsymbol{X}_1 + \alpha_2\boldsymbol{X}_2 + \alpha_3\boldsymbol{X}_3 + \alpha_4\boldsymbol{X}_4 + \alpha_5\boldsymbol{X}_5 + \alpha_6\boldsymbol{X}_6$$

式中, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 1$

$\alpha_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, 6$

这个观察结果说明, 解空间中无限个点完全可以由有限个极点来确定, 这一结果成为单纯形法的核心基础。

【例 1.1—1】

求证: 集合 $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leqslant 2, x_2 \leqslant 3, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}$ 是凸集。

令 $\boldsymbol{X}_1 = \{x_1', x_2'\}$ 和 $\boldsymbol{X}_2 = \{x_1'', x_2''\}$ 是 C 中任意两个不同的点。如果 C 是凸集, 则 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2) = \alpha_1\boldsymbol{X}_1 + \alpha_2\boldsymbol{X}_2$ $(\alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ \alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0)$ 必属于 C。为了证明这是正确的, 需要证明线段 $\boldsymbol{X}$ 满足 C 的所有约束, 即

$$x_1 = \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_1'' \leqslant \alpha_1(2) + \alpha_2(2) = 2$$
$$x_2 = \alpha_1 x_2' + \alpha_2 x_2'' \leqslant \alpha_1(3) + \alpha_2(3) = 3$$

因此, $x_1 \leqslant 2$ 且 $x_2 \leqslant 3$。非负条件满足, 因为 α_1 和 α_2 都是非负的。

习题 1.1A①

1. 求证: 集合 $Q = \{x_1, x_2 \mid x_1 + x_2 \leqslant 1, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}$ 是凸集。非负条件是证明所必需的吗?

*2. 求证: 集合 $Q = \{x_1, x_2 \mid x_1 \geqslant 1$ 或 $x_2 \geqslant 2\}$ 不是凸集。

① 题序前有星号 (*) 表示书末的附录 A 中给出了该题的答案。

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

3. 用图形确定下面凸集的极点:

$$Q = \{x_1, x_2 \mid x_1 + x_2 \leqslant 2, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}$$

求证: 整个解空间能够由其极点的凸组合来确定。因此断定, 一旦解空间的极点已知, 任意凸集 (有界) 解空间就被完全确定。

4. 在图 1—2 (画有刻度) 的解空间中, 将内点 (3, 1) 表示成极点 A, B, C, D 的凸组合, 而且每个极点的权数都严格为正。

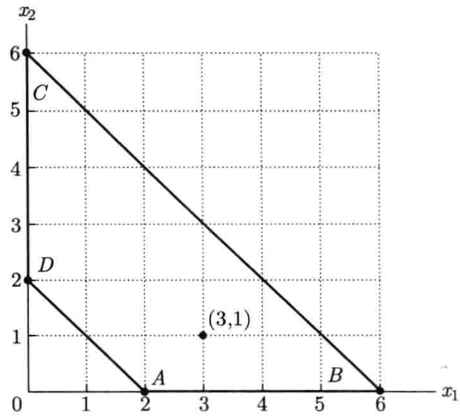

图 1—2　习题 1.1A 第 4 题的解空间

1.1.1　从极点到基本解

为了便于用矩阵记号① 表达具有等式形式的一般线性规划问题 (见《运筹学导论 (第 9 版 · 基础篇)》3.1 节), 定义: $\boldsymbol{X}$ 为 n 维向量, 表示问题的变量; $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 阶矩阵, 表示约束的系数; $\boldsymbol{b}$ 为一列向量, 表示约束的右端项; $\boldsymbol{C}$ 为 n 维向量, 表示目标函数系数。则线性规划可写成:

$$\max \text{ 或 } \min \boldsymbol{z} = \boldsymbol{CX}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

$\boldsymbol{X}$ 的最右边 m 个元素表示初始基变量。因此, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最右边的 m 列总能构成单位矩阵 $\boldsymbol{I}$。

$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 的**基本解** (basic solution) 的定义如下: 令方程中的 $n - m$ 个变量等于零, 然后求解其余具有 m 个未知量的 m 个方程, 倘若得到的解是唯一的, 则其解为基本解。有了这个定义, 线性规划的理论建立起极点的几何定义与基本解的代数定义之间的关系:

$$\{\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}\} \text{ 的极点} \Leftrightarrow \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \text{ 的基本解}$$

这个关系意味着, 线性规划解空间的极点完全由系统 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 的基本解确定, 反之亦

① 对矩阵代数的回顾内容见网上的附录 D。

然。因此, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的基本解包含我们确定线性规划问题最优解所需的所有信息。此外, 非负性约束条件 $\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}$ 将最优解的搜索范围限制为可行的基本解。

为了用数学公式定义基本解, 将系统 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 用向量的形式表示为:

$$\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_j=\boldsymbol{b}$$

向量 $\boldsymbol{P}_j$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列。当且仅当所选择的 m 个向量**线性无关** (linearly independent) 时, 称 m 个向量的子集构成一个**基** (basis), 即 $\boldsymbol{B}$。在这种情况下, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ **非奇异** (nonsingular)。如果 $\boldsymbol{X_B}$ 由 m 个变量构成, 其变量与非奇异矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中的列向量相对应, 则称 $\boldsymbol{X_B}$ 为基本解。在这种情况下, 我们有:

$$\boldsymbol{BX_B}=\boldsymbol{b}$$

已知 $\boldsymbol{B}$ 的逆 $\boldsymbol{B}^{-1}$, 则可得到相应的基本解为:

$$\boldsymbol{X_B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

若 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{X_B}$ 是可行的, 规定余下的 $n-m$ 个变量是**非基的** (nonbasic) 且取 0 值。

前面的结果表明, 在一个具有 m 个方程、n 个未知量的系统中, (可行和不可行) 基本解的最大个数为 $\begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$。

【例 1.1—2】

确定下面方程组的所有基本可行解和不可行解。

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

下表概括了结果。$\boldsymbol{B}$ 的逆可使用网上附录 D2.7 介绍的方法求得。

$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{BX_B}=\boldsymbol{b}$	解	类型
$(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2)$	$\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{8}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{4}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$	可行
$(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_3)$	(非基本解, 因为 P_1 和 P_3 相关)	—	—
$(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)$	$\begin{pmatrix}3 & -1\\-2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ -\frac{7}{4}\end{pmatrix}$	不可行

我们还可以用下面向量形式的表达式来研究这个问题:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}x_3=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

式中, $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3$ 和 $\boldsymbol{b}$ 均为二维向量, 它们可以用一般形式 $(a_1,a_2)^{\mathrm{T}}$ 来表示。图 1—3 给出了这些向量在 (a_1,a_2) 平面上的图形。例如, 对于 $\boldsymbol{b}=(4,2)^{\mathrm{T}}$, 有 $a_1=4$ 和 $a_2=2$。

因为我们处理的是一个二元方程 $(m=2)$, 所以一个基必须严格地包含两个向量,

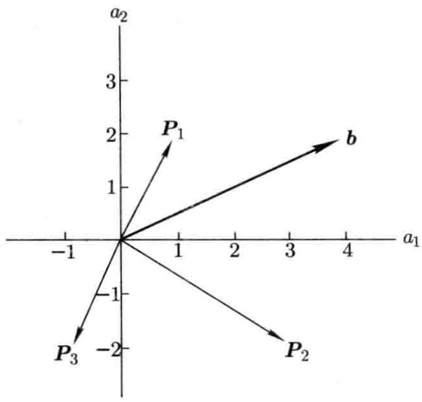

图 1—3　线性规划解空间的向量表示

且它们是从 $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ 和 $\boldsymbol{P}_3$ 中选出的。由图 1—3 看到, 矩阵 $(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2)$ 和 $(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)$ 构成基, 因为它们对应的向量线性无关。而矩阵 $(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_3)$ 对应的两个向量是相关的, 因此不能组成一个基。

从代数的观点来看, 如果一个 (方形) 矩阵的行列式不为零, 则构成一个基 (见网上的附录 D2.5)。下面的计算说明组合 $(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2)$ 和 $(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)$ 是基, 而组合 $(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_3)$ 不是基。

$$\det(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2)=\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}=1\times(-2)-2\times 3=-8\neq 0$$

$$\det(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)=\det\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & -2\end{pmatrix}=3\times(-2)-(-2)\times(-1)=-8\neq 0$$

$$\det(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_3)=\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=1\times(-2)-2\times(-1)=0$$

习题 1.1B

1. 在下列方程组中, (a) 和 (b) 有唯一的 (基本) 解, (c) 有无穷多个解, (d) 没有解。说明如何用图形的向量表示来验证这些结果。通过这个练习, 说明导致线性方程组有唯一解、无穷解和无解的情况下向量线性相关或线性无关的一般条件。

(a) $x_1+3x_2=2$, $3x_1+x_2=3$　　(b) $2x_1+3x_2=1$, $2x_1-x_2=2$

(c) $2x_1+6x_2=4$, $x_1+3x_2=2$　　(d) $2x_1-4x_2=2$, $-x_1+2x_2=1$

2. 用向量从图形上确定下列方程组解的类型: 唯一解、无穷解或无解。对于唯一解的情况, 用向量表示的方式 (不用解代数方程的方式) 指出 x_1 和 x_2 的取值是为正、零还是为负。

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　　*(b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$　　*(d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$　　*(f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. 考虑下面的方程组:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

确定下列任意一种组合是否构成基。

*(a) $(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3)$　　(b) $(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_4)$

(c) $(\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4)$　　*(d) $(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4)$

4. 判断下列表述正确与否。

(a) 如果 $\boldsymbol{B}$ 非奇异, 则系统 $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解。

(b) 如果 $\boldsymbol{B}$ 奇异且 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 线性无关, 则系统 $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{b}$ 无解。

(c) 如果 $\boldsymbol{B}$ 奇异且与 $\boldsymbol{b}$ 线性相关, 则系统 $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{b}$ 有无穷解。

1.1.2 单纯形表的矩阵表示形式

本小节用矩阵方法研究一般单纯形表。这种表示方法是本章内容的基础。

考虑等式形式的线性规划:

$$\max z = \boldsymbol{CX}, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0}$$

问题可以等价地表示成:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \boldsymbol{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

假定 $\boldsymbol{B}$ 是系统 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的可行基, 并且令 $\boldsymbol{X_B}$ 是相应的基变量, $\boldsymbol{C_B}$ 是对应的目标系数向量。则相应的解可以由下列方式计算 (分块矩阵求逆的方法由网上的附录 D2.7 给出):

$$\begin{pmatrix} z \\ \boldsymbol{X_B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\boldsymbol{C_B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{C_B B}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C_B B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

矩阵形式的一般单纯形表可由原标准方程得到, 其格式如下:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{C_B B}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \boldsymbol{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{C_B B}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

矩阵相乘, 产生如下方程:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{C_B B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \boldsymbol{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C_B B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

已知向量 $\boldsymbol{P}_j$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列, 对应的变量是 x_j, 相应的单纯形表具有如下形式:

基	x_j	解
z	$\boldsymbol{C_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j - c_j$	$\boldsymbol{C_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{X_B}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

事实上, 该表与《运筹学导论 (第 9 版 · 基础篇)》第 3 章介绍的单纯形表相同 (见本书习题 1.1C 的第 5 题), 其计算与《运筹学导论 (第 9 版 · 基础篇)》4.2.4 小节中的原始—对偶方法相同。该表的重要性质是, 从一张表变化为下一张表时, 只是逆矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 发生了变化, 并且一旦 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 已知, 便能够构造出整个单纯形表。这一点很重要, 因为任意一张单纯形表的计算舍入误差能够通过控制 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 的精确度来控制。这个结果是 1.2 节将介绍的修正单纯形法的基础。

【例 1.1—3】

考虑如下线性规划:

$$\max z = x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 10 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 5 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

用基 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2)$ 构造单纯形表。

已知 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2)$, 则 $\boldsymbol{X_B} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{C_B} = (1, 4)$, 因此

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

于是可得:

$$\boldsymbol{X_B} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

为计算单纯形表的约束列, 我们有:

$$\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

接下来, 我们计算目标行:

$$\boldsymbol{C_B}(\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4)) - \boldsymbol{C} = (1, 4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - (1, 4, 7, 5) = (0, 0, 1, -3)$$

最后, 我们计算目标函数值:

$$z = \boldsymbol{C_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{C_B}\boldsymbol{X_B} = (1, 4) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 19$$

因此, 完整的单纯形表可以概括如下:

基	x_1	x_2	x_3	x_4	解
z	0	0	1	-3	19
x_1	1	0	0	2	3
x_2	0	1	2	0	4

习题 1.1C

*1. 在例 1.1—3 中, 考虑 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4)$。证明相应的基本解是可行的, 然后构造出相应的单纯形表。

2. 考虑如下线性规划:

$$\max z=5x_1+12x_2+4x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=10\\ 2x_1-2x_2-x_3=2\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0\end{cases}$$

验证下列矩阵是否构成 (可行或不可行) 基: $(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2)$, $(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)$, $(\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4)$。

3. 在下面的线性规划中, 对应于 $\boldsymbol{X_B}=(x_1,x_2,x_5)^{\mathrm{T}}$, 计算出完整的单纯表。

$$\min z=2x_1+x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=3\\ 4x_1+3x_2-x_4=6\\ x_1+2x_2+x_5=3\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\geqslant 0\end{cases}$$

*4. 下面是某个线性规划的最优单纯形表:

基	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	解
z	0	0	0	3	2	?
x_3	0	0	1	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	0	6
x_1	1	0	0	-1	1	2

变量 x_3, x_4 和 x_5 是原问题的松弛变量。用矩阵运算的方法重构原线性规划, 然后计算其最优值。

5. 在矩阵形式的单纯形表中, 假定 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_{\mathrm{I}},\boldsymbol{X}_{\mathrm{II}})^{\mathrm{T}}$, 其中, $\boldsymbol{X}_{\mathrm{II}}$ 相当于一个典型的关于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$ 的初始基本解 (由松弛变量和/或人工变量组成), 并令 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_{\mathrm{I}},\boldsymbol{C}_{\mathrm{II}})$ 和 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{D},\boldsymbol{I})$ 分别是 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的划分。求证: 单纯形表的矩阵形式可简化为如下形式。(这正是《运筹学导论 (第 9 版 · 基础篇)》第 3 章所采用的单纯形表。)

基	$\boldsymbol{X}_{\mathrm{I}}$	$\boldsymbol{X}_{\mathrm{II}}$	解
z	$\boldsymbol{C_B B^{-1} D}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}$	$\boldsymbol{C_B B^{-1} D}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{II}}$	$\boldsymbol{C_B B^{-1} b}$
$\boldsymbol{X_B}$	$\boldsymbol{B^{-1}D}$	$\boldsymbol{B^{-1}}$	$\boldsymbol{B^{-1}b}$

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com