代　数　与　几　何

（空间解析几何部分）

黄　明　编

南京航空航天大学

二〇〇四年六月

目　录

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系与空间点的坐标

在平面解析几何中，通过坐标法把平面上的点与一对有序数组建立了一一对应的关系，从而把平面上的图形与方程对应起来，于是可以用代数的方法来研究几何问题。空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的。

过空间一点 o，作三条互相垂直的数轴，它们都以 o 为原点且一般具有相同的长度单位。这三条轴分别称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为坐标轴。通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，z 轴是铅垂直线；它们的正方向要符合右手规则（如图 1-1），即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴时，大姆指的指向为 z 轴的正向。这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系，点 o 称为坐标原点（或原点）。

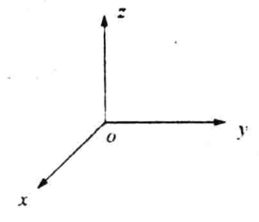

图 1-1

每两条坐标轴确定的平面称为坐标面，分别称为 xy 平面、yz 平面和 zx 平面。

三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做卦限，这八个卦限分别用字母 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示（如图 1-2）。

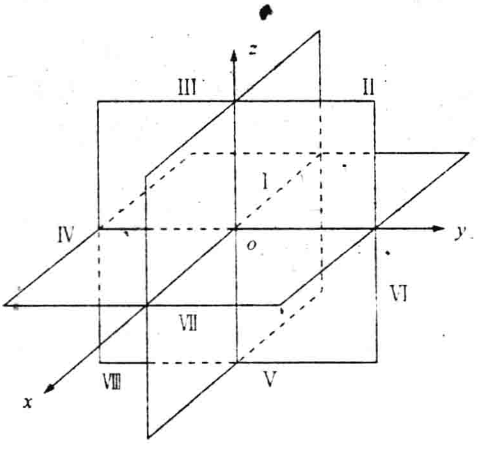

图 1-2

设 P 为空间一已知点，过 P 点作三个平面分别垂直于三条坐标轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴分别交于 A、B、C 三点（图 1-3），这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x_0、y_0、z_0，于是空间一点 P 就唯一确定了一个有序数组 x_0、y_0、z_0；反过来，已知一个有序数组 x_0、y_0、z_0，可以把上述过程倒过来即知：给定一个有序数组 x_0、y_0、z_0 可以唯一地确定空间一个点 P。这样空间一点 P 与有序数组 x_0、y_0、z_0 之间就建立了一一对应关系。我们称这组数 x_0、y_0、z_0 为 P 点的坐标，并称 x_0、y_0、z_0 分别为 P 点的横坐标、纵坐标和竖坐标；坐标为 x_0、y_0、z_0 的 P 点记作 $P(x_0,y_0,z_0)$。

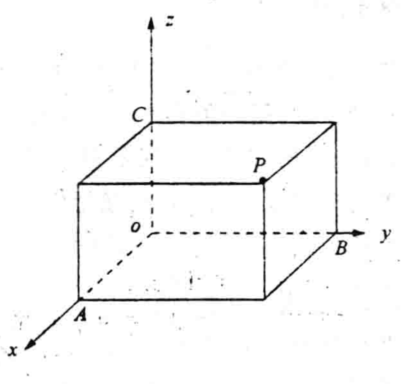

图 1-3

坐标面上及坐标轴上的点的坐标各有其特征。xy 平面上点的坐标满足 $z_0=0$，yz 平面上点的坐标满足 $x_0=0$，zx 平面上点的坐标满足 $y_0=0$；x 轴、y 轴、z 轴上点的坐标分别满足 $y_0=z_0=0$、$x_0=z_0=0$ 和 $x_0=y_0=0$。

二、空间两点间的距离

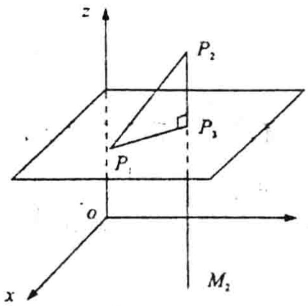

图 1-4

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两个点，讨论 P_1、P_2 两点间的距离。过 P_2 作 xy 平面垂线 P_2M_2，过 P_1 作与 xy 平面平行的平面，该平面与 P_2M_2 交于 P_3 点(见图 1-4)，显然 P_3 坐标为(x_2,y_2,z_1)。因为$\triangle P_1P_2P_3$ 为直角三角形，且

$$|P_1P_3| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$
$$|P_2P_3| = |z_2-z_1|$$

由勾股定理知 P_1、P_2 两点间距离 d 为：

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1-1}$$

(1-1)式为空间两点间的距离公式。

特别地，点 $P(x,y,z)$与坐标原点 $O(0,0,0)$的距离为：

$$d = |OP| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 在 y 轴上求与两点 $A(2,3,1)$和 $B(-3,1,0)$距离相等的点 P。

解 因所求点 P 在 y 轴上，故可设 P 点坐标为$(0,y,0)$，据题意有：

$$|PA| = |PB|$$

即 $$\sqrt{(2-0)^2+(3-y)^2+(1-0)^2} = \sqrt{(-3-0)^2+(1-y)^2+(0-0)^2}$$

等式两边去根号解得：

$$y = 1$$

故 P 点坐标为$(0,1,0)$。

第二节 向量及其线性运算

一、空间向量的概念

定义 1 既有大小，又有方向的量称为向量。

在数学中，用一条有方向的线段，即有向线段表示向量。有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。以 M_1 为起点，M_2 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{M_1M_2}$。$\overrightarrow{M_1M_2}$的大小称为向量的模(或长度)，记作$|\overrightarrow{M_1M_2}|$。今后为了方便也用 α,β,γ 或 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots$表示向量(图 2-1)。

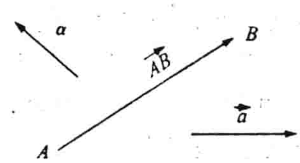

图 2-1

我们所研究的向量，与向量的起点无关，只依赖于向量的大小及方向，即所谓的自由向量。规定大小相等，方向相同的向量 α 和 β 是相等的向量，记作 $\alpha=\beta$。可以看出经过平移可以重合的向量即为相等的向量。本课程中提到的向量都是自由向量。

模为零的向量称为零向量，记作$\vec{0}$或 0。显然零向量起点、终点重合，它的方向看成是任

意的。

与向量 α 的模相等、方向相反的向量 β 称为 α 的负向量，记作 $\beta=-\alpha$。

模为 1 的向量称为单位向量。空间每个方向都有单位向量，将空间所有的单位向量以原点 o 为起点，则它们的终点构成以原点为中心，半径为 1 的球面。

二、向量的加法和减法

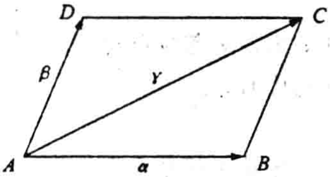

图 2-2

定义 2 设 $\alpha=\overrightarrow{AB}$，$\beta=\overrightarrow{AD}$，以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$，称向量 $r=\overrightarrow{AC}$ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 之和，记作 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ 或 $\alpha+\beta=\gamma$（图 2-2）。

上述定义又称作向量加法的平行四边形法则。

由于平行四边形对边平行且相等，向量加法也采用以下向量加法的三角形法则：作 $\overrightarrow{AB}=\alpha$，以 $\overrightarrow{AB}$ 的终点 B 为起点作 $\overrightarrow{BC}=\beta$，连接 AC 就有 $\gamma=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\alpha+\beta$（图 2-3）。

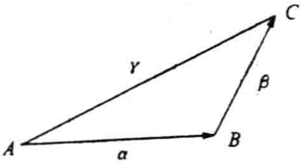

图 2-3

由向量加法的定义，不难验证向量加法有以下运算规律：

1. 向量加法的交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$。

2. 向量加法的结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$。

结合律的证明参见图 2-4。

3. 对任意向量 α 都有 $\alpha+0=\alpha$。

4. $\alpha+(-\alpha)=0$。

由于向量加法有交换律和结合律，n 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 相加就可以写成 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$。并按加法的三角形法则，将前一个向量的终点作为下一个向量的起点，依次作向量 α_1，α_2，$\cdots$，α_n，则第一个向量的起点到最后一个向量的终点的向量即为这 n 个向量之和 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$（见图 2-5）。

利用负向量，定义两个向量的减法：

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)。$$

按向量加法的三角形法则可知图 2-6 中向量 β 终点到 α 终点的向量即为 $\alpha-\beta$。

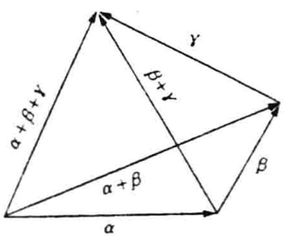

图 2-4

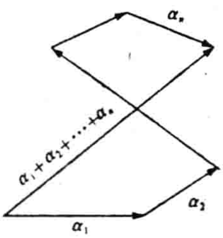

图 2-5

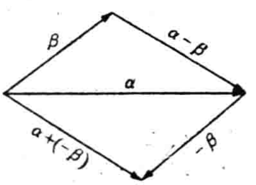

图 2-6

三、数与向量的乘法

定义 3 实数 k 与向量 α 相乘是一个向量，记作 $k\alpha$，称 $k\alpha$ 为数 k 与向量 α 的乘积（简称数乘）。其模为 $|k\alpha|=|k||\alpha|$；$k\alpha$ 的方向规定为：$k>0$ 时，$k\alpha$ 与 α 方向相同；$k<0$ 时，$k\alpha$ 与 α 方向相反；$k=0$ 时，$k\alpha=0$，方向任意。

向量的加法和数乘向量统称为向量的线性运算。

数乘向量有下述运算规律：

1. $1\alpha=\alpha$

2. 数乘向量的结合律：$k(l\alpha)=l(k\alpha)=(kl)\alpha$

3. 数乘和加法的分配律：$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

$$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$$

其中 α、β 为任意两个向量，k、l 为任意实数。

我们还有：

$$(-1)\alpha=-\alpha\quad,\quad 0\alpha=0。$$

以上结论可按数乘向量定义来证明，这里从略。

若 α 为非零向量，则 $\frac{1}{|\alpha|}\alpha$（也可写为 $\frac{\alpha}{|\alpha|}$）是一个与 α 方向相同的单位向量。

例　$\triangle ABC$ 中，D 为 BC 边中点（图 2-7）。

求证：$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

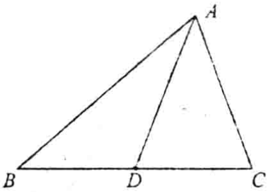

图 2-7

证明　由图 2-7 可得：

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$$

$$\therefore 2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$$

$\because D$ 为 BC 边中点　　$\therefore \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{CD}$

$$\therefore\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}[\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+(-\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{CD}]=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})。$$

四、向量的共线与共面

定义 4　方向相同或相反的向量称为共线向量，记作 $\alpha/\!/\beta$。平行于同一个平面的向量称为共面向量。

由数乘向量的定义可知，当 $k\neq0$ 时，$k\alpha$ 与 α 同向或反向，故 $k\alpha$ 与 α 共线；$k=0$ 时，$k\alpha=0$，可以认为 $k\alpha$ 与 α 共线。综上所述，$k\alpha$ 与 α 共线。

定理 1　向量 α 与 β 共线的充分必要条件为存在不全为零的数 k_1、k_2 使 $k_1\alpha+k_2\beta=0$。 $\Leftrightarrow \alpha\times\beta=0 \Leftrightarrow$

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$

* **证明**　（必要性）$\alpha=0$ 时，显然有 $k_1\alpha+0\beta=0$　$(k_1\neq0)$。

$\alpha\neq0$ 时，$|\alpha|\neq0$，存在数 k_1 使 $|\beta|=k_1|\alpha|$。　$\because\alpha$ 与 β 共线，故

当 α 与 β 同向时，取 $k_2=-1$，必有 $k_1\alpha+k_2\beta=0$，

当 α 与 β 反向时，取 $k_2=1$，必有 $k_1\alpha+k_2\beta=0$。

综上所述 $\alpha/\!/\beta$ 时，存在不全为零的数 k_1，k_2 使 $k_1\alpha+k_2\beta=0$。

（充分性）$\because$ 存在不全为零的 k_1，k_2，使 $k_1\alpha+k_2\beta=0$，不妨设 $k_1\neq0$，则

$$\alpha=-\frac{k_2}{k_1}\beta$$

故 α 与 β 共线。

定理 2　三个向量 α、β、γ 共面的充分必要条件为存在不全为零的数 k_1、k_2、k_3 使 $k_1\alpha+k_2\beta+k_3\gamma=0$。 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow [\alpha\beta\gamma]=0$

* **证明**　（必要性）由 α,β,γ 共面则，

i）当 α、β、γ 中有两个向量共线时，不妨设 $\alpha/\!/\beta$，由定理 1 知存在不全为零的 k_1，k_2 使

$$k_1\alpha+k_2\beta=0$$

因此可知，存在不全为零的 $k_1, k_2, 0$ 使

$$k_1\alpha + k_2\beta + 0\gamma = 0.$$

ii）当 α、β、γ 都不共线时，作$\overrightarrow{OA}=\alpha$，$\overrightarrow{OB}=\beta$，$\overrightarrow{OC}=\gamma$，并过 C 作 $CD /\!/ OB$，CD 与 OA 所在直线交于 D 点（图 2-8）。

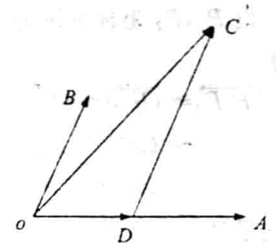

图 2-8

$\because \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}$

故存在不全为零的 $k_1, k_2, -1$ 使

$$k_1\alpha + k_2\beta + k_3\gamma = 0$$

（充分性）存在不全为零的 k_1, k_2, k_3 使

$$k_1\alpha - k_2\beta + k_3\gamma = 0$$

不妨设 $k_1=0$，则

$$\alpha = -\frac{k_2}{k_1}\beta - \frac{k_3}{k_1}\gamma$$

这表明 α 为以 $-\frac{k_2}{k_1}\beta$ 与 $-\frac{k_3}{k_1}\gamma$ 为邻边的平行四边形的对角线，所以 α、β、γ 共面。

第三节　向量的坐标

一、向量的坐标

空间取定直角坐标系，α 为一个向量，将 α 平移使其起点为坐标原点，则 α 的终点必为唯一确定的一个点，设为 P 点，并设 P 点的坐标为 (x, y, z)；反过来，给定三个有序的数 x、y、z，坐标为 (x, y, z) 的点是唯一确定的，设为 P，从而确定了一个以原点 O 为起点，P 为终点的向量$\overrightarrow{OP}=\alpha$。这样，我们就将空间向量 α 与三个有序的数 x、y、z 建立了一一对应的关系。称这组数 x、y、z 为向量 α 的坐标，记作 $\alpha=\overrightarrow{OP}=(x, y, z)$。

我们以 ε_1、ε_2 和 ε_3 分别表示 x 轴、y 轴、z 轴正向的单位向量，**称 ε_1、ε_2、ε_3 为空间直角坐标系的基本单位向量。**

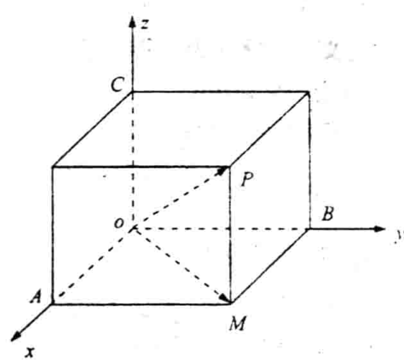

图 3-1

由向量坐标的定义，容易得出基本单位向量的坐标：$\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$。

下面进一步分析向量 $\alpha=\overrightarrow{OP}$与坐标 (x, y, z) 的关系。过 P 点作 x 轴、y 轴、z 轴的垂直平面，与坐标轴分别交于 A、B、C 点（图 3-1），显然这三点坐标分别为 $A(x,0,0)$，$B(0,y,0)$，$C(0,0,z)$。由数乘定义，容易验证：

$$\overrightarrow{OA} = x\varepsilon_1 \quad , \quad \overrightarrow{OB} = y\varepsilon_2 \quad , \quad \overrightarrow{OC} = z\varepsilon_3$$

由向量加法的定义，参见图 3-1 可知：

$$\alpha = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC} = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3$$

$$\therefore \alpha = \overrightarrow{OP} = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3 \tag{3-1}$$

称（3-1）式为向量 $\alpha=\overrightarrow{OP}$按基本单位向量的分解式。可以证明这个分解式是唯一确定的，向量 α 的坐标 x, y, z 就是这唯一确定的分解式中基本单位向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的系数，因此向量 α 的

坐标也可由其按基本单位向量的分解式中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的系数来确定。

对于起点不在原点的向量$\overrightarrow{P_1P_2}$坐标按下面方法确定。

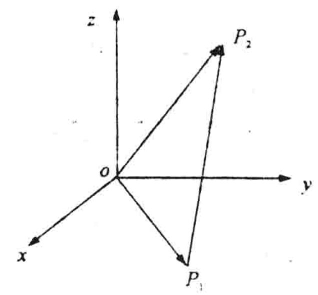

图 3-2

设 P_1,P_2 坐标分别为 $P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$，由图 3-2 得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}\\ &= (x_2\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + z_2\varepsilon_3) - (x_1\varepsilon_1 + y_1\varepsilon_2 + z_1\varepsilon_3)\\ &= (x_2 - x_1)\varepsilon_1 + (y_2 - y_1)\varepsilon_2 + (z_2 - z_1)\varepsilon_3\end{aligned}$$

故向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的坐标为：

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)。$$

引入向量坐标后，向量的线性运算就可以用向量坐标来计算了。

设 $\alpha=(a_1,a_2,a_3),\beta=(b_1,b_2,b_3)$

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3) + (b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3)\\ &= (a_1 + b_1)\varepsilon_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon_2 + (a_3 + b_3)\varepsilon_3,\\ k\alpha &= k(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3)\\ &= ka_1\varepsilon_1 + ka_2\varepsilon_2 + ka_3\varepsilon_3。\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),\\ k\alpha &= (ka_1, ka_2, ka_3)。\end{aligned}$$

二、向量 α 在向量 $\beta(\neq 0)$ 上的投影

定义 1 非零向量 α 与 β 的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 记作 $\langle\alpha,\beta\rangle$。若 α 与 β 方向相同，则 $\langle\alpha,\beta\rangle=0$；若 α 与 β 方向相反，则 $\langle\alpha,\beta\rangle=\pi$；若 α 与 β 中有一个为零向量，则 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 不定。

若向量 α 与 β 的夹角 $\theta=\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，称向量 α 与 β 垂直，记作 $\alpha\perp\beta$。

定义 2 设 β 为非零向量，称 $|\alpha|\cos\alpha\langle\alpha,\beta\rangle$ 为向量 α 在向量 β 上的投影，记作 $Prj_\beta\alpha$。若 $\alpha=0$，规定 $Prj_\beta\alpha=0$。

由投影定义可知：

$$Prj_\beta\alpha = \begin{cases}|\alpha|\cos\langle\alpha,\beta\rangle & (\alpha\neq 0)\\ 0 & (\alpha = 0)\end{cases}$$

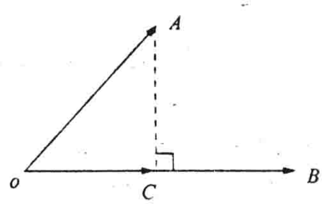

图 3-3

投影有以下性质：

1. $Prj_\beta(\alpha_1+\alpha_2)=Prj_\beta\alpha_1+Prj_\beta\alpha_2$。
2. $Prj_\beta(k\alpha)=kPrj_\beta\alpha$。

（其中 α,α_1,α_2 为任意向量，β 为非零向量，k 为实数）。

设$\overrightarrow{OA}=\alpha,\overrightarrow{OB}=\beta(\neq 0)$，过 A 作$\overrightarrow{OB}$的垂直平面与$\overrightarrow{OB}$所在直线交于 C 点（图 3-3），称$\overrightarrow{OC}$为向量 α 在向量 β 上的分向量。

容易验证 $\overrightarrow{OC}=(Prj_\beta\alpha)\dfrac{\beta}{|\beta|}$。

回顾本节中向量 α 按基本单位向量的分解式(3-1)及图 3-1，可知图 3-1 中$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$分别为向量 α 在基本单位向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 上的分向量，α 的坐标 x,y,z 分别是向量 α 在基本单

位向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 上的投影(或称为 α 在三个坐标轴上的投影),所以

$$x = Prj_{\varepsilon_1}\alpha \quad , \quad y = Prj_{\varepsilon_2}\alpha \quad , \quad z = Prj_{\varepsilon_3}\alpha。 \tag{3-2}$$

三、向量的模与方向余弦

设向量 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$,我们来讨论如何用向量 α 的坐标来表示其模和方向。

作向量$\overrightarrow{OP}=\alpha$,由向量坐标定义知 P 点坐标为(a_1,a_2,a_3),α 的模$|\alpha|$即$\overrightarrow{OP}$的长度,也就是 O、P 两点间的距离,故

$$|\alpha| = \sqrt{(a_1-0)^2+(a_2-0)^2+(a_3-0)^2} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}。$$

设非零向量 $\alpha=\overrightarrow{OP}$,我们用$\overrightarrow{OP}$与三条坐标轴正向的夹角 $\theta_1,\theta_2,\theta_3(0\leqslant\theta_1,\theta_2,\theta_3\leqslant\pi)$来表示 α 的方向(图 3-4),称 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 为非零向量 α 的方向角。

由于向量 α 的坐标就是 α 在三个基本单位向量上的投影,故

$$\begin{cases} a_1 = |\alpha|\cos\theta_1 \\ a_2 = |\alpha|\cos\theta_2 \\ a_3 = |\alpha|\cos\theta_3 \end{cases}$$

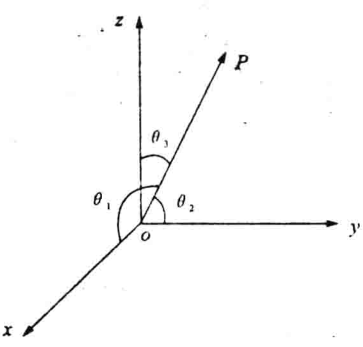

图 3-4

$\alpha\neq 0$ 故 $|\alpha|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\neq 0$,则

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \\ \cos\theta_2 = \dfrac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \\ \cos\theta_3 = \dfrac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \end{cases} \tag{3-3}$$

称 $\cos\theta_1$,$\cos\theta_2$ 和 $\cos\theta_3$ 为向量 α 的方向余弦。

向量的方向余弦也用来表示向量的方向。由公式(3-3)易得向量 α 的方向余弦的关系为:

$$\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3=1$$

$\alpha=(a_1,a_2,a_3)$为非零向量,与其方向相同的单位向量$\dfrac{1}{|\alpha|}\alpha$ 坐标为:

$$\frac{1}{|\alpha|}\alpha = \frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}(a_1\ a_2\ a_3) = (\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cos\theta_3)。 \tag{3-4}$$

例 已知两点 $P_1(1,0,-1)$,$P_2(2,\sqrt{2},-2)$,计算向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的模、方向余弦和方向角。

解 $\overrightarrow{P_1P_2}=(1,\sqrt{2},-1)$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(-1)^2}=2$$

由(3-3)式求得$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向余弦

$$\cos\theta_1=\frac{1}{2},\quad \cos\theta_2=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\theta_3=-\frac{1}{2}$$

故$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向角为:

$$\theta_1=\frac{\pi}{3},\quad \theta_2=\frac{\pi}{4},\quad \theta_3=\frac{2}{3}\pi。$$

第四节 数量积、向量积、混合积

一、两向量的数量积

定义 1 两个向量 α 与 β 的数量积是一个数，它等于这两个向量的模与它们的夹角的余弦的乘积，记作 $\alpha\cdot\beta$，即

$$\alpha\cdot\beta=|\alpha||\beta|\cos<\alpha,\beta>。$$

由数量积和投影的定义，β 为非零向量时，

$$\alpha\cdot\beta=|\beta|Prj_{\beta}\alpha$$

则
$$Prj_{\beta}\alpha=\frac{\alpha\cdot\beta}{|\beta|}$$

数量积符合以下运算规律：

1. 交换律：$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$

2. 分配律：$(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$

这是因为当 $\gamma=0$ 时，等式显然成立；$\gamma\neq0$ 时，按投影的性质可得

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot\gamma&=|\gamma|Prj_{\gamma}(\alpha+\beta)\\&=|\gamma|(Prj_{\gamma}\alpha+Prj_{\gamma}\beta)\\&=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma\end{aligned}$$

3. 结合律：$(k\alpha)\cdot\beta=\alpha\cdot(k\beta)=k(\alpha\cdot\beta)$

这是因为当 $\beta=0$ 时等式显然成立；$\beta\neq0$ 时，按投影性质可得

$$(k\alpha)\cdot\beta=|\beta|Prj_{\beta}(k\alpha)=|\beta|kPrj_{\beta}\alpha=k(\alpha\cdot\beta)$$

又
$$\alpha\cdot(k\beta)=(k\beta)\cdot\alpha=k(\alpha\cdot\beta)$$

故等式成立。

4. $\alpha\cdot\alpha=|\alpha|^2\geqslant0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时等号成立。

注意到 $<\alpha,\alpha>=0$，容易证明上式。

显然 $|\alpha|=\sqrt{\alpha\cdot\alpha}$。

由于基本单位向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 两两垂直且都是单位向量，故

$$\varepsilon_i\cdot\varepsilon_i=1\qquad(i=1,2,3)$$

$$i\neq j\text{ 时},\varepsilon_i\cdot\varepsilon_j=|\varepsilon_i||\varepsilon_j|\cos\frac{\pi}{2}=0\qquad(i,j=1,2,3)$$

由此可推导用向量坐标求数量积的公式。

设 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$，$\beta=(b_1,b_2,b_3)$，

$$\begin{aligned}\alpha\cdot\beta&=(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3)\cdot(b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+b_3\varepsilon_3)\\&=a_1b_1\varepsilon_1\cdot\varepsilon_1+a_2b_2\varepsilon_2\cdot\varepsilon_2+a_3b_3\varepsilon_3\cdot\varepsilon_3\\&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\end{aligned}$$

$$\therefore\alpha\cdot\beta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3。\qquad(4\text{-}1)$$

我们称(4-1)式为数量积的坐标表示式。

下来讨论 $\alpha\cdot\beta=0$ 的几何意义。

$$\alpha \cdot \beta = 0 \quad 即 \quad |\alpha||\beta|\cos < \alpha,\beta > = 0。$$

当 α、β 均为非零向量时，可得

$$\cos < \alpha,\beta > = 0 \Rightarrow < \alpha,\beta > = \frac{\pi}{2} \quad 即\ \alpha \perp \beta。$$

当 α,β 中有零向量时，因为零向量方向不定，也可说 $\alpha \perp \beta$。

反之，若 $\alpha \perp \beta$ 则 $\cos<\alpha,\beta>=0$，必有 $\alpha \cdot \beta = 0$。

故
$$\alpha \cdot \beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \perp \beta。$$

数量积常用来解决以下问题：

1. 求非零向量 α 与 β 的夹角，

$$\cos < \alpha,\beta > = \frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha||\beta|}。$$

2. $\alpha \perp \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot \beta = 0.$

3. 求向量 α 在非零向量 β 上的投影，

$$Prj_{\beta}\alpha = \frac{\alpha \cdot \beta}{|\beta|}。$$

例 1 试用向量证明三角形的余弦定理。

证明 ΔABC 中(图 4-1)

$$\begin{aligned} a^2 &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= c^2 + b^2 + 2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{AC}|\cos < \overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC} > \\ &= b^2 + c^2 + 2cb\cos(\pi - A) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A。 \end{aligned}$$

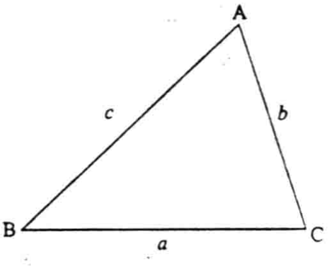

图 4-1

二、两向量的向量积

定义 2 两个向量 α 与 β 的向量积是一个向量，记作$\alpha \times \beta$，

其模：$|\alpha \times \beta| = |\alpha||\beta|sin<\alpha,\beta>$

方向：$\alpha \times \beta$ 的方向与 α,β 都垂直且 α、β、$\alpha \times \beta$ 成右手系。

向量积符合以下运算规律：

1. $\alpha \times \beta = -\beta \times \alpha$。 $\alpha \times \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha // \beta.$

这说明向量积不满足交换律，之所以等式两边向量差个符号，是因为按右手规则从 α 转向 β 定出的 $\alpha \times \beta$ 的方向与从 β 转向 α 定出 $\beta \times \alpha$ 的方向正好相反。

2. 分配律：$(\alpha + \beta) \times \gamma = \alpha \times \gamma + \beta \times \gamma$。

3. 结合律：$(k\alpha) \times \beta = \alpha \times (k\beta) = k(\alpha \times \beta)$ （k 为实数）。

2、3 两条运算规律证明从略。

由于$<\alpha,\alpha>=0$，故 $\alpha \times \alpha = 0$。

基本单位向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是两两垂直的单位向量且 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 成右手系，它们的向量积有如下结果：

$\varepsilon_i \times \varepsilon_i = 0 \qquad (i = 1,2,3)$

$\varepsilon_1\times\varepsilon_2=\varepsilon_3$，$\varepsilon_2\times\varepsilon_3=\varepsilon_1$，$\varepsilon_3\times\varepsilon_1=\varepsilon_2$。

由此可以推导用向量坐标求向量积的公式。

设 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$，$\beta=(b_1,b_2,b_3)$，

$$\begin{aligned}\alpha\times\beta&=(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3)\times(b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+b_3\varepsilon_3)\\&=a_2b_1\varepsilon_2\times\varepsilon_1+a_3b_1\varepsilon_3\times\varepsilon_1+a_1b_2\varepsilon_1\times\varepsilon_2+a_3b_2\varepsilon_3\times\varepsilon_2\\&\quad+a_1b_3\varepsilon_1\times\varepsilon_3+a_2b_3\varepsilon_2\times\varepsilon_3\\&=(a_2b_3-a_3b_2)\varepsilon_1-(a_1b_3-a_3b_1)\varepsilon_2+(a_1b_2-a_2b_1)\varepsilon_3\\&=\varepsilon_1\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}+\varepsilon_2(-1)\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}+\varepsilon_3\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\\&\xlongequal{\text{记作}}\begin{vmatrix}\varepsilon_1&\varepsilon_2&\varepsilon_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

故

$$\alpha\times\beta=\begin{vmatrix}\varepsilon_1&\varepsilon_2&\varepsilon_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)\tag{4-2}$$

我们称(4-2)式为向量积的坐标表示式。

向量积的几何意义：

1. $\alpha\times\beta$ 的模 $|\alpha\times\beta|$ 是以 α,β 为邻边的平行四边形面积，也是以 α,β 为边的三角形面积的二倍。

2. $\alpha\times\beta=0 \iff \alpha$ 与 β 共线即 $\alpha/\!/\beta$。

这是因为，若 $\alpha\times\beta=0$

当 α,β 均为非零向量时，$|\alpha\times\beta|=0 \Rightarrow |\alpha||\beta|\sin\langle\alpha,\beta\rangle=0 \Rightarrow \sin\langle\alpha,\beta\rangle=0$ $\Rightarrow \langle\alpha,\beta\rangle=0$ 或 $\langle\alpha,\beta\rangle=\pi$。

则 α 与 β 方向相同或方向相反．故 $\alpha/\!/\beta$。

α、β 之中有零向量时，因为零向量方向任意，可认为 $\alpha/\!/\beta$。

反之，若 $\alpha/\!/\beta$ 则 $\langle\alpha,\beta\rangle=0$ 或 $\langle\alpha,\beta\rangle=\pi$ 都有 $\sin\langle\alpha,\beta\rangle=0$

$\therefore \alpha\times\beta=0$。

由用向量坐标求向量积的公式(4-2)容易得出：

$$\alpha\times\beta=0 \iff \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

因而两个向量 α 与 β 共线的充分必要条件为它们对应坐标成比例。

向量积常用来解决以下问题：

1. 用于计算平行四边形或三角形的面积(图 4-2)。

$S_{\square ABCD}=|\alpha\times\beta|$，　$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}|\alpha\times\beta|$。

2. 用于验证向量共线。$\alpha\times\beta=0 \iff \alpha/\!/\beta$。

3. 用于求和已知向量 α,β 都垂直的向量，若 $\alpha\not\parallel\beta$ 则

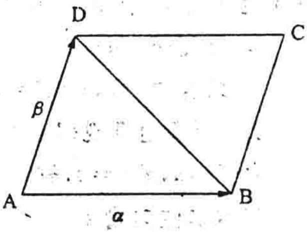

图 4-2

$\dfrac{\alpha\times\beta}{|\alpha\times\beta|}$为与 α,β 都垂直且 α,β，$\dfrac{\alpha\times\beta}{|\alpha\times\beta|}$成右手系的单位向量。

例 2 已知$\triangle ABC$的顶点分别是 $A(1,2,3)$，$B(3,4,5)$和 $C(2,4,7)$。求：$\triangle ABC$ 的面积。

解 由向量积的定义，知

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

由于$\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$故

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\varepsilon_1&\varepsilon_2&\varepsilon_3\\2&2&2\\1&2&4\end{vmatrix}=4\varepsilon_1-6\varepsilon_2+2\varepsilon_3$$

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|4\varepsilon_1-6\varepsilon_2+2\varepsilon_3|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}$。

三、向量的混合积

定义 3 三个向量 α、β、γ 的混合积是$(\alpha\times\beta)\cdot\gamma$，记作

$$[\alpha\beta\gamma]=(\alpha\times\beta)\cdot\gamma。$$

由用坐标计算向量积和数量积的公式可推出用向量坐标计算混合积的公式。

设 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$，$\beta=(b_1,b_2,b_3)$，$\gamma=(c_1,c_2,c_3)$。

$$\because\quad \alpha\times\beta=\begin{vmatrix}\varepsilon_1&\varepsilon_2&\varepsilon_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\varepsilon_1-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}\varepsilon_2+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\varepsilon_3$$

$$\begin{aligned}(\alpha\times\beta)\cdot\gamma&=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\varepsilon_1-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}\varepsilon_2+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\varepsilon_3\right)\cdot(c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+c_3\varepsilon_3)\\&=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}c_1-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}c_3\\&=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$故[\alpha\beta\gamma]=\alpha\times\beta\cdot\gamma=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}. \tag{4-3}$$

我们称(4-3)式为三向量的混合积的坐标表示式。

利用行列式性质可以证明：

$$[\alpha\beta\gamma]=[\beta\gamma\alpha]=[\gamma\alpha\beta]$$

由$[\alpha\beta\gamma]=[\beta\gamma\alpha]$可得： $\alpha\times\beta\cdot\gamma=\alpha\cdot\beta\times\gamma$.

混合积的几何意义：向量 α,β,γ 的混合积$[\alpha\beta\gamma]=\alpha\times\beta\cdot\gamma$ 的绝对值等于以 α,β,γ 为棱的平行六面体的体积。当 α,β,γ 成右手系时，混合积$[\alpha\beta\gamma]$为正数，当 α,β,γ 成左手系时，混合积$[\alpha\beta\gamma]$为负数。

这是因为，图 4-3 中(此图中 α,β,γ 成右手系，故 $\alpha\times\beta$ 与 γ 夹角为锐角)$\alpha\times\beta$ 与 α,β 都

垂直，所以 $\alpha\times\beta$ 与平行六面体底面垂直，$|\alpha\times\beta|$ 为平行六面体底面积，底面的高即为向量 $\vec{oc}=\gamma$ 在 $\alpha\times\beta$ 方向上的投影：

$$Prj_{\alpha\times\beta}\gamma=|\gamma|\cos<\alpha\times\beta,\gamma>$$

平行六面体体积 $=$ 底面积 $\times$ 高

$$=|\alpha\times\beta||\gamma|\cos<\alpha\times\beta,\gamma>$$

$$=\alpha\times\beta\cdot\gamma\quad(\text{注意此时 }\alpha,\beta,\gamma\text{ 成右手系})$$

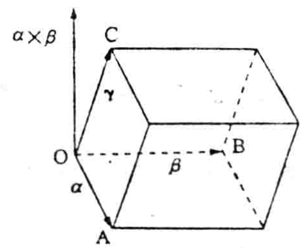

图 4-3

当 α,β,γ 成左手系时，$\alpha\times\beta$ 与 γ 夹角为钝角，γ 在 $\alpha\times\beta$ 方向的投影为负数，其绝对值等于平行六面体底面上的高，所以这时混合积 $[\alpha\beta\gamma]$ 为负数，其绝对值等于平行六面体体积。

综上所述 $|[\alpha\beta\gamma]|=|\alpha\times\beta\cdot\gamma|$ 是以 α,β,γ 为棱的平行六面体体积。

由混合积的几何意义，容易推得：

三个向量 α,β,γ 共面 $\Leftrightarrow$ $[\alpha\beta\gamma]=\alpha\times\beta\cdot\gamma=0$。

这个结论常用来判断三个向量是否共面。

第五节　平面及其方程

本节中，我们将以向量作为工具，在空间直角坐标系中建立平面方程，并研究两个平面的位置关系。

一、平面的点法式方程

若 $\vec{n}$ 为垂直于平面 Π 的非零向量，就称 $\vec{n}$ 为平面 Π 的法向量。

已知平面 Π 上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 及它的一个法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$，我们来建立平面 Π 的方程。

设 $P(x,y,z)$ 为平面 Π 上任一点，则向量 $\overrightarrow{P_0P}$ 在平面 Π 上（图 5-1），由法向量的定义

$$\overrightarrow{P_0P}\perp\vec{n}\quad\Leftrightarrow\quad\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$$

$$\vec{n}=(a,b,c),\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$$

则

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0\qquad(5\text{-}1)$$

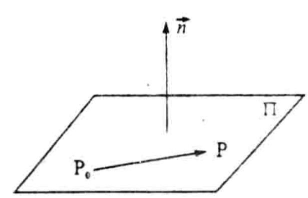

图 5-1

显然坐标满足方程(5-1)的点 $P(x,y,z)$ 都在平面 Π 上；平面 Π 上的点坐标都满足方程(5-1)，称方程(5-1)为平面的点法式方程。

例 1　已知不在同一条直线上的三个点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，$P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$。求：通过这三点的平面 Π 的方程。

解　方法一。设点 $P(x,y,z)$ 为平面 Π 上任一点。

$\because P$ 点在平面 Π 上的充分必要条件为 $\overrightarrow{P_0P}$，$\overrightarrow{P_0P_1}$，$\overrightarrow{P_0P_2}$ 共面，也就是 $[\overrightarrow{P_0P}\ \overrightarrow{P_0P_1}\ \overrightarrow{P_0P_2}]=0$，故平面方程为：

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0 \tag{5-2}$$

方程(5-2)就是所求的平面Π的方程，称之为平面的三点式方程。

方法二，设平面 Π 方程为

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \tag{5-3}$$

点 P_1,P_2 在平面上，故

$$a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)=0 \tag{5-4}$$

$$a(x_2-x_0)+b(y_2-y_0)+c(z_2-z_0)=0 \tag{5-5}$$

方程(5-3)、(5-4)、(5-5)联立，可视为以 a,b,c 为未知数的齐次线性方程组，过不在同一直线上三点的平面唯一确定，故(5-3)方程中 (a,b,c) 表示平面的法向量，是非零向量，所以齐次线性方程组有非零解，故系数行列式为零，

即
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$$

这就是所求的平面方程。

此类题，也可由 P_0,P_1,P_2 的坐标求出平面的法向量，即 $\vec{n}=\overrightarrow{P_0P_1}\times\overrightarrow{P_0P_2}$，再用平面的点法式方程写出平面方程。

例 2 求通过不在一条直线上三点 $M_1(2,-2,1)$，$M_2(3,1,-1)$，$M_3(1,-1,2)$ 的平面方程。

解 $\because \overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3}$ 都在平面上，$\therefore$ 它们都与平面的法向量 $\vec{n}$ 垂直，故可取 $\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5\varepsilon_1+\varepsilon_2+4\varepsilon_3$$

由平面的点法式方程(5-1)，所求平面方程为：

$$5(x-2)+1(y+2)+4(z-1)=0$$

即
$$5x+y+4z-12=0。$$

二、平面的一般方程

平面的点法式方程(5-1)可化为：

$$ax+by+cz+d=0 \tag{5-6}$$

(一般式)

其中 $d=-ax_0-by_0-cz_0$，这是平面的一般方程。

反过来，任意一个三元一次方程(5-6)都可以化成方程(5-1)的形式，所以任意一个三元一次方程所表示的图形是一个平面，而方程中 x,y,z 的系数即为平面的一个法向量，即

$$\vec{n}=(a,b,c)$$

例 3 设平面Π不过原点与 x 轴、y 轴、z 轴分别交于 $P(p,0,0)$，$Q(0,q,0)$，$R(0,0,r)$ 三点如图 5-2。求：平面方程.

解 设平面方程为 $ax+by+cz+d=0$ (5-6)

P、Q、R 三点在平面上，故它们的坐标满足方程，则：

$$\begin{cases} ap+d=0 \\ bq+d=0 \\ cr+d=0 \end{cases}$$

解之得

$$a=-\frac{d}{p},\quad b=-\frac{d}{q},\quad c=-\frac{d}{r}$$

代入(5-6)方程，整理(注意到平面不过原点，则 $d\neq0$)可得：

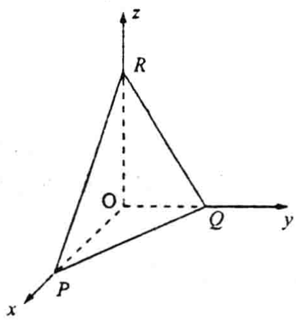

图 5-2

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1 \tag{5-7}$$

截距式

方程(5-7)称为平面的截距式方程，p、q、r 依次称为平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距。

三、两个平面的位置关系

两个平面法向量的夹角(通常指锐角)称为两个平面的夹角。

设平面 Π_1、Π_2 的法向量分别为 $\vec{n}_1(a_1,b_1,c_1)$、$\vec{n}_2(a_2,b_2,c_2)$，则平面 Π_1，Π_2 的夹角 θ 的余弦为：

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}。\tag{5-8}$$

两个平面的位置关系为重合、平行、相交，从代数角度看就是线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

有没有解？有多少解？

由线性方程组解的知识，不难证明：

1) 平面 Π_1 与 Π_2 相交 $\Leftrightarrow$ $a_1:b_1:c_1\neq a_2:b_2:c_2$(即 $\vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2$)。

2) 平面 Π_1 与 Π_2 平行 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}\neq\dfrac{d_1}{d_2}$。

3) 平面 Π_1 与 Π_2 重合 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{d_1}{d_2}$。

另外，平面 $\Pi_1\perp\Pi_2$ 即 $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$ $\Leftrightarrow$ $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$，

4) 故平面 $\Pi_1\perp\Pi_2$ $\Leftrightarrow$ $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$。

平面 Π_1 与 Π_2 平行或重合时，$\vec{n}_1/\!/\vec{n}_2$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$。

例 4 求两平面 $2x-y-z+2=0$ 与 $x-2y+z-7=0$ 的夹角。

解 由公式(5-8)知：

$$\cos\theta=\frac{|2\times1+(-1)\times(-2)+(-1)\times1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$

故两平面夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$。

例 5 平面 Π 通过 $M_1(2,1,-1)$，$M_2(2,-1,0)$ 两点，且垂直于平面 Π_0：$2x+2y+z-3$

$=0$。求：平面 Π 方程。

解 设平面 Π 法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$，点 M_1,M_2 在平面 Π 上，则 $\vec{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2}=(0,-2,1)$，$\therefore\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{n}=0$

故
$$0a-2b+c=0 \tag{5-9}$$

又平面 $\Pi\perp$ 平面 Π_0，则 $\vec{n}\perp\vec{n}_0$ $\therefore\vec{n}_0\cdot\vec{n}=0$

$$2a+2b+c=0 \tag{5-10}$$

方程(5-9)与(5-10)联立，令 $c=-2$，求得 $a=2,b=-1$，则 $\vec{n}=(2,-1,-2)$，故平面方程为：

$$2(x-2)-(y+1)-2z=0$$

即
$$2x-y-2z-5=0$$

例 6 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为平面 $\Pi:ax+by+cz+d=0$ 外的一点。

求：P_0 点到平面 Π 的距离 d(图 5-3)。

解 过 P_0 作平面 Π 的法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$，在平面 Π 上任取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$

$\overrightarrow{P_1P_0}$ 在 $\vec{n}$ 上投影的绝以值就是 P_0 到平面 Π 的距离 d

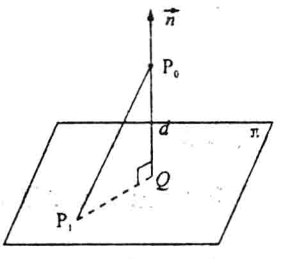

图 5-3

$$d=|Prj_{\vec{n}}\overrightarrow{P_1P_0}|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{n}|}$$

$$=\frac{|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

例如求点 $P_1(1,2,-1)$ 到平面 $\Pi:x+y-z-5=0$ 的距离 d：

$$d=\frac{|1+2-(-1)-5|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

第六节 空间直线及其方程

一、空间直线的方程

1. 空间直线的对称式方程和参数方程。

如果一个非零向量 $\vec{s}$ 平行于一条直线，就称向量 $\vec{s}$ 为这条直线的方向向量。

过空间一点与已知直线平行的直线是唯一确定的，故给定直线 l 上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 及方向向量 $\vec{s}=(m,n,p)$，直线 l 就唯一确定了。设 $P(x,y,z)$ 为直线上任一点，则

P_0、P 两点在直线 l 上 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{P_0P}/\!/\vec{s}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\vec{s}$ 对应坐标成比例，即

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{6-1}$$

(对称式方程)

方程组(6-1)称为空间直线的对称式方程(或点向式方程)。

由直线的对称式方程容易推出直线的参数方程。设

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$