21世纪高职高专规划教材

公共课系列

GONGCHENG SHUXUE JICHU

主编　蔡奎生　潘新

工程数学基础

中国人民大学出版社

21世纪高职高专规划教材·公共课系列

工程数学基础

主　编　蔡奎生　潘新
副主编　魏彦睿

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

工程数学基础/蔡奎生，潘新主编．—北京：中国人民大学出版社，2011.8
21 世纪高职高专规划教材·公共课系列
ISBN 978-7-300-14133-6

Ⅰ．①工… Ⅱ．①蔡… ②潘… Ⅲ．①工程数学-高等职业教育-教材 Ⅳ．①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 170951 号

21 世纪高职高专规划教材·公共课系列
工程数学基础
主　编　蔡奎生　潘新
副主编　魏彦睿
Gongcheng Shuxue Jichu

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	秦皇岛市昌黎文苑印刷有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2011 年 9 月第 1 版
印　　张	21.5	**印　　次**	2011 年 9 月第 1 次印刷
字　　数	462 000	**定　　价**	39.00 元

编 委 会 名 单

主　　编　蔡奎生　潘　新

副 主 编　魏彦睿

编　　委（以姓氏笔画为序）

杜秀清　杨　青　顾莹燕　顾霞芳　殷冬琴　殷建峰
曹文斌　蔡奎生　潘　新　薛佳佳　魏彦睿

preface 前　言

随着教育改革的不断发展，为满足高等职业教育对数学这一基础学科的教学要求，我国不少高校和相关教育部门已积极组织编写了多种版本的高等数学教材. 我们也组织编写了《经济数学》、《实用微积分》、《工程数学》等教材，目的也是适应高职教学的需要，但在实际教学过程中，或多或少会发现这样或那样的问题. 随着高职教育的不断深入和完善，在以培养学生实践技能为主的教育理念的影响下，对于基础学科，包括数学，如何适应这种趋势，确实是一个严峻的挑战. 为应对这一挑战，我们在充分与各专业教学的需要相联系，以及参考其他院校和教材的先进经验与先进思想的基础上，重新组织编写了《工程数学基础》一书.

本教材力求内容简单实用，并对一些传统的观念进行了力度较大的改革，以达到简化理论的叙述、推导和证明，追求直观，注重实际应用的目的. 尤其是力求将微分和积分作为一个整体有机地结合起来，使学生少走弯路. 特别是将过去的不定积分和定积分，统称为积分这一新的概念，并且将积分的定义直接和微分相联系；将过去的不定积分的一些相关内容，作为寻求原函数的技术方法或技巧来处理. 上述理念得到了中国科学院林群院士的充分肯定，他在我们的《实用微积分》一书中做了代序并作为该书的顾问.

在编写过程中，我们本着"必需、够用"的原则，对于必备的基础理论知识等方面的内容，主要给出概念的定义以及有关定理的条件和结论，一般不做出严格的推导和证明，只在必要时，给出直观而形象的解释和说明. 我们将重点放在实际计算和应用等方面，以强化学生解决实际问题的能力.

本教材共8章内容. 其中，函数、极限与连续性，导数和微分，导数的应用，积分及其应用属于必修内容；常微分方程与拉普拉斯变换，空间解析几何与多元函数微积分，行列式与矩阵，概率与数理统计初步属于选修内容. 另外，标有"*"的部分也为选修内容. 同时，本教材在每节配备了一定量的习题，与之配套的《〈工程数学基础〉学习指导书》的每章也配备了每章内容小结和自测题. 学习指导书对于上述题目均给出了参考答案，以便于学生及时对所学知识进行检验.

参加本教材编写的人员有：苏州经贸职业技术学院的蔡奎生、潘新、魏彦睿、顾莹燕、顾霞芳、曹文斌、殷冬琴、殷建峰，南京正德职业技术学院的杜秀清、杨青、薛佳佳. 全书由蔡奎生负责统稿.

本教材在策划、编写过程中，得到了学院有关领导和部门的大力关心和支持. 另外，

中国人民大学出版社对本教材的出版和发行，给予了很多帮助. 在此，我们表示衷心的感谢！

由于时间紧迫，加之作者的水平有限，错误和不当之处在所难免，还望各位同行、专家多加批评和指正.

《工程数学基础》编写组

2011 年 5 月

contents

目　录

第 1 章

函数、极限与连续性

函数是高等数学的主要研究对象，函数的极限是高等数学的重要理论基础，函数的连续性是函数的重要性质形态之一. 本章将在复习和加深函数相关知识的基础上，学习函数的极限、连续性及其有关性质，为后续内容的学习奠定基础.

1.1 函 数

1.1.1 函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.1 设 D 是一非空实数集，如果存在一个对应法则 f，使得对 D 内的每一个值 x，按法则 f，都有 y 与之对应，则这个对应法则 f 称为定义在集合 D 上的一个函数，记作

$$y=f(x),\ x\in D$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或**函数值**，D 称为**定义域**，集合 $\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为**值域**.

说明：(1) 在函数的定义中，如果对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为单值函数；如果对每个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，这样定义的函数称为多值函数. 例如由方程 $x^2+y^2=1$ 所确定的以 x 为自变量的函数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 是一个多值函数，而它的每一个分支 $y=\sqrt{1-x^2}$，$y=-\sqrt{1-x^2}$ 都是单值函数. 以后若无特别说明，本教材所说的函数都是指单值函数.

(2) 构成函数的两要素是定义域 D 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

(3) 函数的表示方法主要有三种：表格法（列表法）、图形法（图像法）、解析法（公式法）.

2. 几个特殊的函数

(1) 分段函数. 是指在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数. 分段函数的定义域是各段定义区间的并集. 如 $y=\begin{cases}3x+2, & 0<x<3 \\ x^2-1, & -2<x\leqslant 0\end{cases}$.

(2) 隐函数. 是指变量之间的关系是由一个方程来确定的函数. 如由方程 $x^2+y^2=1$ 确定的函数.

(3) 参数方程所确定的函数. 如由 $\begin{cases}x=\varphi(t) \\ y=\psi(t)\end{cases}$ ($\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，其中 t 为参数）确定的 y 与 x 之间的函数关系.

3. 函数的定义域

在实际问题中，函数的定义域要根据实际问题的实际意义确定. 当不考虑函数的实际意义时，定义域就是使得函数表达式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域. 在这种约定之下，一般地，用算式表达的函数可简记为

$$y=f(x)$$

常见解析式的定义域的求法有：

(1) 分母不能为零；

(2) 偶次根号下非负；

(3) 对数式中的真数恒为正；

(4) 分段函数的定义域应取各分段区间定义域的并集.

例 1.1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x-2}-\sqrt{x^2-1}$；(2) $y=\lg\dfrac{x-1}{2}+\sqrt{x-3}$；

(3) $y=\begin{cases}\sin x, & -1\leqslant x<2 \\ \cos x, & 2\leqslant x<3\end{cases}$.

解 (1) 要使函数有意义，必须满足 $x-2\neq 0$，且 $x^2-1\geqslant 0$，解不等式得 $|x|\geqslant 1$. 所以函数的定义域为 $\{x \mid |x|\geqslant 1 \text{且} x\neq 2\}$ 或 $(-\infty, -1]\cup[1, 2)\cup(2, +\infty)$.

(2) 要使函数有意义，必须满足 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}>0 \\ x-3\geqslant 0\end{cases}$，即 $x\geqslant 3$.

所以函数的定义域为 $\{x \mid x\geqslant 3\}$ 或 $[3, +\infty)$.

(3) 函数的定义域为 $[-1, 2)\cup[2, 3) = [-1, 3)$.

1.1.2 初等函数与点的邻域

1. 基本初等函数

(1) 常数函数：$y=C$（C 为常数）；

(2) 幂函数：$y=x^{\alpha}$ ($\alpha\in\mathbf{R}$)；

(3) 指数函数：$y=a^{x}$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)；

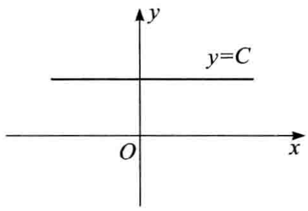
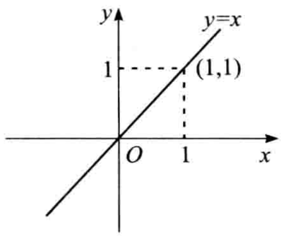
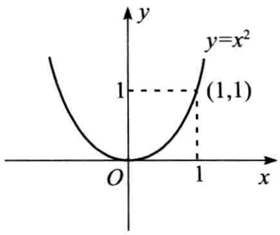
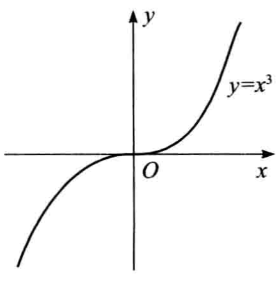
(4) 对数函数：$y=\log_{a}x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)；

(5) 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

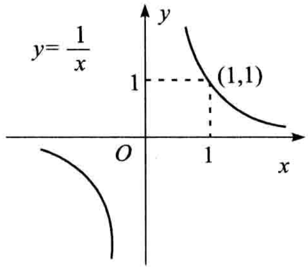
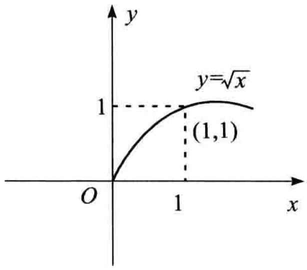
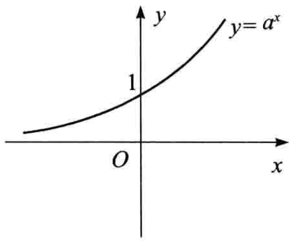
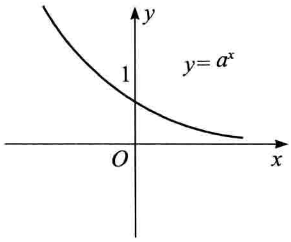
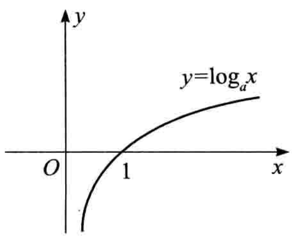
(6) 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$.

我们将以上六类函数统称为**基本初等函数**. 为了方便，我们通常把多项式 $y=a_{n}x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{1}x+a_{0}$ 也看作基本初等函数. 现将一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图像和特性列表说明，如表 1—1 所示.

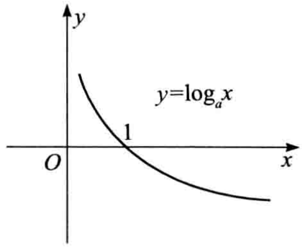
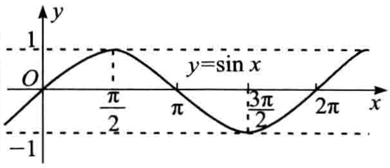
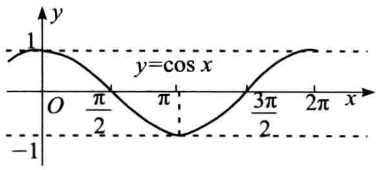
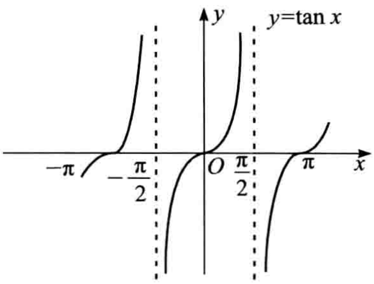
表 1—1 **基本初等函数**

函数类型	函数	定义域与值域	图像	特性
常数函数	$y=C$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\{C\}$		偶函数 有界
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{2}$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加；在 $(-\infty,0)$ 内单调减少
	$y=x^{3}$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加

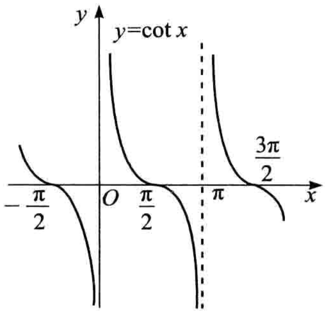
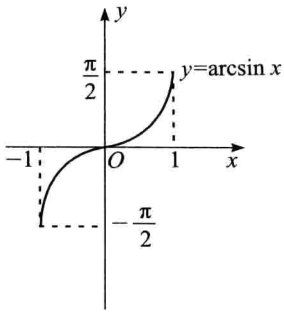
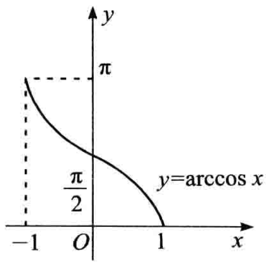
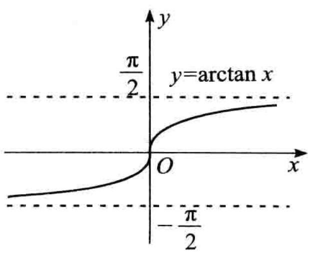
续前表

函数类型	函数	定义域与值域	图像	特性
幂函数	$y=\frac{1}{x}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$内单调减少；在$(0,+\infty)$内单调减少
	$y=\sqrt{x}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加

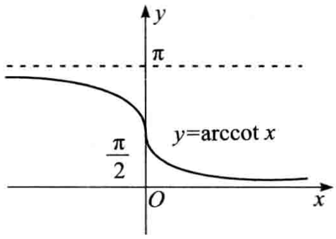
续前表

函数类型	函数	定义域与值域	图像	特性
对数函数	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数 在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调增加；在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调减少 有界 周期为 2π
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数 在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调减少；在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调增加 有界 周期为 2π
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调增加 无界 周期为 π

续前表

函数类型	函数	定义域与值域	图像	特性
三角函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 在$(k\pi, k\pi+\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$上单调减少 无界 周期为π
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数 单调增加 有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少 有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数 单调增加 有界

续前表

函数类型	函数	定义域与值域	图像	特性
反三角函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少 有界

2. 复合函数

先看这么一个例子：考查具有同样高度 h 的圆柱体的体积 V，显然其体积的不同取决于它的底面积 S 的大小，即由公式 $V=Sh$（h 为常数）确定. 而底面积 S 的大小又由其半径 r 确定，即公式 $S=\pi r^2$. V 是 S 的函数，S 是 r 的函数，V 与 r 之间通过 S 建立了函数关系式 $V=Sh=\pi r^2\cdot h$. 它是由函数 $V=Sh$ 与 $S=\pi r^2$ 复合而成的，简单地说 V 是 r 的复合函数.

定义 1.2 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域交非空，那么 y 通过中间变量 u 的联系成为 x 的函数，我们把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**. 记做 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为**中间变量**.

注意：并不是任意两个函数都能复合成一个复合函数，如 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 就不能复合成一个函数.

学习复合函数有两方面要求：一方面，会把有限个作为中间变量的函数复合成一个函数；另一方面，会把一个复合函数分解为有限个较简单的函数.

分解复合函数时应自外向内逐层分解并把各层函数分解到基本初等函数经有限次四则运算所构成的函数为止.

例 1.2 将 $y=\sin u$，$u=3x^2$ 复合成一个函数.

解 $y=\sin u=\sin 3x^2$.

例 1.3 将 $y=u^2$，$u=\tan v$，$v=5x$ 复合成一个函数.

解 $y=u^2=\tan^2 v=\tan^2 5x$.

从例 1.2、例 1.3 可以看出，复合的过程实际上是把中间变量依次代入的过程，而且由例 1.3 得出中间变量可以不限于一个.

例 1.4 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\ln(x^2+3x-10)$；(2) $y=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$.

解 (1) $y=\ln(x^2+3x-10)$ 是由 $y=\ln u$ 和 $u=x^2+3x-10$ 复合而成的.

(2) $y=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$是由 $y=\arctan u$，$u=\dfrac{1}{\sqrt{v}}$和 $v=x^2+2$ 复合而成的.

例 1.5 设 $y=f(u)$ 的定义域为 $[0, 2]$，求函数 $y=f(\ln x)$ 的定义域.

解 由复合函数的定义域知 $0\leqslant \ln x\leqslant 2$，即 $1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}^2$，所以所求函数的定义域为 $[1, \mathrm{e}^2]$.

3. 初等函数

定义 1.3 由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合运算所构成的并可用一个式子表示的函数，称为初等函数；否则称为非初等函数.

例如，$y=\sqrt{1-x^2}+\sin^2 x$，$y=\dfrac{\tan x}{1+x^3}$，$y=\lg(3x-\sqrt{\mathrm{e}^x}+1)$ 等都是初等函数. 而大部分分段函数是非初等函数.

4. 点的邻域

邻域是高等数学中一个常用的概念，为了讨论函数在一点附近的某些形态，在此我们引入数轴上一点邻域的概念.

定义 1.4 设 x_0，$\delta\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，集合 $\{x\in\mathbf{R} \mid |x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta, x_0+\delta)$，即数轴上到点 x_0 的距离小于 δ 的点的全体，称为点 x_0 的 δ **邻域**，记为 $U(x_0, \delta)$. 点 x_0、δ 分别称为该邻域的**中心**和**半径**. 集合 $\{x\in\mathbf{R} \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 称为点 x_0 的 δ **空心邻域**，记为 $\mathring{U}(x_0, \delta)$.

说明：平面上点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域是指以 P_0 为中心，以任意小的正数 δ 为半径的邻域，即集合 $\{(x, y)\in\mathbf{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$，记为 $U(P_0, \delta)$；点 P_0 的某空心邻域是指以 P_0 为中心，以任意小的正数 δ 为半径的空心邻域，记为 $\mathring{U}(P_0, \delta)$.

习题 1.1 (A)

1. 判断下列说法是否正确：

(1) 复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域即为 $u=\varphi(x)$ 的定义域；

(2) 函数 $y=\lg x^2$ 与函数 $y=2\lg x$ 相同；

(3) $y=\ln u$，$u=-x^2-1$ 这两个函数可以复合成一个函数 $y=\ln(-x^2-1)$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\lg(x-2)$；　　(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；

(3) $y=\begin{cases} x-1, & 1<x<3 \\ 3x, & 3\leqslant x<6 \end{cases}$.

3. 下列函数中，哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数又非偶函数：

(1) $y=x^2+\cos x$；　　(2) $y=x^5-\sin x$；

(3) $y=\sqrt{x}$；　　(4) $y=x^3\tan x+[f(x)+f(-x)]$.

4. 求由所给函数复合而成的函数：

(1) $y=\ln u$，$u=2x-1$；　　(2) $y=\tan u$，$u=v^2$，$v=x+3$.

5. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{x^3-1}$；　　(2) $y=\sin^2 2x$.

习题 1.1 (B)

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\ln(x+2)}{\sqrt{3-x}}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x^2-x-6}}$；

(3) $y=\sqrt{x^2-4}-\dfrac{3x}{x-5}$；　　(4) $y=\ln(\ln x)$；

(5) $y=f(x-1)+f(x+1)$，且 $f(u)$ 的定义域为 $(0, 3)$.

2. 确定下列函数的奇偶性：

(1) $y=\dfrac{x\sin x}{3+x^2}$；　　(2) $y=x^2+2^x-1$；

(3) $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$；　　(4) $y=\tan(\sin x)$.

3. 求下列函数的函数值：

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\geqslant 0\\ 2^x, & x<0\end{cases}$，求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(3)$；

(2) 设 $f(x)=x\cdot 4^{x-1}$，求 $f(-1)$，$f(t^2)$，$f\left(\dfrac{1}{t}\right)$；

(3) 设 $f(x)=2x-1$，求 $f(a^2)$，$f[f(a)]$，$[f(a)]^2$.

4. 将下列函数复合成一个函数：

(1) $y=\tan u$，$u=\ln v$，$v=3x$；　　(2) $y=\sqrt{u}$，$u=\sin v$，$v=2^x$.

5. 将下列复合函数进行分解：

(1) $y=\sin\sqrt{x-1}$；　　(2) $y=(1+2x^2)^5$；

(3) $y=\cos^3(2x+3)$；　　(4) $y=e^{\cot x}$；

(5) $y=\sqrt{\tan(x-1)}$；　　(6) $y=\cos[\cos(x^2-1)]$；

(7) $y=[\lg(\arcsin x^3)]^3$；　　(8) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$.

1.2 极　限

极限是高等数学中一个重要的基本概念，其描述的是在自变量的某个变化过程中函数的变化趋势．本节中，我们先讨论数列的极限，然后再讨论函数的极限.