

■ 大气科学专业系列教材.....

动力气象学

吕克利 徐银梓 谈哲敏 编著



南京大学出版社

■ 大气科学专业系列教材.....

动力气象学

吕克利 徐银梓 谈哲敏 编著



南京大学出版社

内容简介

本书是作者在动力气象学多年教学基础上编写的,同时包含了作者的部分研究成果。全书共分十三章,前八章是动力气象学的基础部分,适合于气象院校本科生教学,后五章反映了动力气象学较为近代的部分研究内容,可作为本科生的教学补充材料和研究生的教学参考材料。本书也可供气象科技工作者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

动力气象学/吕克利,徐银梓,谈哲敏编著. — 2

版. — 南京:南京大学出版社,2014. 1

大气科学专业系列教材

ISBN 978-7-305-12581-2

I. ①动… II. ①吕… ②徐… ③谈… III. ①理论气象学—高等学校—教材 IV. ①P43

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 299302 号

出版发行 南京大学出版社

社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093

网 址 <http://www.NjupCo.com>

出 版 人 左 健

丛 书 名 大气科学专业系列教材

书 名 动力气象学

编 著 吕克利 徐银梓 谈哲敏

责任编辑 胥橙庭 吴 华 编辑热线 025-83596997

照 排 江苏南大印刷厂

印 刷 扬中市印刷有限公司

开 本 787×1092 1/16 印张 23.75 字数 606 千

版 次 2014 年 1 月第 2 版 2014 年 1 月第 1 次印刷

印 数 1~3 000

ISBN 978-7-305-12581-2

定 价 47.00 元

发行热线 025-83594756

电子邮箱 Press@NjupCo.com

Sales@NjupCo.com(市场部)

* 版权所有,侵权必究

* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购
图书销售部门联系调换

再版序言

本书是编著者在多年教学实践的基础上编写的,在内容上既介绍了动力气象学的基础知识,也反映了近代大气动力学的进展和成果,在科学问题阐述上既有系统严谨的数学推导,也有深入翔实的物理阐述。自1997年由南京大学出版社出版以来,本书一直是南京大学大气科学学院本科生教科书和研究生的教辅材料,同时也是许多气象科技工作者的参考用书。

在教学实践中,编著者发现,作为教学用书,本书没有提供思考的练习题,不利于学生自学和课后复习。另外,书中也存在一些错误、疏漏和不妥之处需要进行修正。鉴于上述两点,编著者希望对本书进行相应的修订。修订工作主要包括:(1)对全书内容和文字进行了必要的调整和修改;(2)根据每一章的知识点,设计了思考题和练习题,前者着重帮助学生梳理所学知识,启发学生进行一些深度思考,后者则旨在帮助学生掌握所学的基本方法和知识,提高其利用所学知识和方法解决问题的能力。在本书修订过程中,南京大学大气科学学院国家精品课程《动力气象学》建设小组的成员承担了全部的修订工作,他们是(以章为序):王其伟(第一至二章)、张熠(第三至五章)、唐晓东(第六至八章)、方娟(第九章)、储可宽(第十至十一章)、仇欣(第十二至十三章)、谈哲敏(全书统稿)。在此非常感谢他们的辛勤劳动,本次修订也是国家精品课程《动力气象学》的一个重要成果。



本书的再版得到了南京大学出版社的大力支持,感谢出版社高校教材中心吴华编辑为本书出版付出的辛劳。

受编著者水平限制,尽管是修订再版,书中亦难免有错误、疏漏和不妥之处,望读者予以批评指正。

谈哲敏

2013 年 10 月于南京大学

目 录

第一章 大气运动的闭合方程组及其简化	1
§ 1.1 旋转大气运动方程组的导出	1
§ 1.2 大气运动方程组的简化	14
§ 1.3 Boussinesq 近似	23
§ 1.4 边界条件	28
§ 1.5 物理坐标系	30
思考题	43
习 题	43
参考文献	44
第二章 大气中的涡旋运动——大气运动方程的变形形式	45
§ 2.1 环流与涡度	45
§ 2.2 大气运动方程的积分形式——环流定理	48
§ 2.3 大气运动方程的微分形式(一)——涡度方程	53
§ 2.4 大气运动方程的微分形式(二)——散度方程	59
§ 2.5 大气运动方程的微分形式(三)——位涡度方程	61
§ 2.6 位涡度方程的简化	64
§ 2.7 大气运动方程的微分形式(四)——螺旋度方程	71
思考题	73
习 题	73
参考文献	74
第三章 大气中的准地转运动	75
§ 3.1 准地转运动的物理成因	75
§ 3.2 造成非地转运动的因子	77
§ 3.3 非地转运动向地转运动的调整——地转适应过程	81
§ 3.4 准地转运动的分类	89
§ 3.5 半地转运动	97
思考题	100
习 题	100
参考文献	101



第四章 大气中的波动	103
§ 4.1 波动的基本概念	103
§ 4.2 小扰动法与标准波型法	113
§ 4.3 大气中的基本波动及滤波方法	116
思考题	135
习 题	136
参考文献	137
第五章 线性动力稳定性理论	138
§ 5.1 动力稳定性概念	138
§ 5.2 惯性不稳定	139
§ 5.3 正压不稳定	141
§ 5.4 斜压不稳定:连续模式	146
§ 5.5 斜压不稳定:二层模式	152
§ 5.6 非纬向气流的斜压不稳定	157
思考题	160
习 题	161
参考文献	162
第六章 热带大气动力学	163
§ 6.1 热带大气运动的尺度分析	163
§ 6.2 热带波动	166
§ 6.3 积云对流参数化	171
§ 6.4 CISK 理论及热带气旋的形成、发展	174
§ 6.5 热源强迫的热带定常运动	180
思考题	185
参考文献	185
第七章 大气能量	187
§ 7.1 大气中的主要能量形态	187
§ 7.2 大气能量方程	189
§ 7.3 有效位能	193
§ 7.4 纬向平均运动和涡动运动的能量方程	195
§ 7.5 影响能量变化的因子	199
§ 7.6 大气能量转换的观测事实	203
思考题	205
习 题	205
参考文献	206



第八章 大气边界层	207
§ 8.1 大气边界层中风的垂直分布	208
§ 8.2 Ekman 层的抽吸作用与旋转减弱	214
§ 8.3 半地转近似下的 Ekman 气流	218
思考题	223
习 题	224
参考文献	225
第九章 非均匀介质中的缓变波动简介	226
§ 9.1 多尺度法	226
§ 9.2 WKB 近似和缓变波列的性质	233
§ 9.3 波射线	238
思考题	250
习 题	250
参考文献	251
第十章 Rossby 波	252
§ 10.1 Rossby 波的经向传播	252
§ 10.2 Rossby 波的垂直传播	254
§ 10.3 Rossby 波的能量守恒	256
§ 10.4 Rossby 波的波作用和拟能守恒	261
§ 10.5 Rossby 波与纬向气流的相互作用	264
§ 10.6 Rossby 波的反射和过反射	270
§ 10.7 Rossby 波的共振相互作用	274
思考题	280
参考文献	280
第十一章 非线性 Rossby 波	281
§ 11.1 Burgers 方程与 KdV 方程	282
§ 11.2 Rossby 孤立波	291
§ 11.3 Rossby 包络孤立波	296
§ 11.4 Rossby 偶极子(modon)	301
§ 11.5 Rossby 代数孤立波	303
§ 11.6 强迫 Rossby 孤立波	308
思考题	316
参考文献	316
第十二章 非线性动力稳定性理论	317
§ 12.1 弱非线性斜压不稳定	317



§ 12.2 大气运动的分岔、突变	326
§ 12.3 Lorenz 系统及混沌	331
§ 12.4 大气中的多平衡态	338
思考题	343
参考文献	343
第十三章 锋生动力学理论	345
§ 13.1 准地转锋生理论	345
§ 13.2 半地转锋生理论	353
§ 13.3 原始方程锋生理论	364
思考题	369
参考文献	369

第一章

大气运动的闭合方程组及其简化

动力气象在流体力学的基础上研究地球大气的运动规律,它与一般的流体力学有所不同,它具有自身的特点,这些特点是由地球大气运动的固有特征决定的。

首先,气象上有重要意义的运动具有相当大的尺度,其水平尺度从百千米到数千千米,甚至达到地球半径的大小。对于这些运动,地球的旋转具有重要影响。地球上的物体都受到地球旋转的作用,赤道地区的物体具有量级为 400 m/s 的相对于地球轴的旋转线速度,远大于大气中的典型风速—— 10 m/s 。同时,地球旋转产生的涡度与大气中典型的大尺度运动产生的涡度相比,也是非常大的。因此,对于气象上具有重要意义的大尺度运动,地球旋转的影响必须考虑。

其次,大气受到地球重力场的作用,使大气质量向地表集中,造成大气密度随高度递减。此外,太阳辐射引起的地面非均匀加热,也造成大气密度的显著变化,这种大气密度的不均匀分布,使大气具有层结特征。对于大尺度大气运动,密度向上递减的大气层结,使大气运动几乎总是重力稳定的,其结果是使平行于局地重力方向的运动受到抑制,这就有助于产生准水平的大尺度运动。同时,稳定层结还使大气大尺度运动具有另一重要特性,即运动的水平尺度远大于其垂直尺度,也就是说,大尺度大气运动发生在非常薄的大气层内,对于这种运动,静力近似高度精确成立。

第三,大气运动过程中凝结潜热的释放是大气运动的一个重要能量源,造成大气运动的发展,增加大气运动的复杂性。

此外,大气的斜压性、准不可压缩性也是大气的重要特性,对大气运动也产生重要影响。

§ 1.1 旋转大气运动方程组的导出

为考虑地球旋转的影响,对地球大气中的运动,利用旋转坐标系来表示运动方程往往是方便的。在讨论旋转坐标系之前,先给出惯性坐标系或非旋转坐标系中的运动方程组。在惯性坐标系中,牛顿运动定律在连续流体中的形式为

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt}\right)_a = \mathbf{g}_m - \frac{1}{\rho}(\nabla p)_a + \mathbf{F}_a \quad (1.1.1)$$

式中:下标 a 表示惯性坐标系中观测到的量; $\left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt}\right)_a$ 为惯性坐标系中的加速度; $\mathbf{g}_m$ 为地心引力,方向指向地心; $-\frac{1}{\rho}(\nabla p)_a$ 为气压梯度力; $\mathbf{F}_a$ 为摩擦力。式(1.1.1)表示,单位质量的外力——地心引力、气压梯度力、摩擦力之和等于加速度。

大气运动时,不仅要遵循式(1.1.1)所示的牛顿运动定律,而且由于在流体的运动过程中,



流体质量也随着重新分布,流体质量场在运动过程中不断变化,这种因运动而引起的流体质量场的变化受质量守恒原理的约束,这就是所谓连续方程。质量守恒原理指的是,在没有质量源、汇的情况下,流体的质量在运动过程中既不产生也不消失。这时,质量守恒条件可用连续方程表示为

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_a + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v})_a = 0 \quad (1.1.2)$$

它说明,密度的局地变化,是由质量通量 $\rho \mathbf{v}$ 的散度引起的。式(1.1.2)还可以写为

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_a + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v})_a = 0 \quad (1.1.3)$$

对于空气、水这样的牛顿流体,摩擦力 $\mathbf{F}_a$ 可以用速度 $\mathbf{v}$ 来表示,即

$$\mathbf{F}_a = \mu(\nabla^2 \mathbf{v})_a + \frac{\mu}{3}(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}))_a \quad (1.1.4)$$

对密度 ρ 为常数的不可压大气,或者 $\rho = \rho(p)$ 的正压大气,动量方程(1.1.1)和连续方程(1.1.2)或者(1.1.3)就使运动方程组闭合。对于一般的大气状态, $\rho = \rho(T, p)$, 运动方程组不闭合,为此引入热力学第一定律

$$c_V \left(\frac{dT}{dt}\right)_a + p \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_a = \dot{Q} \quad (1.1.5)$$

式中: $\alpha = 1/\rho$, 为比热容; c_V 为定容比热容。式(1.1.5)说明,外加热量 $\dot{Q}$, 部分用于增加内能,部分用于做功。

由于增加了温度 T , 方程组仍不闭合。对于理想气体,可引入状态方程

$$p = \rho R T \quad (1.1.6)$$

式中 R 为气体常数,它与 c_V 和定压比热容 c_p 有如下关系

$$R = c_p - c_V \quad (1.1.7)$$

利用式(1.1.7),热流量方程(1.1.5)可以改写为

$$c_p \left(\frac{dT}{dt}\right)_a - \alpha \left(\frac{dp}{dt}\right)_a = \dot{Q} \quad (1.1.8)$$

式(1.1.8)还可以用位温 θ 来表示。由位温表达式

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}} \quad (1.1.9)$$

对其求对数微分,得到

$$\ln \theta = \ln T + \frac{R}{c_p} \ln p_0 - \frac{R}{c_p} \ln p$$

再作个别微分运算,得到

$$\left(\frac{d \ln \theta}{dt}\right)_a = \left(\frac{d \ln T}{dt}\right)_a - \frac{R}{c_p} \left(\frac{d \ln p}{dt}\right)_a \quad (1.1.10)$$

把式(1.1.8)代入式(1.1.10)的右边,即得以位温 θ 表述的热流量方程



$$c_p \left(\frac{d \ln \theta}{dt} \right)_a = \frac{\dot{Q}}{T} \quad (1.1.11)$$

对于绝热运动, $\dot{Q}=0$, 有

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)_a = 0 \quad (1.1.12)$$

这表明, 在绝热运动中, 大气的位温是守恒的。如果进一步利用熵 s 的定义式

$$s = c_p \ln \theta + \text{常数} \quad (1.1.13)$$

则由式(1.1.11), 可以得到

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)_a = \frac{\dot{Q}}{T} \quad (1.1.14)$$

对于绝热运动, 有

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)_a = 0 \quad (1.1.15)$$

可见, 在绝热运动中, 大气的熵 s 守恒。因此, 大气的绝热运动过程, 又可称为等熵运动过程。

热流量方程还可以用气压 p 和密度 ρ 来表达。把式(1.1.11)改写为

$$\left(\frac{d_h \ln \theta}{dt} \right)_a + \sigma w = \frac{\dot{Q}}{c_p T} \quad (1.1.16)$$

式中: $\sigma = \frac{\partial \ln \theta}{\partial z}$ 为一种静力稳定度参数; 下标“ h ”表示二维个别微分。利用位温表达式(1.1.9), 有

$$\left(\frac{d_h \ln \theta}{dt} \right)_a = \left(\frac{d_h \ln T}{dt} \right)_a - \frac{R}{c_p} \left(\frac{d_h \ln p}{dt} \right)_a$$

利用状态方程, $p = \rho R T$, 得到

$$\left(\frac{d_h \ln \theta}{dt} \right)_a = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{d_h \ln p}{dt} \right)_a - \left(\frac{d_h \ln \rho}{dt} \right)_a \quad (1.1.17)$$

这里, $\gamma = \frac{c_p}{c_v} \approx 1.4$ 。因此, 由式(1.1.16)有

$$\frac{1}{\gamma} \left(\frac{d_h \ln p}{dt} \right)_a - \left(\frac{d_h \ln \rho}{dt} \right)_a + \sigma w = \frac{\dot{Q}}{c_p T} \quad (1.1.18)$$

这是热流量方程的又一种表达式。

对于绝热大气过程, 这时加热率 $\dot{Q}=0$; 或者, 如果加热 $\dot{Q}$ 只是已知变量 v, p, ρ, T 的函数, 则方程组(1.1.1), (1.1.2)或(1.1.3), (1.1.5)或(1.1.8)或(1.1.11)或(1.1.18)和(1.1.16)构成闭合方程组。六个方程, 六个变量, 在给定的初始条件和边界条件下, 可以求得未来时刻的大气状态。

1.1.1 惯性坐标系和旋转坐标系中变量微分关系

上面我们给出了惯性坐标系中的大气闭合方程组。由于人们总是取固定在地球上并与地球一起转动的参考系来观测和研究大气运动的,而这种旋转参考系是非惯性系。当然,现象本身并不受参考系选择的影响,但是,对现象的描述却取决于坐标系的选择。例如,固定在惯性空间中的物体,对于一个旋转坐标系中的观察者来说却是在旋转,并且,由于其视轨迹的弯曲,因而它们是有加速度的。上面给出的大气运动闭合方程组是在惯性坐标系中得到的,对旋转坐标系是不是适合呢? 我们知道,在惯性坐标系和旋转坐标系中,矢量的时间导数是不同的,而标量的时间全导数、矢量和标量的空间导数(如散度、梯度等)是相同的。因此,连续方程(1.1.2)或(1.1.3),状态方程(1.1.6),热流量方程(1.1.5)或(1.1.8)或(1.1.11)或(1.1.18),以及(1.1.4)都不受坐标系选择的影响,具有完全相同的形式,可以直接用于旋转坐标系。为此,去掉表征惯性坐标系的下标“ α ”,立即得到旋转坐标系中的上述连续方程、状态方程和热流量方程等标量方程的表达式。

连续方程为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (1.1.19)$$

或者

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.1.20)$$

热流量方程为

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = \dot{Q} \quad (1.1.21)$$

$$c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = \dot{Q} \quad (1.1.22)$$

$$c_p \frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{\dot{Q}}{T} \quad (1.1.23)$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d_h \ln p}{dt} - \frac{d_h \ln p}{dt} + \sigma w = \frac{\dot{Q}}{c_p T} \quad (1.1.24)$$

状态方程仍为式(1.1.6)。

由于矢量的时间导数在惯性坐标系和旋转坐标系中不同,就是说,牛顿运动定律及其导出形式(1.1.1)只在惯性坐标系中才适用,如果需要用旋转坐标系中观测到的量来表示,就必须考虑由于旋转而引起的附加项,即必须考虑地球的旋转效应,建立新的适当形式的运动方程组代替方程(1.1.1)。

下面我们推导惯性坐标系和旋转坐标系中矢量的时间微分之间的关系式。设存在两个直角坐标系: $x'y'z'$ 和 xyz , 如图 1.1 所示, $x'y'z'$ 为惯性坐标系, xyz 为旋转坐标系, 其旋转轴为 Oz 轴。旋转坐标系 xyz 设以矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 旋转。如果设惯

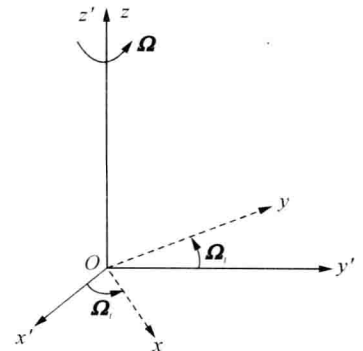


图 1.1 惯性坐标系和旋转坐标系



性坐标系中坐标轴的单位矢量为 i', j', k' , 旋转坐标系的单位矢量为 i, j, k , 则由假定可知, i', j', k' 不随时间 t 变化, 而 i, j, k 的方向在不断随时间 t 变化。对于任意一个矢量 Q , 在这两个坐标系中可以表示为

$$Q = Q'_x i' + Q'_y j' + Q'_z k' = Q_x i + Q_y j + Q_z k \quad (1.1.25)$$

式中: Q'_x, Q'_y, Q'_z 为 Q 在惯性坐标系中的分量; Q_x, Q_y, Q_z 为 Q 在旋转坐标中的分量。矢量 Q 在旋转坐标系中的时间微分如用 $\left(\frac{dQ}{dt}\right)_r$ 表示, 则有

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_r = \left(\frac{dQ_x}{dt}\right)_r i + \left(\frac{dQ_y}{dt}\right)_r j + \left(\frac{dQ_z}{dt}\right)_r k \quad (1.1.26)$$

因为在该坐标系中, 单位矢量 i, j, k 是固定不变的, 因此该式对一个与旋转坐标系相对静止的观察者成立。对于非旋转的观察者来说, Q 的分量和单位矢量都在随时间变化。如用 $\left(\frac{dQ}{dt}\right)_a$ 表示惯性坐标系中的时间微分, 并把 Q 在旋转坐标系 xyz 中的表达式代入 $\left(\frac{dQ}{dt}\right)_a$ 中的 Q , 则有

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_a = \left(\frac{dQ_x}{dt}\right)_a i + \left(\frac{dQ_y}{dt}\right)_a j + \left(\frac{dQ_z}{dt}\right)_a k + Q_x \left(\frac{di}{dt}\right)_a + Q_y \left(\frac{dj}{dt}\right)_a + Q_z \left(\frac{dk}{dt}\right)_a \quad (1.1.27)$$

前面我们已经指出, 在惯性坐标系和旋转坐标系中, 标量的时间全导数是相同的。因此, 式(1.1.27)右边的前三项的下标可以换为 r , 即有

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_a = \left(\frac{dQ_x}{dt}\right)_r i + \left(\frac{dQ_y}{dt}\right)_r j + \left(\frac{dQ_z}{dt}\right)_r k + Q_x \left(\frac{di}{dt}\right)_a + Q_y \left(\frac{dj}{dt}\right)_a + Q_z \left(\frac{dk}{dt}\right)_a \quad (1.1.28)$$

可见, 要得出矢量 Q 在两个坐标系中时间微分的关系式, 必须求出旋转坐标系的单位矢量在惯性坐标系中的时间微分表达式。为此, 考虑单位矢量 A (可以是 i, j 或 k), 它以角速度 Ω 旋转(图 1.2)。设在 t 时刻 A 与 Ω 之间的夹角为 γ , 经过 Δt 时间, A 转动的角度为 $\Delta\theta = |\Omega| \Delta t$, 由图 1.3 显见, 这时 A 的变化 ΔA 为

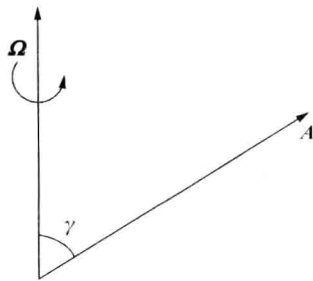


图 1.2

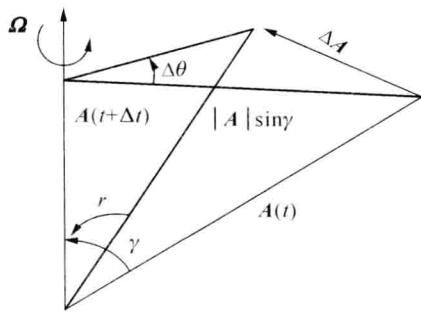


图 1.3

$$\Delta A = A(t + \Delta t) - A(t) = n |A| \Delta\theta \sin \gamma \quad (1.1.29)$$

式中 n 为 ΔA 的单位矢量。显然, 它垂直于 A 和 Ω , 由关系式

$$n = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{A}}{|\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{A}|} \quad (1.1.30)$$

决定。由于

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = n |\mathbf{A}| \sin \gamma \frac{d\theta}{dt}$$

而 $\frac{d\theta}{dt} = |\boldsymbol{\Omega}|$, 且 $|\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{A}| = |\boldsymbol{\Omega}| |\mathbf{A}| \sin \gamma$, 因此对于以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 旋转的单位矢量 $\mathbf{A}$, 有关系式

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_a = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{A} \quad (1.1.31)$$

成立。

把式(1.1.31)分别用于单位矢量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, 得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\right)_a &= \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{i} \\ \left(\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right)_a &= \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{j} \\ \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right)_a &= \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.1.32)$$

代入式(1.1.28), 并利用式(1.1.25, 1.1.26), 得到

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q} \quad (1.1.33)$$

式(1.1.33)虽然是在 $\boldsymbol{\Omega}$ 为常矢量的假定下导得的, 但是实际上, 对 $\boldsymbol{\Omega}$ 的大小和方向都发生变化的情形, 式(1.1.33)仍然适用。因为, 如果取式(1.1.33)中的 $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\Omega}$, 则有

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega}$$

而 $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} = 0$, 因此

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_r$$

也就是说, 在惯性坐标系和旋转坐标系中观察到的 $\boldsymbol{\Omega}$ 的时间变化是相同的。这说明, $\boldsymbol{\Omega}$ 的变化并不影响式(1.1.33)的成立。

式(1.1.1)中的速度和加速度都是矢量, 它们与坐标系的选择有关。为了得到惯性坐标系和旋转坐标系中速度和加速度的关系, 用位置矢量 $\mathbf{r}$ 代替式(1.1.33)中的 $\mathbf{Q}$, 得到

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r} \quad (1.1.34)$$

记 $\mathbf{v}_a = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_a$ 为惯性坐标系中的速度, $\mathbf{v} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_r$ 为相对于旋转坐标系中的速度。因此,

式(1.1.34)可写为



$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r} \quad (1.1.35)$$

也就是说,惯性坐标系中看到的速度等于旋转坐标系中看到的速度加上由于坐标系的转动而引起的速度 $\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}$ 。

与此相类似,令 $\mathbf{Q} = \mathbf{v}_a$, 代入式(1.1.33), 得到

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} \right)_a = \left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_a \quad (1.1.36)$$

式(1.1.36)右边的 $\mathbf{v}_a$ 用式(1.1.35)代入, 得到

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} \right)_a = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_r + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_r \wedge \mathbf{r} \quad (1.1.37)$$

式(1.1.37)中的最后一项除了对时间尺度很长的现象有影响外, 对于一般的大气和海洋的运动过程, 影响很小, 可以略去, 或者说可以认为 $\boldsymbol{\Omega}$ 是不变的常矢量。因此, 式(1.1.37)可以写为

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} \right)_a = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_r + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \quad (1.1.38)$$

式中: $\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_r$ 为旋转坐标系中观测到的加速度; $2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}$ 为柯里奥利 (Coriolis) 加速度; $\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})$ 为向心加速度。向心加速度项还可以改写, 如图 1.4 所示, 设 $\mathbf{R}$ 为垂直于转动轴的矢量, 其值等于物体到转动轴的距离, 由于

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R}$$

利用矢量叉乘公式

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

得到

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) = -\Omega^2 \mathbf{R} \quad (1.1.39)$$

式中 $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$ 。式(1.1.38)中, 柯氏加速度 $2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}$ 和向心加速度 $-\Omega^2 \mathbf{R}$ 是由于旋转坐标系的旋转效应引起的附加项。

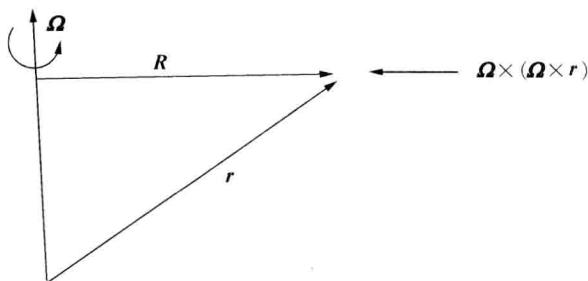


图 1.4 向心加速度

考虑到惯性坐标系和旋转坐标系中的空间导数是相同的, 并利用式(1.1.38, 1.1.39), 式(1.1.1)可以改写为(略去下标“r”)



$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} - \Omega^2 \mathbf{R} = \mathbf{g}_m - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F} \quad (1.1.40)$$

把式(1.1.40)的柯氏加速度和向心加速度移到公式的右边,得到

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} + \Omega^2 \mathbf{R} + \mathbf{g}_m - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F} \quad (1.1.41)$$

式(1.1.41)右边第一项 $-2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}$ 称为柯氏力,它有下列特性:(1) $-2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}$ 垂直于地转轴,它位于纬圈平面内;(2) $-2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}$ 垂直于运动速度 $\mathbf{v}$,它只改变运动的方向,不改变速度的大小,因此它不做功。对于北半球的观测者来说,柯氏力 $-2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}$ 是使运动的物体向右偏转的力,因此它又被称为折向力或地转偏转力,这是一种视示力。

式(1.1.41)右边第二项 $\Omega^2 \mathbf{R}$ 称为离心力,它垂直于地轴。地心引力 $\mathbf{g}_m$ 指向地心。由于地球是近似的椭球体,因此 $\mathbf{g}_m$ 并不垂直于地面。任何物体(静止的或运动的)都受到重力 $\mathbf{g}$ 的作用,这重力 $\mathbf{g}$ 是地心引力 $\mathbf{g}_m$ 和离心力 $\Omega^2 \mathbf{R}$ 的矢量和(图1.5),即

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_m + \Omega^2 \mathbf{R} \quad (1.1.42)$$

重力 $\mathbf{g}$ 在任何地点都与水平面相垂直。

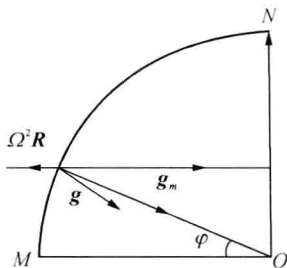


图 1.5 地心引力与重力的关系

利用式(1.1.42),由式(1.1.41)得到旋转坐标系中的运动方程为

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{g} + \mathbf{F} \quad (1.1.43)$$

至此,我们得到了旋转坐标系中的闭合方程组,即(1.1.43),(1.1.19)或(1.1.20),(1.1.22)或(1.1.23),以及(1.1.6)。

1.1.2 局地直角坐标系中的运动方程组

上面给出的大气运动方程是矢量形式,这种形式便于物理意义的解释,但是并不适合于具体计算。具体计算时,最方便的是分量形式,因此还需把运动方程写成分量形式。

有一种直角坐标系称为局地直角坐标系,简称 z 坐标。这种坐标系的坐标原点取在地球表面某点 o 处, z 轴与地面相垂直,指向天顶为正, x 轴和 y 轴组成的平面切于地面上的 o 点, x 轴向东为正, y 轴向北为正(图1.6)。这是一种随地球转动而运动的正交坐标系,它的单位矢量方向不是固定不变的,而是随地球上所在位置的变化而改变。由于 z 轴不与地转轴相重,因此地转角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 在 z 坐标系中不再是常量。由图1.7显见,它可以写成为

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\alpha} + \Omega \cos \varphi \mathbf{j} + \Omega \sin \varphi \mathbf{k}$$