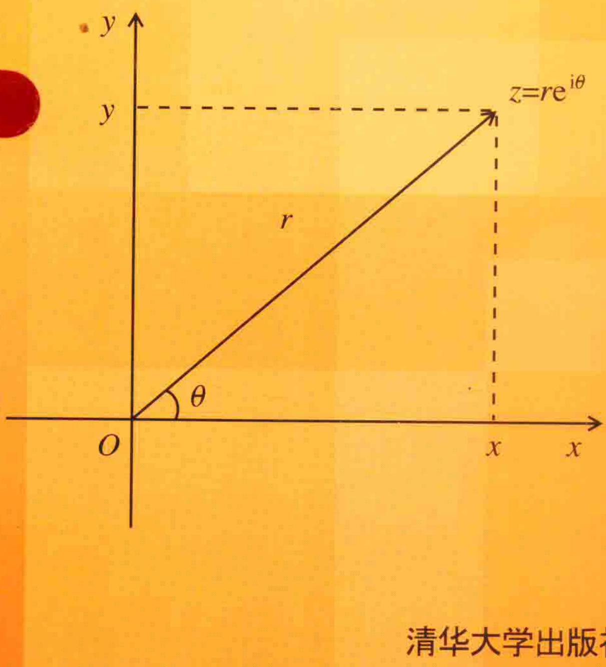
复变函数与积分变换

河北科技大学理学院数学系　编

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$z=x+iy$$



清华大学出版社

复变函数与积分变换

河北科技大学理学院数学系 编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书根据教育部高等院校复变函数与积分变换课程的基本要求，依据工科数学《复变函数与积分变换教学大纲》，并结合本学科的发展趋势，在积累多年教学实践的基础上编写而成. 内容选取以“必需、够用”为度，严密性次之，旨在培养工科学生的数学素养，提高应用数学工具解决实际问题的能力.

全书共分 8 章，包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数理论及其应用、共形映射、Fourier 变换、Laplace 变换等.

本书适合高等院校工科各专业，尤其是自动控制、通信、电子信息、测控、机械工程、材料成型等专业作为教材，也可供工程技术人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/河北科技大学理学院数学系编. --北京：清华大学出版社，2014
ISBN 978-7-302-36801-4

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①河… Ⅲ. ①复变函数 ②积分变换 Ⅳ. ①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 124303 号

责任编辑：陈 明
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：宋 林

出版发行：清华大学出版社
  网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
  地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编**：100084
  社总机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
  投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
  质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：三河市君旺印务有限公司
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：170mm×230mm **印 张**：11 **字 数**：219 千字
版 次：2014 年 8 月第 1 版 **印 次**：2014 年 8 月第1 次印刷
印 数：1～3000
定 价：20.00 元

产品编号：059827-01

前言
FOREWORD

复变函数与积分变换是运用复变函数的理论知识解决微分方程和积分方程等实际问题的一门课程. 在工科的教育教学体系中，本课程属于基础课程，在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力等方面起着重要的作用. 从历史上看，复变函数理论一直伴随着科学技术的发展，从实际需要中提炼数学理论并进行研究，并反过来促进科学技术的发展. 通过学习大家会发现，复变函数除了其严谨且优美的理论体系外，在应用方面尤其有着独到的作用，它既能简化计算，又能体现明确的物理意义，在许多领域有广泛应用，如电气工程、通信与控制、信号分析与图像处理、机械系统、流体力学、地质勘探与地震预报等工程技术领域. 通过本课程的学习，不仅可以掌握复变函数与积分变换的基础理论及工程技术中的常用数学方法，同时还为后续有关课程的学习奠定了必要的数学基础.

本书基于有限的课时，对复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数理论及其应用、共形映射、Fourier 变换和 Laplace 变换等内容作了较为系统的介绍. 在概念阐述上力求做到深入浅出，突出基本结论和方法的运用，在知识体系完整性的基础上，避免了一些太过专业的推导过程，尽量做到数学过程简单易懂，结论形式易于运用，形成了自己的特色.

在编写过程中突出了以下几个特点：

(1) 注重强调理论的产生背景和其中蕴含的思想方法，注重理论联系实际，数学过程力求精练. 在不影响内容完整性和系统性的基础上，去掉了传统课本中的一些较难而又与应用没有紧密关联的知识点，使学生从枯燥的学习过程中摆脱出来，轻松入门.

(2) 对基本概念的引入尽可能联系实际，突出物理意义；基本结论的推导过程深入浅出、循序渐进；基本方法的阐述具有启发性，使学生能够举一反三，融会贯通.

(3) 例题和习题丰富，有利于学生掌握所学内容，提高分析问题和解决问题的能力.

本书第 1、3、5 章由姚卫编写，第 2、4、6 章由杨贺菊编写，第 7 章由彭继琴编写，

第 8 章由于向东编写. 沈冲对部分章节和插图进行了完善处理. 全书由姚卫最后统稿. 本书的编写得到清华大学出版社的大力支持，河北科技大学理学院数学系全体任课教师也给予了很多帮助和指导，在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，错漏在所难免，恳请专家、同行和读者批评指正.

编　者[①]

2014 年 5 月

---

① E-mail: yaowei0516@163.com

目录
CONTENTS

复数与复变函数

所谓复变函数,就是指自变量和因变量都是复数的函数,其主要研究对象是解析函数.作为复变函数理论的开篇,本章将介绍复数与复平面、复数的基本运算、复平面上的区域、复变函数的极限与连续等基本概念.

1.1 复数及其代数运算

1. 复数

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 的数,称为**复数**,其中 i 满足 $\mathrm{i}^2=-1$,称为**虚数单位**,x 和 y 均是实数,分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**,记为 $x=\mathrm{Re}(z)$,$y=\mathrm{Im}(z)$.在本书最后两章中,为与工程应用上的记号一致,我们也将虚数单位记为 j.

规定两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ **相等**当且仅当它们的实部和虚部分别对应相等,即 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$.

规定 $\mathrm{i}\cdot 0=0$,这样虚部为零的复数可以看作是一个实数,因此全体实数是全体复数的一部分.另外,虚部不为零的复数称为**虚数**,实部为零但虚部不为零的复数称为**纯虚数**.

2. 复数的代数运算

设复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$,$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,则复数四则运算规定如下:

(1) $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)\pm\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$;

(2) $z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$;

(3) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\ (z_2\neq 0)$.

容易验证,复数的四则运算满足与实数的四则运算相同的运算规律,运算过程相当于将式子中的 i 看成参数后进行计算整理.

3. 共轭复数

复数 $x+\mathrm{i}y$ 和 $x-\mathrm{i}y$ 称为一对互为**共轭的复数**,即复数的共轭是相互的.复数 z

的共轭复数记为$\bar{z}$，即$\overline{x+iy}=x-iy$. 共轭复数具有如下性质：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$；$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$；$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}(z_2\neq 0)$；

(2) $\bar{\bar{z}}=z$；

(3) $z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$；

(4) $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$，$\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$.

例 1.1.1 设 $z_1=5-5i$，$z_2=-3+4i$，求$\frac{z_1}{z_2}$与$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-5i}{-3+4i}=\frac{(5-5i)(-3-4i)}{9+16}=\frac{-35-5i}{25}=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i$，

从而

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i.$$

例 1.1.2 设 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$，求 $\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$与 $z\bar{z}$.

解 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=\frac{i}{i(-i)}-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=i-\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$，所以

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{3}{2},\quad \mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{2},\quad z\bar{z}=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

例 1.1.3 设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，证明 $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

证明
$$\begin{aligned}z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2&=(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)+(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)\\&=(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)\\&\quad+(x_1x_2+y_1y_2)+i(-x_2y_1+x_1y_2)\\&=2(x_1x_2+y_1y_2)=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).\end{aligned}$$

或者，由$\overline{\bar{z}_1z_2}=\bar{\bar{z}}_1\,\bar{z}_2=z_1\bar{z}_2$，得 $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

1.2 复数的几何表示

1. 复平面

从复数的定义可以看出，一个复数 $z=x+iy$ 实际上可以由一对有序实数(x,y)唯一确定. 因此，如果把平面上的点(x,y)与复数 $z=x+iy$ 对应起来，就建立了平面上全部的点和全体复数之间的一一对应关系.

由于 x 轴上的点和 y 轴上非原点的点分别对应着实数和纯虚数，因而在复变函数中通常称 x 轴为**实轴**，称 y 轴为**虚轴**，这样表示复数 z 的平面称为**复平面**或者 **z 平面**.

引入复平面后，我们就在“数”与“点”之间建立了一一对应关系．为了方便起见，今后不再区分“数”和“点”及“数集”和“点集”，例如，我们常说“点 $1+\mathrm{i}$”，“顶点为 z_1，z_2，z_3 的三角形”，等等．

如图 1.1 所示，在复平面上，从原点到点 $z=x+y\mathrm{i}$ 所引的向量与这个复数 z 也构成一一对应关系，这种对应关系使得复数的加减法和向量的加减法之间保持一致，如图 1.2 所示．

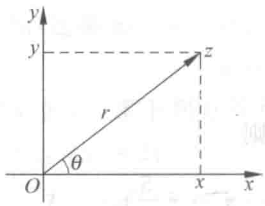


图　1.1

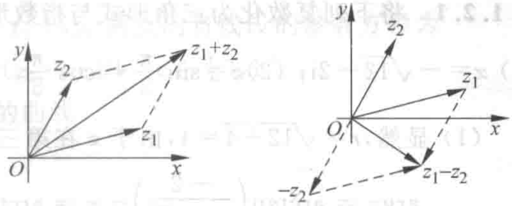


图　1.2

2. 复数的模与辐角

在图 1.1 中，表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 也可以借助于点 z 的极坐标 r 和 θ 来确定，向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度称为复数 z 的**模**，记为 $|z|$ 或 r，即 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$．

显然，对于任意复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 均有

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|.$$

另外，根据向量的运算及几何知识，可以得到下面两个重要的不等式：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|\quad（三角形两边之和大于等于第三边），$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|\quad（三角形两边之差小于等于第三边）.$$

由图 1.2 可见，$|z_1-z_2|$ 表示点 z_1 和 z_2 的距离，这个几何意义在复变函数特别是在积分理论中特别重要．

向量 $\overrightarrow{Oz}$ 与实轴正向间的夹角 θ 称为复数 z 的**辐角**，记为 $\theta=\mathrm{Arg}z$．由于任一非零复数 z 均有无穷多个辐角，用 $\arg z$ 表示 z 落在 $(-\pi,\pi]$ 中的那个辐角，并称之为复数 z 的**辐角主值**．于是

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

注意，当 $z=0$ 时，其模为零，辐角无意义．而当 $z\neq0$ 时，$\arg z$ 与 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 有如下关系：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & z\text{ 位于第一、四象限},\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & z\text{ 位于第二象限},\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & z\text{ 位于第三象限}.\end{cases}$$

由直角坐标与极坐标的关系，我们还可以用复数的模与幅角来表示非零复数 z，即有

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \tag{1.1}$$

称(1.1)式为复数的**三角形式**. 再利用欧拉(Euler)公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，又可得到

$$z = re^{i\theta}, \tag{1.2}$$

称(1.2)式为复数的**指数形式**.

例 1.2.1 将下列复数化为三角形式与指数形式：

(1) $z=-\sqrt{12}-2i$；(2) $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+i\cos\dfrac{\pi}{5}$.

解 (1) 显然，$r=\sqrt{12+4}=4$，由于 z 在第三象限，则

$$\arg z = \arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi = \arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi = -\frac{5}{6}\pi.$$

因此，z 的三角形式和指数形式分别为

$$z = 4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right] = 4e^{-\frac{5}{6}\pi i}.$$

(2) 显然，$r=1$，又

$$\sin\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{10},$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{10}.$$

因此，z 的三角形式和指数形式分别为

$$z = \cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3}{10}\pi i}.$$

例 1.2.2 将 $z=1-\cos\theta+i\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 化为三角形式.

解

$$\begin{aligned} z &= 1-\cos\theta+i\sin\theta \\ &= 2\sin^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ &= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

3. 曲线的复数方程

很多平面曲线能用复数形式的方程来表示，而且形式较简洁，所体现的几何意义更直观.

例 1.2.3 将通过 $z_1=x_1+iy_1$ 和 $z_2=x_2+iy_2$ 两点的直线方程表达成复数

形式.

解 由解析几何的知识,通过点(x_1,y_1)和(x_2,y_2)两点的直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \end{cases} \quad t \in \mathbf{R},$$

因此,它的复数形式的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in \mathbf{R}.$$

由此得知,连接$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$和$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$两点的直线段的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in [0,1].$$

例 1.2.4 求下列方程所表示的曲线:

(1) $|z+\mathrm{i}|=2$;

(2) $|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$;

(3) $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=4$.

解 (1)方程$|z+\mathrm{i}|=2$表示所有与点$-\mathrm{i}$距离为2的点的轨迹,即以$-\mathrm{i}$为中心、以2为半径的圆.设$z=x+\mathrm{i}y$,则方程变为$x^2+(y+1)^2=4$.

(2) 方程$|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$表示到点$2\mathrm{i}$和-2距离相等的点的轨迹,即为连接$2\mathrm{i}$和-2的线段的垂直平分线,其直角坐标方程为$y=-x$.

(3) 设$z=x+\mathrm{i}y$,则$\mathrm{i}+\bar{z}=x+(1-y)\mathrm{i}$,从而$\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=1-y$,所以方程$\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=4$所表示的曲线是平行于$x$轴的直线$y=-3$.

4. 复球面

复数还有一种几何表示法,它是借用地图制图学中将地球投影到平面上的测地投影法,建立起复平面与球面上的点之间的对应,下面着重说明引入无穷远点的合理性.

取一个在原点O与z平面相切的球面,通过点O作一垂直于z平面的直线与球面交于点N,N称为北极,O为南极(如图1.3所示).现在用直线段将N与z平面上一点z相连,此线段交球面于一点P,这样就建立起了球面上的点(不包括北极点N)与复平面上的点之间的一一对应关系.

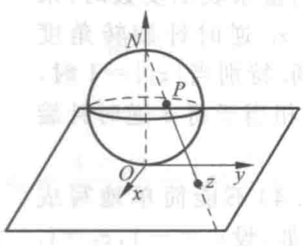


图 1.3

考虑 z 平面上一个以原点为中心的圆周 C，在球面上对应的也是一个圆周 Γ(即是纬线). 当圆周 C 的半径越大时，圆周 Γ 就越趋于北极 N. 因此，北极 N 可以看成是与 z 平面上的一个模为无穷大的假想点相对应，这个假想的**唯一**的点称为**无穷远点**，并记为∞. 复平面加上点∞后称为**扩充复平面**，与它对应的就是整个球面，称为**复球面**. 简单地说，复球面是扩充复平面的一个几何立体模型.

关于这个唯一的"新数"∞，应作如下几点规定：

(1) 运算$\infty\pm\infty, 0\cdot\infty, \dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}$无意义；

(2) 当 $a\neq\infty$时，$\dfrac{\infty}{a}=\infty, \dfrac{a}{\infty}=0, \infty\pm a=a\pm\infty=\infty$；

(3) 当 $b\neq 0$ 时，$\infty\cdot b=b\cdot\infty=\infty, \dfrac{b}{0}=\infty$；

(4) ∞的实部、虚部及辐角都无意义，$|\infty|=+\infty$；

(5) 复平面上每一条直线都通过点∞.

1.3 复数的乘幂与方根

1. 乘积与商

设有两个复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1), z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，则

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned} \tag{1.3}$$

于是

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|, \quad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2. \tag{1.4}$$

从而有下面的定理.

定理 1.3.1 两个复数的乘积的模等于它们的模的乘积，两个复数的乘积的辐角等于它们辐角的和.

如图 1.4 所示，当利用向量来表示复数时，乘积 z_1z_2 对应的向量由向量 z_1 逆时针旋转角度 $\mathrm{Arg}z_2$ 并伸长到$|z_2|$倍所得到. 特别当$|z_2|=1$ 时，乘法只相当于旋转. 例如，$\mathrm{i}z$ 相当于将 z 逆时针旋转$90°$.

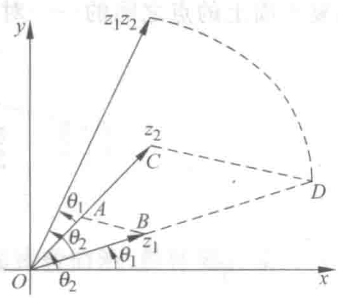


图 1.4

需要注意的是，公式(1.4)不能简单地写成 $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$. 例如，设 $z_1=-1, z_2=\mathrm{i}$，则 $z_1z_2=-\mathrm{i}, \arg z_1=\pi, \arg z_2=\dfrac{\pi}{2}$，而 $\arg(z_1z_2)=$

$-\frac{\pi}{2}$，$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2-2\pi$.

设有两个复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，如果 $z_2\neq0$，则$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[(\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]$. 于是

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

从而有下面的定理.

定理 1.3.2 两个复数的商的模等于它们的模的商，两个复数的商的辐角等于它们辐角的差.

当利用向量来表示复数时，商$\frac{z_1}{z_2}$对应的向量由向量 z_1 顺时针旋转角度 $\mathrm{Arg}z_2$ 并缩短到$|z_2|$倍得到.

复数的乘积和除法运算如果用指数形式来表达，则计算过程满足实数中的运算法则，即若 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则 $z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$，$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$.

例 1.3.1 已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$ 和 $z_2=2+\mathrm{i}$，求第三个顶点.

解 如图 1.5 所示，将表示 z_2-z_1 的向量绕 z_1 逆时针(或顺时针)旋转$\frac{\pi}{3}$就得到向量 z_3-z_1，于是

$$\begin{aligned}z_3-z_1&=(z_2-z_1)\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}=(1+\mathrm{i})\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i},\end{aligned}$$

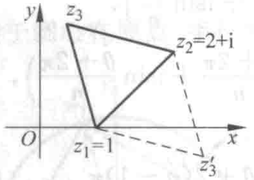


图 1.5

因此

$$z_3=\frac{3\mp\sqrt{3}}{2}+\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

2. 乘幂与开方

公式(1.3)可推广到多个复数的情况，特别地，当 $z_1=z_2=\cdots=z_n=z$ 时，有

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \tag{1.5}$$

当 $r=1$ 时,就得到了棣莫弗(De Moivre)公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta. \tag{1.6}$$

事实上,公式(1.6)对任意整数 n 都成立,请读者自行证明.

例 1.3.2 求 $\cos 3\theta$ 及 $\sin 3\theta$ 用 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 表示式.

解 由棣莫弗公式,有

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta,$$

因此

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$
$$\sin 3\theta = -\sin^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta.$$

我们知道,一个正实数的二次方根共有两个.如果将正实数看成复数,则其二次方根至少也有两个.实际上,后面将会看到,可以对任意复数求 n 次方根,而且每一个非零的复数都有 n 个相异的根.

设复数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 n 次方根为 $w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,则根据公式(1.6),有

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

于是

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

故 $\rho=r^{\frac{1}{n}}$,$\varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}$,即

$$w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

通过分析就可以得到 n 个相异的根

$$w_0 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right),$$
$$w_1 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right),$$
$$\vdots$$
$$w_{n-1} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

当 k 以其他整数代入时,这些根又重复出现,例如当 $k=n$ 时,有

$$w_n = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right) = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right) = w_0.$$

从几何上看,z 的 n 个根作为顶点构成一个以原点为中心、$\sqrt[n]{|z|}$ 为半径的圆的内接正 n 边形.

例 1.3.3 化简$(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$.

解 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n&=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^n+(\sqrt{2})^n\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^n\\&=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right)\\&=2^{\frac{n+2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}.\end{aligned}$$

例 1.3.4 计算$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$的值.

解 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),\quad k=0,1,2,3,$$

即

$$\begin{aligned}w_0&=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right),\\w_1&=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right),\\w_2&=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{16}\right),\\w_3&=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{16}\right).\end{aligned}$$

如图 1.6 所示,这四个根是内接于圆心在原点、半径为$\sqrt[8]{2}$的圆的正方形的四个顶点.

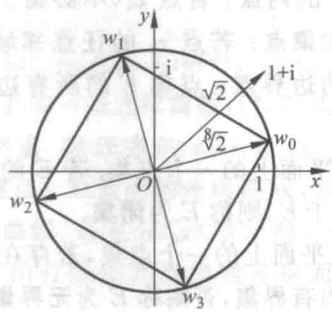


图 1.6

最后举例说明复数乘除法的一个应用.

例 1.3.5 求证：三个复数 z_1, z_2, z_3 成为一个等边三角形的三个顶点的充要条件是 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$.

证明 $\triangle z_1z_2z_3$ 是等边三角形的充要条件是向量 z_2-z_1 绕 z_1 旋转 $\pm\frac{\pi}{3}$ 即得到向量 z_3-z_1，也就是

$$z_3-z_1=(z_2-z_1)\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi}{3}\mathrm{i}},$$

从而

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

所以

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

两边平方后整理即得

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1.$$

1.4 平面点集与区域

本节将讲述复平面上的一些点集，这对于复变函数理论的严密性非常重要.

1. 几个基本概念

定义 1.4.1 由不等式 $|z-z_0|<\rho$ 所确定的平面点集(以下简称点集)，是以 z_0 为中心、以 ρ 为半径的圆的内部，称为点 z_0 的 **ρ-邻域**，记为 $N_\rho(z_0)$；称 $0<|z-z_0|<\rho$ 所确定的点集为 z_0 的**去心 ρ-邻域**，记为 $N_\rho^\circ(z_0)$.

定义 1.4.2 设 E 为复平面上的一个点集，z_0 是复平面上一点. 若存在 z_0 的某邻域全在 E 中，则称 z_0 为 E 的**内点**；若点 z_0(不必属于 E)的任意去心邻域都含有属于 E 的点，则称 z_0 为 E 的**聚点**；若点 z_0 的任意邻域同时含有属于 E 的点和不属于 E 的点，则称 z_0 为 E 的**边界点**；点集 E 的所有边界点组成的集合称为 E 的**边界**.

定义 1.4.3 设 E 为复平面上的一个点集. 若 E 的所有点均为内点，则称 E 为**开集**；若 E 的每个聚点都属于 E，则称 E 为**闭集**.

定义 1.4.4 设 E 为复平面上的一个点集，若存在正实数 M，使得对于任意的 $z\in E$ 都有 $|z|\leqslant M$，则称 E 为**有界集**，否则称 E 为**无界集**.

2. 区域

定义 1.4.5 若非空点集 D 满足下列两个条件：