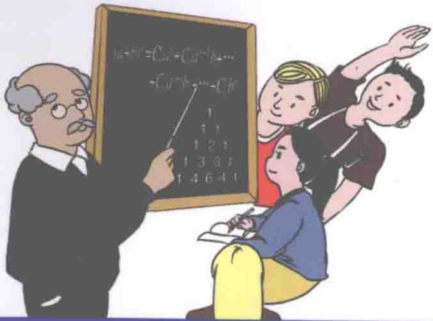


数林外传系列

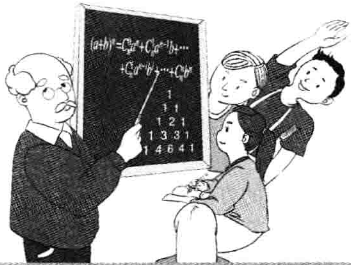
跟大学名师学中学数学

向量、复数与质点

◎彭翕成 著

中国科学技术大学出版社

数林外传系列
跟大学名师学中学数学



向量、复数与质点

彭翕成 著

中国科学技术大学出版社

内容简介

本书主要论述用向量解决常见几何问题的方法,特别是基于向量相加的首尾衔接规则的回路法. 全书共 7 章,从被人忽视的向量回路入手,介绍向量形式的定比分点公式和四边形中位线公式及其应用,对垂直问题、圆问题、三角形五心问题等作了专题研究;同时探讨了与向量法密切相关的复数法和质点法;对于不同解法之间的优劣,列举大量实例进行比较研究.

本书是在《绕来绕去的向量法》基础上进一步研究的成果,可供中学和大学的数学教师及理工科教师、中学生和大学生、数学爱好者以及数学教育研究者参考.

图书在版编目(CIP)数据

向量、复数与质点/彭翕成著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2014.5

ISBN 978-7-312-03368-1

Ⅰ. 向…　Ⅱ. 彭…　Ⅲ. ① 向量　② 复数　③ 质点
Ⅳ. ① O1831.　② O1　③ O359

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 064991 号

中国科学技术大学出版社出版发行
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
http://press.ustc.edu.cn
中国科学技术大学印刷厂印刷
全国新华书店经销
*
开本:880 mm×1230 mm　1/32　印张:8.75　字数:197 千
2014 年 5 月第 1 版　2014 年 5 月第 1 次印刷
印数:1—4000 册
定价:25.00 元

序

几何问题千变万化，不同的方法各有自己的长处．有不少题目用向量法做起来比较简明快捷，也有不少题目用面积法或质点法更为直观方便；还有一些题目，用综合法能够巧妙地做出来，用向量法反而显得笨拙．这些都显示了几何的丰富和优美．

点是几何的基本元素．向量、质点和复数都可以表示点，而且都有代数运算，所以它们是相通的．

向量方法是解几何问题的通法，翻来覆去只用那几条规则．此外，面积法、质点法和复数法也是通法，并且已经有了适用于相当广泛的命题类的机械化算法．面积可以用向量、质点或复数的运算表示，所以面积法给出的题解原则上都可以改写成这些方法．质点法的基本公式都可以写成向量形式或复数形式，所以质点法给出的题解容易改写成向量或复数的形式．在这个意义上，用向量法和复数法解几何题实质上也应有适用于相当广

泛的命题类的机械化算法.

用向量解几何题,并非数学家引入向量的主要目的.向量理论的大用场,是在更多、更高深、更重要的数学或物理学的分支里.向量的基本思想是把事物简化.本来用两个数、三个数甚至一万个数表示的东西,在一定条件下可以用一个字母表示.这样表示之后照样能运算,必要时又可以分解成两个数、三个数甚至一万个数.其神通好比孙悟空的毫毛,分开来可以变出成百个东西,合起来又是一点点.在中学里,学生熟悉的是几何,用向量解几何问题,是让他们初步体会一下向量的威力,体验一下分分合合的数学思想的高明之处.

表达面积要用三个点,表达向量要用两个点,表达质点只要一个点.比较这三种不同的通法,质点法处理问题时所考虑的对象可以具有最小的“粒度”,所以质点比向量更基本.既然有的省市在初中教学就讲了向量,能不能让学生思路再开阔一些,讲点质点几何呢?

质点法的发现基于两点如何相加.从加法想到减法,两点相减就成了向量.如果先讲向量,把向量说成是两点相减的结果,再从减法说到加法,就引出了质点几

何.这样,不但向量加法的首尾衔接法更加显然,而且把有向线段、定比分点公式、向量坐标的计算以及力学中的重心和力矩等知识都联系起来了.笔者曾经在一次中学生夏令营报告会上用半小时讲质点几何,引起了学生的很大兴趣.不少同学当时就学会了用质点几何方法计算一些通常认为比较困难的线段比例计算问题.在中学讲讲质点几何基本知识,可以帮助学生提高解题能力,更快更好地学习向量和解析几何,值得一试.

著名数学家华罗庚和吴文俊都特别强调几何要与代数结合.只讲几何不讲代数,是飞不高、飞不远的.几何与代数的结合,有坐标方法和非坐标方法两种.用坐标方法研究几何,发展成了“代数几何”;用代数方法且尽量不用坐标研究几何,发展成了“几何代数”.向量是代数几何的基础,也是几何代数的基础,同时更是大学里要学的数学分析、解析几何和高等代数这些主要数学课程的基础之一.

目前,中学数学教学还没有引入质点的概念,复数的篇幅也比之前减少很多,向量法这几年倒是有点“小热”.考虑到向量、复数与质点三者之间是相通的,结合

起来一同研究也有其意义.希望本书对读者有所启发.

张景中

2013 年 10 月 1 日

目　　录

1　被忽视的向量回路

一些资料介绍向量解题，总强调向量法与坐标法之间的转化.试想一下，倘若向量没有自己的独门武器，总要转化成坐标，那直接学坐标法就好，何必学向量法，多此一举？

向量解题并不排斥和坐标法合作，但我们接触新事物，总是想见识一下它与众不同的地方.就好比到了一个没去过的地方，总想去看一下当地独特的人文景观，品尝有名的风味小吃.

回路解题就是向量解题特有的方法.在中学数学教学中，回路好像并没有引起足够的重视.甚至有人会问："中学数学教材上出现过'回路'这两个字么？"

说起来，在平面几何入门时，我们就已经接触到回路了.回顾三角形的定义："由不在同一直线上的三条线段首尾顺次连接所组成的封闭图形叫做三角形"，三角形就构成了一个最简单的回路，用向量来表示就是：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.这说明，引入向量可以将几何关系转成代数形式.很多文章都写道"向量是联系几何和代数的天然桥梁"，为何天然？却语焉不详.我们认为，从三角形的定义就可以看出向量法有此特点.三角形是最基本、最重要的几何图形，构成了几何学的基础，平面几何如此，立体几何亦如此.

用向量回路法常可以按部就班地解题，操作起来十分方便，但并不是说就没有技巧了.再如何机械化的方法都或多或少存

在技巧，向量法也不例外，所以多看一些例题还是有好处的. 但总的来说，它比综合法简单得多，极少的解题工具，少量的基本方法，就可以解决大量问题. 相对于综合几何那么多定理，解答时又常需灵机一动地添加辅助线，向量法无疑是大大地划算.

向量运算的基本规则很简单，也常见，本书就不重复了，可参看《绕来绕去的向量法》(张景中、彭翕成著).

1.1　向量回路初步

用向量法证明余弦定理，是回路法最初级的应用.

将$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$左右两边平方，可得

$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}^2,$$

即

$$AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=AC^2.$$

这就是通常的余弦定理. 在向量解题中，有时不将$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$展开，运算起来更简便.

一般所说的余弦定理只针对三角形有效，而推导余弦定理的向量回路法则更基础，对所有多边形都有效.

【例 1.1】 已知$\triangle ABC$，$AB=3$，$BC=4$，$CA=5$，求：

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

解法 1

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=-\frac{BC^2+BA^2-CA^2}{2}-\frac{CA^2+CB^2-AB^2}{2}$$

$$-\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$$
$$=-\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{2}=-25.$$

解法 2 由$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$,两边平方得

$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,

所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=-\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{2}=-25.$$

解法 2 整体解决问题,相对而言,更简洁漂亮!

【例 1.2】 已知四边形 $ABCD$,满足 $AC=CD$, $AD=BC$, $\angle ACB+\angle ADC=180^\circ$,求证:$AB^2=BC^2+CD^2+DA^2$.

证明

$$AB^2=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})^2$$
$$=\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DA}^2+2(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}),$$

只需证$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}=0$,由条件知这是显然的.

【例 1.3】 四边形 $ABCD$ 的边 AB 和 CD 之间的角为 θ,证明:

$$AD^2=AB^2+BC^2+CD^2-2(AB\cdot BC\cos B$$
$$+BC\cdot CD\cos C+CD\cdot AB\cos\theta).$$

证法 1

$$AD^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2$$
$$=AB^2+BC^2+CD^2-2(AB\cdot BC\cos B$$
$$+BC\cdot CD\cos C+CD\cdot AB\cos\theta).$$

基于回路法考虑，这几乎是不证自明的，更不用画什么辅助图形. 而使用余弦定理则要先分开处理，再想办法综合，因为一般所说的余弦定理只对三角形有效.

证法 2 如图 1－1 所示，有

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD\cos\angle ACD,$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos B.$$

由于线段 AC 在直线 CD 上的射影长等于线段 AB 和 BC 在直线 CD 上射影的和，即 $EC = EF + FC$，也即

$$AC\cos\angle ACD = AB\cos\theta + BC\cos C,$$

综合起来命题得证.

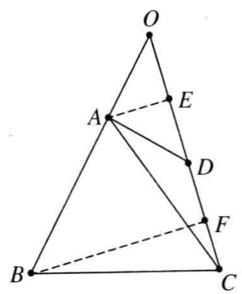


图 1－1

【例 1.4】 如果 A,B,C,D,E 依次在半径为 1 的半圆周上，求证：

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + AB \cdot BC \cdot CD + BC \cdot CD \cdot DE < 4.$$

分析 解此题的关键是在“半”字上下工夫. 正是有个“半”字，将五个点限定了范围. 漏了这个字，就容易举出反例. 由 $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2$ 容易想到

$$\overrightarrow{AE}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})^2.$$

而由于半径为 1 和 4,我们就希望 AE 是直径,那么$\overrightarrow{AE}^2$ 刚好就是 4.

证明 如图 1-2 所示,将 A 和 E 移到半圆直径的两端,这样所求证式子的左边只会增大.

$$\begin{aligned}4&=\overrightarrow{AE}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})^2\\&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})^2+2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CE}\\&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})^2\\&=AB^2+BC^2+CD^2+DE^2+2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\,\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DE}.\end{aligned}$$

下面证:$AB\cdot BC\cdot CD<2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned}2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}&=2AB\cdot BC\cos(180^\circ-\angle ABC)\\&=2AB\cdot BC\cos\angle AEC\\&=AB\cdot BC\cdot CE>AB\cdot BC\cdot DE.\end{aligned}$$

同理 $BC\cdot CD\cdot DE<2\,\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DE}$.命题得证.

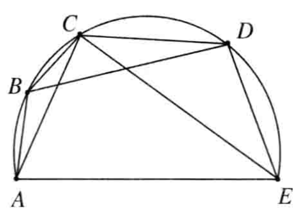


图 1-2

【例 1.5】 空间四点 A,B,C,D 满足 $AB=3,BC=7,CD$

$=11$，$DA=9$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$的取值(　　).(2005 年全国高中数学联赛试题)

A.只有一个　　B.有两个

C.有四个　　D.有无穷多个

解　关键在于:$3^2+11^2=130=7^2+9^2$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}^2&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2\\&=AB^2+BC^2+CD^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB})\\&=AB^2-BC^2+CD^2+2(\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB})\\&=AB^2-BC^2+CD^2+2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\\&=AB^2-BC^2+CD^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

于是

$$2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=AD^2+BC^2-AB^2-CD^2=0,$$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$只有一个值 0，故选 A.

此题的另一种表述方式是:若四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$，那么另作四边形 $A'B'C'D'$，满足 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CD=C'D'$，$DA=D'A'$，虽然这两个四边形的形状未必完全相同，但一定有 $A'C'\perp B'D'$.

更一般的结论:四边形对边平方和相等⇔对角线互相垂直.

证明

$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$

$$\Leftrightarrow(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})^2=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})^2+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})^2,$$

展开整理即可.

【例1.6】　设AD, BE, CF均是$\triangle ABC$的高，H是垂心，求证：

$$AD \cdot AH + BE \cdot BH + CF \cdot CH = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

证法1　由圆幂定理得

$$AD \cdot AH = AE \cdot AC, \quad CF \cdot CH = CE \cdot CA,$$

两式相加得

$$AD \cdot AH + CF \cdot CH = b^2.$$

同理

$$AD \cdot AH + BE \cdot BH = c^2,$$

$$BE \cdot BH + CF \cdot CH = a^2,$$

所以

$$AD \cdot AH + BE \cdot BH + CF \cdot CH = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

证法2　由$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = 0$得

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CA}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0,$$

即

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CA}^2 - 2\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BH} - 2\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CH} - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = 0,$$

也即

$$AD \cdot AH + BE \cdot BH + CF \cdot CH = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

证法2也要用到圆幂定理，但由一个恒等式出发，逐步演算得出结论，比起多个式子拼凑更紧凑！

【例1.7】　如图1-3所示，在四边形$ABCD$中，$AB = 2BC = 2CD = 2DA$，其中$\alpha = \angle BAD$，$\beta = \angle ABC$，求证：

$$4(\cos\alpha+\cos\beta)-2\cos(\alpha+\beta)=5.$$

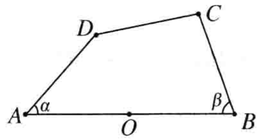


图 1-3

证明 设 AB 的中点为 O，$AB=2$，有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DC}&=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{OA}(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)-2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}(\cos\beta-\mathrm{i}\sin\beta)\\&=\overrightarrow{OA}[\cos\alpha+\cos\beta-2+\mathrm{i}(\sin\alpha-\sin\beta)],\end{aligned}$$

平方得

$$(\cos\alpha+\cos\beta-2)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=1,$$

即

$$4\cos\alpha+4\cos\beta-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta=5,$$

也即

$$4(\cos\alpha+\cos\beta)-2\cos(\alpha+\beta)=5.$$

【例 1.8】 在$\triangle ABC$ 中，求证：$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$.

证法 1

$$\begin{aligned}&\cos A+\cos B+\cos C\\&=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}\\&\leqslant 2\sin\frac{C}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}=\frac{3}{2}-2\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

证法 2 如图 1-4 所示，设$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$方向上的单位向