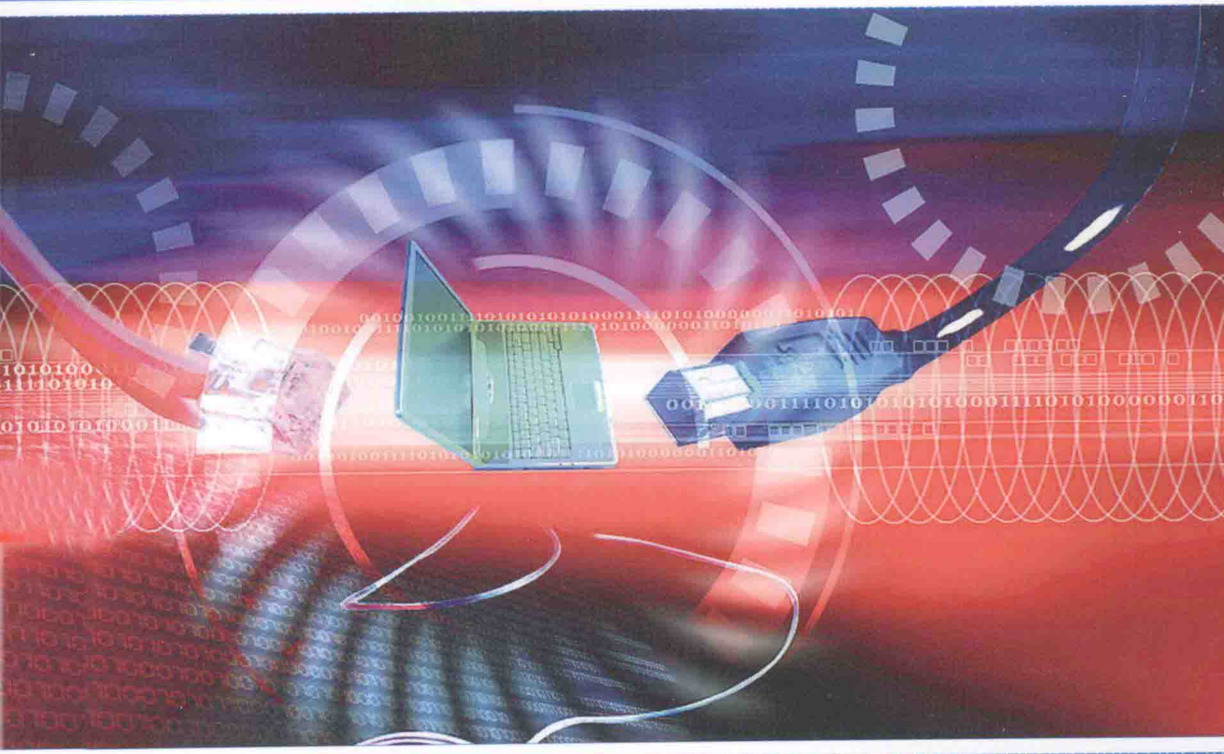
高等院校信息类专业基础教材

数字信号处理简明教程

◎宋 伟 编著



中央民族大学出版社
China Minzu University Press

高等院校信

DIGITAL SIGNAL PROCESSING

数字信号处理简明教程

◎ 宋 伟 编著

中央民族大学出版社
China Minzu University Press

图书在版编目（CIP）数据

数字信号处理简明教程/宋伟编著. —北京：中央民族大学出版社，2013.10

ISBN 978-7-5660-0515-1

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①宋… Ⅲ. ①数字信号处理—高等学校—教材 Ⅳ. ①TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 238752 号

数字信号处理简明教程

编　　著	宋　伟
责任编辑	满福玺
封面设计	布拉格
出 版 者	中央民族大学出版社 北京市海淀区中关村南大街 27 号　　邮编：100081 电话：68472815（发行部）　传真：68932751（发行部） 68932218（总编室）　68932447（办公室）
发 行 者	全国各地新华书店
印 刷 者	北京九州迅驰传媒文化有限公司
开　　本	787×1092（毫米）　1/16　印张：14.25
字　　数	220 千字
版　　次	2014 年 5 月第 1 版　2014 年 5 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5660-0515-1
定　　价	45.00 元

前　　言

数字信号处理是信息类专业学生必修课程，但该课程内容多、学时短，是讲授该课程教师面临的现实问题。同时，由于学生基础知识有所差异，在学习该课程时，学生有时很难把握重点、难点，从而学习过程中表现较为迷茫。本书编者长期为本科生和研究生讲授数字信号处理这门课程，为了在有限学时中能将重点内容突出，并根据学生特点和基础知识结构，给出能够让学生快速掌握数字信号处理的基本思想、方法，本书作者在研究了大量经典教材的基础上，参考了已有教材中内容结构安排和知识脉络后，进行了数字信号处理相关内容的精简和部分内容的合并归纳，故编写了这本简明教程。

本书内容如下：第一章讲授时域离散信号与时域离散系统；第二章讲授 Z 变换和离散时间傅立叶变换；第三章讲授离散傅立叶变换；第四章讲授快速傅立叶变换；第五章讲授 FIR 滤波器基本结构及其设计方法；第六章讲授 IIR 滤波器基本结构及其设计方法；第七章讲授有限字长效应。

编者特别感谢和自己一起度过数字信号处理这门课程的同学们，是他们的求知欲望让编者更加努力工作，从而促使笔者完成了本书的撰写。

本书还得到中央民族大学“985”建设经费的支持，这里一并表示感谢！

由于编者水平有限，书中错误及不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

目　录

第 1 章　时域离散信号和时域离散系统

1.1　本章要讨论的问题

1.什么是离散时间信号？

2.离散时间信号能够分成几类？

3.具有哪些典型的离散时间序列，具有什么特点？

4.什么是线性时不变系统，因果系统，稳定系统？

5.什么是时域抽样定理？其恢复过程是如何进行的？

1.2　引言

随着电子设备类型的增多，以及信号处理技术的发展，可获得的信号数量、种类也在发生着变化，单一信号参数获取的情况逐渐被多变量获取而代替。根据信号中含有自变量的个数的不同，信号可分为一维信号，二维信号，多维信号。如温度信号、声音信号等，仅有一个自变量，则称为一维信号；如数字图像信号或者数字视频图像，有两个以上的自变量，则称为多维信号。且自变量的类型相对较为丰富，如时间、距离、温度、位置等。常规情况下，时间成为了研究类型较多的自变量，主要关注信号随着时间的改变而存在的趋势。自然界存在的信号大部分以连续模型形式存在，因此根据自变量和函数的取值的连续和离散情况，信号可分为以下三种。

如果信号自变量和函数都是连续值，则称这种信号为时域连续信号或模拟信号，例如压力信号、温度信号、语音信号等；如果自变量取离散值，而函数值取连续值，则称这种信号为时域离散信号，离散信号通常来源于对模拟信号的采样；如果信号的函数值和自变量均取离散值，则称为数字信号。即在离散信号的基础上将幅值也进行量化，得到离散序列，则得到的是数字信号。

和信号的连续与否的分类情况类似，系统也可按照系统的输入输出信号的类型，分为模拟系统、时域离散系统和数字系统。信息技术的发展使得模拟系统和数字系统很少单独存在，很多是将模数进行有效结合，开发出混合系统，从而更加适应所处理信号的类型。

数字信号处理最终处理的是量化编码之后的数字信号，但为了研究方便，使研究过程中能够将原理清晰地展示出来，书中主要考虑离散时间信号与系统。数字信号与离散时间信号之间的区别就是是否对离散信号进行量化编码。由于量化存在不可逆误差，因此和离散信号相比，数字信号存在误差。

1.3 离散时域信号

在“信号与系统”中，很多时候针对的是自变量和函数值都是连续值的情形，

模拟信号，自然界存在的信号一般均是模拟信号，为了对模拟信号进行有效和简单处理，通过对它进行等间隔采样就获得了时域离散信号。

假设模拟连续信号为 $x_a(t)$，对其进行等间隔采样，采样间隔为 T，则可得到：

$$x(n)=x_a(t)|_{t=nT}=x_a(n\mathrm{T}) \qquad -\infty<n<\infty,\ \ n\in Z \tag{1.3.1}$$

这里 $x(n)$称为时域离散信号，或者离散序列，其中 n 取整数，将 $n=\cdots-2,-1,0,1,2,3,\cdots$代入上式，得到：

$x(n)=\{\cdots,\ x_a(-\mathrm{T}),\ x_a(0),\ x_a(\mathrm{T}),\ x_a(2\mathrm{T}),\ \cdots\}$；

可见，$x(n)$是一个有序的数字序列，需要强调的是，序列号 n 必须取整数。当 n 取非整数时，该序列表现无定义。时域离散信号有三种表示方法：

（1）公式表示法

序列的变化趋势能够用公式进行描述，或者序列在某一个时刻的值能够精确给出。例如指数序列可用如下形式表示：

$x(n)=a^{|n|} \qquad 0<a<1,\quad -\infty<n<+\infty$

（2）集合表示法

时域离散信号（序列）是一个有序的数的集合，用符号$\{\cdot\}$表示，即

$x(n)=\{x_n，n=\cdots，-2，-1，0，1，2，\cdots\}$；

例如，一个有限长序列可表示为：

$x(n)=\{1，2，1，1，2，1；n=0，1，2，3，4，5\}$；

也可简单的表示为：

$x(n)=\{\underline{1}，2，1，1，2，1\}$；

通常需要在 n=0 时刻的采样值进行标记，一般采用箭头表示。

（3）图形表示法

例如，时域离散信号 $x(n)=\sin(\pi n/5)$，n=5,−4，⋯−1，0，1⋯，4，5，图 1.3.1 就是它的图形表示。

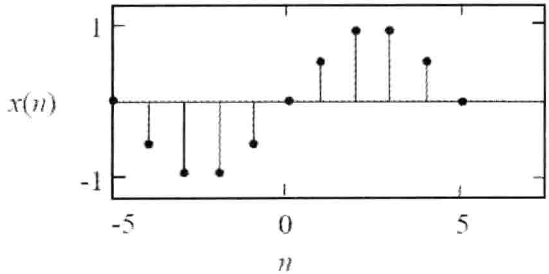


图 1.3.1　$x(n)=\sin(\pi n/5)$的波形图

图形表示法较其他两种方法更为直观，能够直接看到各采样点幅值的大小，但画图过程较为麻烦。需在标示竖线顶端加上小黑点，但图形表示法无法从图形中清晰看到幅值的变化趋势，同时无法得到公式解。

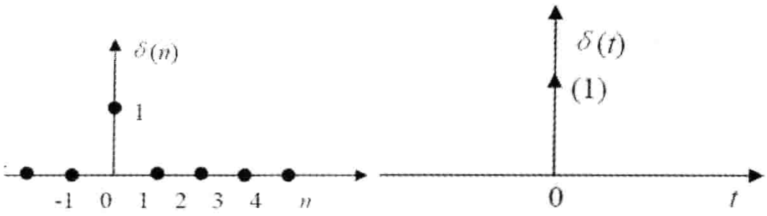
实际中使用过程中，应根据实际使用情况选择合适的方法，而无固定的表达方法。集合法和波形图法通常用来表示一般序列，如一些实际信号采样的序列，或者规律不明显的数据，公式法较多地用来表示有确定序列值的方法。

1.3.1　常用的典型序列

1.单位采样序列 $\delta(n)$

$$\delta(n)=\begin{cases}1\cdots n=0\\0\cdots n\neq 0\end{cases} \tag{1.3.2}$$

和“信号与系统”中的单位脉冲函数 $\delta(t)$类似，单位采样序列 $\delta(n)$，或亦称单位抽样序列或单位脉冲序列，其基本特点是仅在 n=0 时有意义，且取值为 1，其余均为零。但单位脉冲函数在 t=0 时，取值为无穷大，$t\neq0$ 时取值为零，对时间 t 的积分为 1。但实际情况下，只有单位冲击序列，而无单位脉冲函数，因为单位冲激函数仅仅是数学上的概念，是一个奇异信号，无实际意义。单位采样序列和单位冲激信号如图 1.3.2 所示。



(a)单位脉冲序列　　(b)单位冲激信号

图 1.3.2　单位采样序列和单位冲激信号

这里给出 matlab 程序：

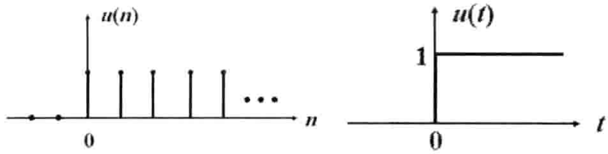
MATLAB 程序如下：

```
n=-10:10;                          %取点个数
x=[zeros(1,10),1,zeros(1,10)];     %定义序列
stem(n,x,'fill');                  %二维杆状图
grid on                            %网格绘制
```

2.单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n)=\begin{cases}1\cdots n\geqslant 0\\ 0\cdots n<0\end{cases} \tag{1.3.3}$$

“信号与系统”中讲到了单位阶跃函数，单位阶跃函数与单位阶跃序列的关系，正如单位抽样函数和单位抽样序列之间的关系。单位阶跃函数在 t=0 时无实际意义，是一种数学上的概念，为了表达的方便而使用。但单位阶跃序列在 n=0 时是有意义的。单位阶跃序列如图 1.3.3 所示。



(a)单位阶跃序列　　(b)单位阶跃函数

图 1.3.3　单位阶跃序列和单位阶跃函数

另外，由“信号与系统”可知，任何一个函数都可以用单位抽样函数的移位加权和来描述。同样的，任何一个序列都可以用单位抽样序列的移位加权和来表达。

$\delta(n)$和 $u(n)$之间的有如下关系，且相互之间可以表示如下：

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{1.3.4}$$

$$u(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m) \tag{1.3.5}$$

令 $n-m=k$，代入式（1.3.5）得：

$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k) \tag{1.3.6}$$

更进一步推广：

$$u(n-k)=\begin{cases}1 & n\geqslant k\\ 0 & n<k\end{cases} \tag{1.3.7}$$

Matlab 程序如下：

```
n=-10:10;                        %取点个数
x=[zeros(1,10),ones(1,11)];      %定义序列
stem(n,x,'fill');                %二维杆状图
grid on;                         %网格绘制
```

另外，Matlab 可以通过撰写函数进行表示：如

```
function y=impDT(n)
y=(n==0);                  %当参数为 0 时冲激为 1,否则为 0
```

3.矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其它}n\end{cases} \tag{1.3.8}$$

其中，N 称为矩形序列的长度。当 N=4 时，$R_4(n)$的波形如图 1.3.4 所示。

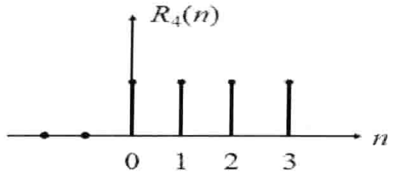


图 1.3.4　矩形序列

矩形序列可用单位阶跃序列表示，即矩形序列是两个单位阶跃序列的差，点数 N 可由单位阶跃序列确定，这就说可通过控制两个单位阶跃序列的序列号，来选择一段序列值。如下式：

$$R_N(n)=u(n)-u(n-\mathrm{N}) \tag{1.3.9}$$

由于任意序列均可用单位采样序列的移位加权和来描述，因此，矩形序列可用单位采样序列表示，如下式：

$$R_N(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\delta(n-k) \tag{1.3.10}$$

矩形序列是较为重要的序列，在描述理想滤波器特性时，常会采用矩形序列对信号进行过滤，因此本书中需要对矩形序列的各种特性进行充分的分析、了解和掌握。

Matlab 程序如下：

```
N = -10:10;                                %取点个数
x=[zeros(1,10),ones(1,5),zeros(1,6)];      %定义序列
stem(n,x,'fill');                          %二维杆状图
grid on;                                   %网格绘制
```

也可通过编写函数进行：

```
function y=uDT(n)
y = n >= 0;                                %当参数为非负时输出 1
```

4.实指数序列

$x(n)=a^n u(n)$，a 为实数　　　　（1.3.11）

实指数序列的变化趋势与指数大大小和符号有关，如果指数$|a|<1$，则指数序列值是收敛的，即 $x(n)$的幅度随 n 的增大而减小；反义，如果$|a|>1$，则指数序列是发散序列。

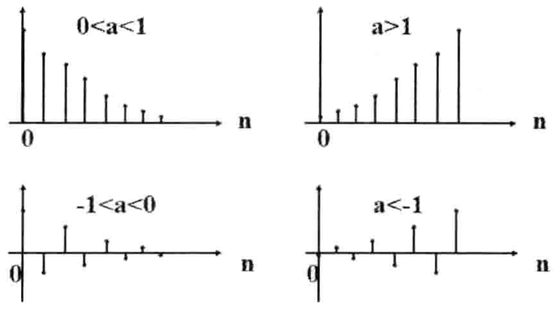


图 1.3.5　实指数序列

Matlab 程序是：

```
n=0:n1;                    % n1 为确定的序列长度
x=a.^n;                    %  x(n) =a^n u(n)，a 为实数
```

5.正弦序列

$x(n)=\sin(\omega n)$

其中，ω 是正弦序列的数字（域）频率，单位是弧度（rad），它表示序列变化的快慢，或者说表示相邻两个序列值之间变化的弧度数。这里注意和模拟域角频率进行区别开来，模拟角频率 Ω 的单位是弧度/秒。

如果正弦序列是由模拟信号 $x_a(t)$采样得到的，那么

$x_a(t)=\sin(\Omega t)$；

$x(n)=x_a(t)|_{t=nT}=\sin(\Omega n\mathrm{T})=\sin(\omega n)$；

因此得到数字频率 ω 与模拟角频率 Ω 之间的关系为

$\omega=\Omega\mathrm{T}$　　　　（1.3.12）

上式是模拟域和数字域之间的关系描述式，它表示凡是由模拟信号采样得到的序列，模拟角频率 Ω 与序列的数字域频率 ω 呈线性关系。由于采样频率 f_S 与采样周期 T 互为倒数，因而有：

$$\omega = \Omega T = \frac{\Omega}{f_S} = 2\pi\frac{f_0}{f_S} = 2\pi\frac{T_S}{T_0} \tag{1.3.13}$$

上式表示数字域频率是模拟角频率对采样频率的归一化频率。本书中用 ω 表示数字域频率，Ω 和 f 表示模拟角频率和模拟频率。由于信号处理涉及模拟域和数字域的很多转换，因此，数字域频率和模拟角频率之间的转换关系需要牢记在心。

但这里需要思考一个问题：周期性的连续正弦信号在进行过离散化之后是否一定是周期的离散序列呢？在周期序列这一节将会讲到。

Matlab 程序如下：

```
n=-10:10;                  %取点数
ph=pi*（2/3）;              %定义初相
omega=pi/4;                %定义角频率
A=2;                       %取幅值为 2
x=A*sin(omega*n+ph);       %定义序列
stem(n,x,'fill');          %二维杆状图
grid on;                   %网格绘制
```

6.复指数序列

复指数序列在数字信号处理中应用较多，很多变换域的核函数就是复指数序列，特别是复指数序列欧拉公式的转化，需要牢记，用下式表示：

$x(n)=\mathrm{e}^{(\sigma+j\omega 0)n}$

其中，ω_0 为数字域频率。设 $\sigma=0$，用极坐标和实部虚部表示如下式：

$x(n)=\mathrm{e}^{j\omega 0n}$

$x(n)=\cos(\omega_0 n)+j\sin(\omega_0 n)$

由于 n 取整数，下面等式成立：

$\mathrm{e}^{j(\omega 0+2\pi \mathrm{M})n}=\mathrm{e}^{j\omega 0n}$

$\sin[(\omega_0+2\pi K)n]=\sin(\omega_0 n)$

$\cos[(\omega_0+2\pi K)n]=\cos(\omega_0 n)$

上面公式中 K 取整数，所以对数字域频率而言，正弦序列和复指数序列都是以 2π 为周期的周期信号。由此可以看到：在频率域只分析研究一个周

期就够了。同时对于复指数序列，其重要的应用在于对信号的调制，特别是通信信号中将一个信号的频谱进行搬移过程时，是将原来时域信号进行调制，即将时域信号乘上相应的复指数序列，同样，由于时域频域具有对称性，如果需要将时域序列进行搬移，可以采用调制频谱序列，即乘上复指数序列完成。

Matlab 程序：

```
n=0:n1;                      % n1 为确定的序列长度
x=A*exp((a+i*b)*n);          %  x(n)=Ae^((a+i*b)n)
```

7.周期序列

“信号与系统”的学习知道：一个域的离散化导致另一个域的周期化，反之也是成立的。因此，周期性是一种较为重要的性质。定义如下：

如果对所有 n 存在一个最小的正整数 N，使下面等式成立：

$$x(n)=x(n+N) \qquad -\infty<n<\infty \tag{1.3.14}$$

则称序列 $x(n)$为周期性序列，周期为 N。这里需要注意，和周期性函数不同的是，要求序列的周期必须是整数，这就导致：**周期函数进行离散化过程中，产生的离散序列有可能不是周期性的。**

例如：

$x(n)=\sin(n\pi/8)$

式中数字频率是 $\pi/8$，n 取整数，可以写成下式：

$x(n)=\sin[\pi/8(n+16)]$

因此，$x(n)=\sin(n\pi/4)$是周期为 16 的周期序列。下面讨论一般正弦序列的周期性。

设：

$x(n)=\mathrm{A}\sin(\omega_0 n+\varphi)$

那么：

$x(n+N)=\mathrm{A}\sin(\omega_0(n+N)+\varphi)=\mathrm{A}\sin(\omega_0 n+\omega_0 N+\varphi)$

如果

$x(n+N)=x(n)$

则要求 $N=(2\pi/\omega_0)k$。式中 k 与 N 均取整数，且 k 的取值要保证 N 是最小

的正整数，满足这些条件，正弦序列才是以 N 为周期的周期序列。

具体正弦序列有以下三种情况：

（1）当 $2\pi/\omega_0$ 为整数时，k=1，正弦序列是以 $2\pi/\omega_0$ 为周期的周期序列。例如，$\sin(n\pi/4)$，$\omega_0=\pi/4$，$2\pi/\omega_0=8$，该正弦序列周期为 8。

（2）$2\pi/\omega_0$ 不是整数，是一个有理数时，设 $2\pi/\omega_0=P/Q$，式中 P、Q 是互为素数的整数，取 $k=Q$，那么 $N=P$，则该正弦序列是以 P 为周期的周期序列。例如 $\sin(4\pi n/5)$，$2\pi/\omega_0=5/2$，$k=2$，该正弦序列是以 5 为周期的周期序列。

（3）$2\pi/\omega_0$ 是无理数，任何整数 k 都不能使 N 为正整数，因此，此时的正弦序列不是周期序列。例如，$\omega_0=1/4$，$\sin(\omega_0 n)$不是周期序列。

对于复指数序列 $e^{j\omega 0n}$ 的周期性也有和上面同样的分析结果。

总结：**对于一个离散正弦序列，如果其数字域频率中含有 π，则该序列必定是一个周期性序列（上面情况中的第一种和第二种），反之，该序列不是周期性序列（上面情况中的第三种）。**

以上介绍了几种常用的典型序列，和“信号与系统”中单位冲激序列的性质一样，对于任意序列，均可用单位采样序列的移位加权和表示，即

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m) \tag{1.3.15}$$

通过这种方法，可以将任意序列表示成单位序列的叠加，在信号分析中，可以推导出卷积公式，是一个很有用的公式。

1.3.2 序列的运算

序列的简单运算有加法、乘法、移位、翻转及尺度变换。

1.序列的加法

序列之间的加法，是指两个序列的同序号序列值逐项对应相加，如图 1.3.8 所示。

$$x(n)=x_1(n)+x_2(n) \tag{1.3.16}$$