高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

Spark® 星火·燎原

丛书主编 马德高

高等数学同步辅导

（同济·五版 上下册合订）

本册主编 同济大学 彭 辉

[illegible]全解 指导同步学习

考研真题精讲 剖析考研重点

延边大学出版社
Yanbian university press

丛书主编 马德高

高等数学同步辅导

（同济·五版 上下册合订）

本册主编 彭 辉

副 主 编 娄万东 吕成军 马 燕

主 审 张天德

延边大学出版社
Yanbian university press

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导 ：同济五版 / 马德高编著.
延吉 ：延边大学出版社，2012.7
ISBN 978-7-5634-4506-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 236771 号

高等数学同步辅导

主编：马德高
责任编辑：林景浩
出版发行：延边大学出版社
社址：吉林省延吉市公园路 977 号　　邮编：133002
网址：http://www.ydcbs.com
E-mail：ydcbs@ydcbs.com
电话：0433-2732435　　传真：0433-2732434
印刷：肥城新华印刷有限公司
开本：880×1230　1/32
印张：26.5　字数：750 千字
版次：2012 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
ISBN 978-7-5634-4506-6

定价：32.80 元

前 言

高等数学是理工类院校一门重要的基础课程，也是硕士研究生入学考试的重点科目。同济大学主编的《高等数学》是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材，被全国许多院校采用。特别是经过多次修订后的第五版，结构严谨、逻辑清晰、层次分明、行文流畅，在讲授数学基础知识的同时，又注意提炼和渗透数学思想方法。为帮助读者学好该书，我们根据很多大学生学习此书反馈的信息和历届本科毕业生考研的深刻体会，编写了这本与同济大学应用数学系主编的《高等数学》（第五版）配套的《高等数学同步辅导》。本书旨在帮助、指导广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与技巧，提高应试能力和数学思维水平。

本书共分十二章，每章又分若干节。章节的划分和内容设置与《高等数学》（第五版）一致。每节内容分三部分编写：一、内容简析；二、题型·例题·方法；三、教材习题全解。每章内容编写完后，另增加三部分内容：四、本章知识结构及内容小结；五、教材总习题全解；六、同步自测题及参考答案。“内容简析”主要对本章涉及的基本概念、基本定理进行系统梳理，提出深入理解基本概念和定理需要注意的问题，解答读者学习中可能出现的疑难问题，特别指出各类考试中经常考查的重要知识点。“题型·例题·方法”对涉及本节内容的习题按知识点划分为几个基本题型，对每个基本题型精选大量不同难度、不同风格的例题。通过例题讲解，探索主要解（证）题思路，提炼基本解（证）题方法和常用技巧；有的还作了同类题目解（证）法小结和方法点击。“习题全解”对教材中的全部习题作了解答。书中用“警示语”的形式对解题要点、技巧、关键和易错的地方作了简短警示。“同步自测题”设计了各类考试中经常考到的基础题和综合题，有些题目选自历年全国研究生入学考试试题。

全书内容编写系统、新颖、清晰、独到，充分体现了如下三大特色：

一、知识梳理清晰、简洁　直观、形象的图表总结，精炼、准确的考点

提炼，权威、独到的题型归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的教材知识结构，以便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，从而为后面提高解题能力和数学思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、互动　所有重点、难点、考点，统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出丰富的精选例题、考研真题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力提升高效结合、浑然一体，一举完成。

三、联系考研密切、实用　本书是一本教材同步辅导，也是一本考研复习用书，书中处处联系考研：例题中有考研试题，同步自测题中也有考研试题，更不用说讲解中处处渗透考研中经常考到的考点、重点等，为的就是让读者同步完成考研备考，达到考研要求的能力。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分，在此向这些书籍的作者表示感谢。同时，由于我们水平所限，不足之处，在所难免，诚恳希望读者提出宝贵意见，以便再版时改进、修正。

编者

目 录

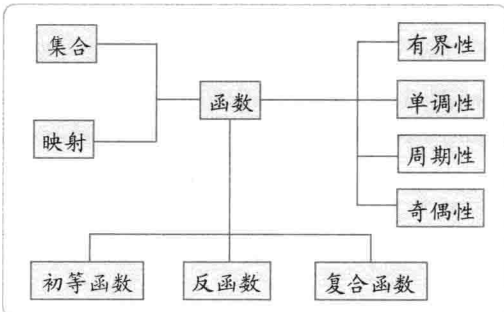
第一章 函数与极限

函数是微积分讨论的主要对象，它以极限理论为基础，在研究函数时我们总是通过函数值 $f(x)$ 的变化来看函数关系的性质，所以应该用运动变化的观点来掌握函数，极限与函数的连续性理论是微积分的基础，如何用已知的、可求的来逼近未知的、要求的，用有限来逼近无限，在无限变化的过程中考查变量的变化趋势，从有限过渡到无限，这是本章需掌握的基本思想.

第一节 映射与函数

一、内容简析

【知识结构】



【重要知识点和考点分析】

1. 两个奇函数的和或差仍是奇函数；两个偶函数的和、差、积、商(除数不为 0)仍是偶函数；两个奇函数的积、商(除数不为 0)为偶函数；一个奇函数与一个偶函数的积、商(除数不为 0)为奇函数.

2. 复合函数可由两个或多个函数相继进行有限次复合而成. 但是并不是任意两个函数都可以进行复合. 设外层函数 $y=f(u)$，$u\in D$，内层函数 $u=g(x)$，$x\in E$ 仅当外层函数的定义域与内层函数的值域相交时，即 $E^*=\{x\mid g(x)\in D, x\in E\}\neq\varnothing$ 时，两个函数才能复合. 例如，$y=\sqrt{u^2-2}$，$u=\sin x$ 就不能复合成 $y=\sqrt{\sin^2 x-2}$.

3. 函数有反函数的充要条件为函数是一一对应的. 严格单调函数必有反函数，且严格递增(减)函数的反函数也必严格递增(减). 反之，有反函数的函数未必一定是严格单调函数，$y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 表示同一条曲线，若用 x 表示自变量，y 表示因变量，则 $y=f^{-1}(x)$ 及 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，$f^{-1}(x)$ 的定义域即为 f 的值域.

4. 分段函数是特别要注意的一类函数，它用几个不同解析式“分段”表示一个函数. 所有解析式对应的自变量集合的并集是该函数的定义域. 定义域的各段最多只能在端点处重合，重合时对应的函数值应该相等. 图象分段的函数不一定是分段函数，分段函数的图象也可以是一条不断开的曲线(或曲面).

5. 本节的难点是复合函数，重点是复合函数、分段函数. 考研中常出现的题型是求复合函数，特别是求分段函数的复合函数，方法主要有 3 种：代入法、分析法和图示法.

【本节考研要求】

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，并会建立函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数概念.

二、题型、例题、方法

基本题型Ⅰ：求函数定义域

求初等函数的定义域有下列原则：① 分母不能为零. ② 偶次根式的被开方数不能为负数. ③ 对数的真数不能为零或负数. ④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x|\leqslant 1$. ⑤ $\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$. ⑥ $\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 求复合函数的定义域，通常将复合函数看成一系列初等函数的复合，然后考查每个初等函数的定义域和值域，得到对应的不等式组，通过联立求解不等式组，就可以得到复合函数的定义域.

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

(2) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$.

解：(1) 由 $x\neq 0,1+\dfrac{1}{x}\neq 0,1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\neq 0$,

得 $x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$.

故函数定义域为：$x\in\mathbf{R}$，但 $x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$.

(2) 由对数定义知：$\dfrac{5x-x^2}{4}>0$，即 $0<x<5$，

当 $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$ 时，函数有定义. 即 $\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$，

可知 $1\leqslant x\leqslant 4$，故函数定义域为：$1\leqslant x\leqslant 4$.

例 2 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 的定义域.（考研题）

【思路探索】 由题目条件设法求出 $\varphi(x)$ 的函数表达式，然后再求出 $\varphi(x)$ 的定义域.

解：由 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，知 $f(\varphi(x))=\mathrm{e}^{\varphi^2(x)}$，又∵ $f(\varphi(x))=1-x$.

∴ $\mathrm{e}^{\varphi^2(x)}=1-x$，于是 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$，再根据 $\varphi(x)\geqslant 0$，

可知：$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 因此 $\varphi(x)$ 的定义域为：$\ln(1-x)\geqslant 0$.

即 $x\leqslant 0$ 或 $x\in(-\infty,0]$.

基本题型Ⅱ：求函数表达式

例 3 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(1-x)=\frac{c}{x}$（$a,b,c$ 均为常数，且 $|a|\neq|b|$），求 $f(x)$.

【思路探索】 含有未知函数的方程叫做函数方程，观察法和变量代换法是解简单函数方程的两种最基本的方法.

解：$af(x)+bf(1-x)=\frac{c}{x}$ ①

取 $x=1-t$，则 $t=1-x$，

故 $af(1-t)+bf(t)=\frac{c}{1-t}$.

代换法，函数表示法的变量无关性.

所以 $af(1-x)+bf(x)=\frac{c}{1-x}$ ②

联立①、②得到：$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-\frac{bc}{1-x}\right)$.

例 4 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]=$（　　）（考研题）

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

【思路探索】 本题考查将两个分段函数复合成一个复合函数的过程. 先将 $g[f(x)]$ 表示为 $f(x)$ 的函数，再解不等式 $f(x)\leqslant 0$ 与 $f(x)>0$，最后将 $g[f(x)]$ 表示为 x 的函数.

解：$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ f(x)+2, & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0\\ x^2+2, & x<0\end{cases}=\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

故应选(D).

【方法点击】 (1) 综合运用代换法和方程思想是解简单函数方程的常用方法.

(2) 复合函数的求解方法主要有三种：

a) 代入法：将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替，适用于初等函数的复合.

b) 分析法：抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变

量的定义域进行分析，适用于初等函数与分段函数的复合或两分段函数的复合.

c) 图示法：i. 画出中间变量 $u=\varphi(x)$ 的图象；ii. 将 $y=f(u)$ 的分界点在 xu 坐标平面上画出；iii. 写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间；iv. 将iii所得的结果代入 $y=f(u)$ 中，便得到复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应的变化区间. 适用于两分段函数的复合.

基本题型Ⅲ：求反函数

例5 设 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$ 求 $f^{-1}(x)$.（考研题）

【思路探索】 本题为分段函数，因此要分区间讨论它的反函数表达式.

解：当 $-\infty<x<-1$ 时，$y=1-2x^2$，得到 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-y}$，$-\infty<y<-1$.

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=x^3$，得到 $x=\sqrt[3]{y}$，$-1\leqslant y\leqslant 8$.

注意符号的变化.

当 $2<x<+\infty$ 时，$y=12x-16$，

得到 $x=\frac{y+16}{12}$，$8<y<+\infty$，

所以反函数为 $y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-x}, & -\infty<x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \frac{x+16}{12}, & 8<x<+\infty.\end{cases}$

【方法点击】 反函数求解方法比较固定，即由 $y=f(x)$ 解出 x 的表达式，然后交换 x 与 y 的位置，即可求得反函数 $y=f^{-1}(x)$. 对于分段函数要牢记所求函数表达式的区间.

基本题型Ⅳ：把复合函数分解为基本初等函数的复合

例6 函数 $y=\ln\cos(e^x)$ 由哪些基本初等函数复合而成？

解：函数 $y=\ln\cos(e^x)$ 可由基本初等函数：$u=e^x$，$v=\cos u$，$y=\ln v$ 三个函数复合而成.

【方法点击】 牢记基本初等函数的表达式是解决此类问题的基础，而由里到外，逐级分解是解决问题的关键. 做题时不能跨越某个级别，漏掉某个基本初等函数，要分清复合函数的成分或结构.

基本题型Ⅴ：函数有界性的问题

例7 函数 $f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界（　　）.（考研题）

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

解：当 $x\neq 0,1,2$ 时，$f(x)$ 连续，

而 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\dfrac{\sin3}{18}$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\dfrac{\sin2}{4}$,

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\dfrac{\sin2}{4}$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$,

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$,

所以函数 $f(x)$在$(-1,0)$内有界.

故应选(A).

一般地,若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界;若函数$f(x)$在开区间(a,b)内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在,则函数 $f(x)$在(a,b)内有界.

【方法点击】 证明函数有界的常用方法:

① 利用函数有界性的定义,对函数取绝对值,然后对不等式进行放缩处理.

② 采用导数求最值的方法.

③ 根据连续函数的性质.(②、③例题见后续相应章节.)

基本题型Ⅵ:函数单调性的问题

例 8 判断函数 $y=\cos x$ 在区间$(0,\pi)$上的单调性.

【思路探索】 证明函数单调性的主要方法有:

① 利用函数单调性定义. ② 利用导数证明.

解:$\forall x_1,x_2\in(0,\pi),x_1<x_2$,

$\because \cos x_2-\cos x_1=-2\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}$,

三角函数公式是重要工具.

由于 $x_1<x_2$,故有 $0<\dfrac{x_1+x_2}{2}<\pi,0<\dfrac{x_2-x_1}{2}<\pi$,

$\therefore \sin\dfrac{x_1+x_2}{2}>0,\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}>0$, 从而 $\cos x_2-\cos x_1<0$,

即 $y=\cos x$ 在区间$(0,\pi)$上单调递减.

例 9 设 $f(x)$在$(0,+\infty)$上有定义,且$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$内单调减小,证明:对任意两点 $x_1>0,x_2>0$,有 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

【思路探索】 $\dfrac{f(x)}{x}$单调是唯一的条件,因此要从$\dfrac{f(x)}{x}$出发,逐步构造和结论联系的桥梁.

证明:不妨设 $x_1\leqslant x_2$,故有:$\dfrac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\dfrac{f(x_1)}{x_1}$

$\dfrac{f(x)}{x}$单降.

$\therefore x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1)$, 又$\because x_2<x_1+x_2$,则:

$\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\dfrac{f(x_2)}{x_2}$.

$\therefore x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)\leqslant x_2(f(x_2)+f(x_1))$

即 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

【方法点击】 单调性是函数的一个性质,证明不等式成立可充分利用单调性的定义,结合不等式的放缩技巧得出相应结论.

基本题型Ⅶ：函数奇偶性问题

例 10 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且对 $\forall x$、y 都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，且 $f(x)\neq 0$.

证明 $f(x)$ 为偶函数.

【思路探索】 判断函数的奇偶性关键要考查 $f(x)$ 和 $f(-x)$ 的关系，因此紧盯住这一目标，对条件进行变形是解决问题的入手点.

证明：由 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，用 $-y$ 代替 y 得：

$f(x-y)+f(x+y)=2f(x)f(-y)$，得 $2f(x)f(y)=2f(x)f(-y)$，

又因为 $f(x)\neq 0$，故 $f(y)=f(-y)$，$\therefore$ $f(x)$ 为偶函数.

【方法点击】 判断函数奇偶性通常采用的方法有：

① 从定义出发，或者利用运算性质(奇函数的代数和为奇函数等等).

② 证明 $f(-x)+f(x)=0$ 或 $f(-x)-f(x)=0$.

基本题型Ⅷ：函数周期性问题

例 11 记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，如 $[3.7]=3$，$[-4.35]=-5$，称 $y=[x]$ 为取整函数. 求证：$f(x)=x-[x]$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是有界周期函数.

【思路探索】 可通过取整函数 $y=[x]$ 分段变化的规律来了解函数 $f(x)=x-[x]$ 是怎样变化的.

解：当 $n\leqslant x<n+1$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$n+1\leqslant x+1<n+2$，按定义有

$$[x]=n,[x+1]=n+1,$$

$$0=n-n\leqslant f(x)=x-[x]<(n+1)-n=1,$$

$$f(x+1)=(x+1)-[x+1]=x+1-(n+1)$$

$$=x-n=x-[x]=f(x).$$

因此 $f(x)$ 是有界的，并且是以 1 为周期的周期函数.

【方法点击】 判定函数为周期函数的主要方法：① 从定义出发，找到 $T\neq 0$，使得 $f(x+T)=f(x)$. ② 利用周期函数的运算性质证明.

三、教材习题解答（教材上册 P_{20}，习题 1-1）

1. 解：$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$，

$A\cap B=[-10,-5)$，$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$，

$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$.

2. 证明：($\Rightarrow$). 设 $\forall a\in(A\cap B)^c$，则 $a\notin A\cap B$. $\therefore$ $a\notin A$ 或 $A\notin B$，

即 $a\in A^c$ 或 $a\in B^c$，$\therefore$ $a\in A^c\cup B^c$.

由 a 的任意性，知：$(A\cap B)^c\subset A^c\cup B^c$. ①

($\Leftarrow$)设 $\forall a\in A^c\cup B^c$，$\therefore$ $a\in A^c$ 或 $a\in B^c$，即 $a\notin A$ 或 $a\notin B$，