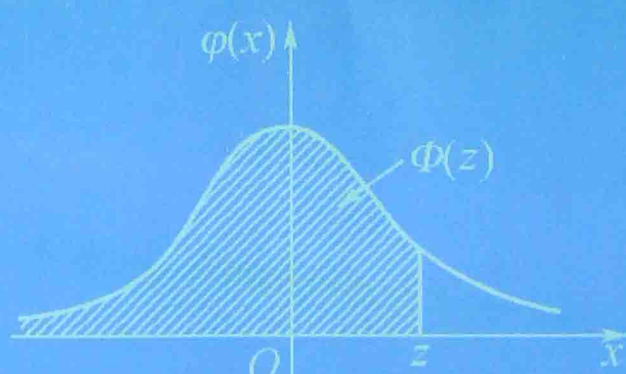
概率论与数理统计教程

周国利　主编



南京大学出版社

概率论与数理统计教程

主　　编　周国利
编写人员　廖　敏　蒋岚翔　刘桂珍　赵　薇

南京大学出版社

内容提要

本书内容包括概率论基础，应用数理统计及统计推断两个部分，内容紧扣高等学校对该学科的基本要求，紧密联系实际，例题丰富多样，便于读者自学．各章节选有一定数量且符合教材内容的题目，书后有答案及提示，综合练习中选用了部分综合性较强的硕士研究生入学试题，以供各类报考研究生的学生参考，其解答提示较为详细．书后附有统计计算 SAS/STAT 程序库使用简介和常见的统计表．

本书可作为高等院校各专业本科及研究生的教材使用，也可供工程技术人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计教程 / 周国利主编． —2版． —南京：南京大学出版社，2014.8

ISBN 978-7-305-13629-0

Ⅰ．①概… Ⅱ．①周… Ⅲ．①概率论—高等学校—教材 ②数量统计—高等学校—教材 Ⅳ．①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第(165237)号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路22号　　邮　　编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 概率论与数理统计教程
主　　编 周国利
责任编辑 吴　华　　编辑热线 025-83596997

照　　排 江苏南大印刷厂
印　　刷 常州市武进第三印刷有限公司
开　　本 787×1092 1/16 印张 13.75 字数 352千
版　　次 2014年8月第2版 2014年8月第1次印刷
印　　次 1—5500
ISBN 978-7-305-13629-0
定　　价 24.80元

网　　址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025)83594756

前　言

概率论与数理统计是许多理工科专业、经济管理类专业、农林牧专业的大学本科及研究生的一门十分重要的基础应用课程. 随着我国高等教育的发展及提高大学生、研究生科学计算能力的需要,作者在二十多年教授该课程的基础上,修订编写了适合各专业本科学生及研究生使用的概率论与数理统计教材.

编写这本教材的主要指导思想是起点要低,尽量避免某些抽象的数学推理及繁琐的公式演绎,力求做到通俗易懂,叙述及论证简明扼要、深入浅出,易于自学且与高中数学的教学改革接轨. 整个教材的材料安排侧重于应用,针对理工等各专业学生的特点,要求其掌握概率与数理统计中主要的基本概念、基本原理和基本方法,特别是在生产实际问题、经济活动中要求其灵活应用概率与数理统计相关知识的能力能有所提高. 本书在阐述某些概念和方法时,本书一般先提出问题的实际背景,并尽可能多地采取案例分析的形式,以使学生一开始便带着实际问题学习思考,且为数学统计建模做出了示范;行文上又力求做到生动,增加可读性. 为了避免枯燥无味地罗列定义及定理,本书把定义融合在叙述中,把定理安排在解释中,同时也兼顾了数学严密的理论体系. 这样无论是在题材选择、叙述重点,还是在例题分析、习题选取上都把实用性放在了重要的位置上,有助于提高学生分析问题和解决问题的能力.

本书还介绍了统计计算中常用的数学软件——SAS,利用该软件可以很容易地实现工程计算及统计学中的各种算法.

在编写和修订该教材过程中,顾悦教授、曹素元教授认真审阅了各章内容,提出了许多宝贵意见,给予了极大的帮助,在此向他们深表谢意.

另外编者是在贵州大学理学院的大力支持和帮助下,在基础教学部数学教研室的大力协助下,完成了编写修订工作,在此也向他们表示衷心的感谢.

全书共分九章. 其中第 1、2、8、9 章由周国利教授编写,第 6、7 章由廖敏副教授编写,第 3 章由蒋岚翔老师编写,第 4 章由刘桂珍老师编写,第 5 章由赵薇老师编写.

由于编者水平有限,本教材难免会有缺陷,诚请专家、读者批评指正.

周国利

2014 年 2 月

目　　录

第 1 章 随机事件及其概率

世界上发生的现象是多种多样的，从概率的观点考虑可分为两类：一类为确定性现象，它指在一定条件下必然会发生或必然不发生的现象，例如，上抛一枚硬币必然会落地；另一类为随机现象，例如，上抛一枚硬币落在平面上，究竟是正面向上还是反面向上，上抛硬币前是无法断言的. 随机现象有两个特点：① 在一次观察中，现象可能发生，也可能不发生，即结果呈现不确定性；② 在大量重复观察中，其结果具有统计规律性. 概率论是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

本章的重点是事件的关系及运算、概率的定义及性质、简单等可能概型的概率计算、条件概率、乘法公式、事件的独立性、全概率公式、贝叶斯公式及其应用.

§1.1 随机事件

随机事件是概率论研究的对象，它是随机试验所出现的结果.

一、随机试验

具有以下特点的试验称为随机试验：

① 相同条件下可重复进行；

② 试验的结果不止一个，但能预先明确试验的所有可能结果；

③ 每次试验前，不知哪一种结果会出现.

随机试验一般用字母 E 表示.

例 1.1 下列试验都是随机试验：

E_1：掷一硬币观察其正反面.

E_2：连掷一硬币 3 次，观察正面 H 和反面 T 出现的次数.

E_3：从一批电子产品中，任取一只，测其寿命.

E_4：记录对某电视节目评比的短消息条数.

二、样本空间

随机试验 E 所有可能的结果组成的集合称为 E 的样本空间，用 S 表示.

例 1.2 给出例 1.1 各随机试验的样本空间.

$E_1:S=\{H,T\}$.

$E_2:S=\{(HHH),(HHT),(HTH),(HTT),(THH),(THT),(TTH),(TTT)\}$.

$E_3:S=\{t \mid t\geqslant 0\}$.

$E_4:S=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

样本空间中每一种可能的结果称为样本点,也称为基本事件,一般用$\{e\}$表示.

三、随机事件

若干基本事件的集合或样本空间 S 的子集称为随机事件,一般用大写字母 A、B、C 等表示,随机事件简称事件.

例 1.3 抛一颗骰子,观察出现的点数,则样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$,其基本事件有 6 个,分别为$\{1\}$,$\{2\}$,$\{3\}$,$\{4\}$,$\{5\}$,$\{6\}$. 若 A 表示点数大于 4 的事件,则其是一个随机事件且 $A=\{5,6\}$.

四、随机事件的关系及其运算

1. 事件间的关系

事件间的关系可用图 1-1 表示.

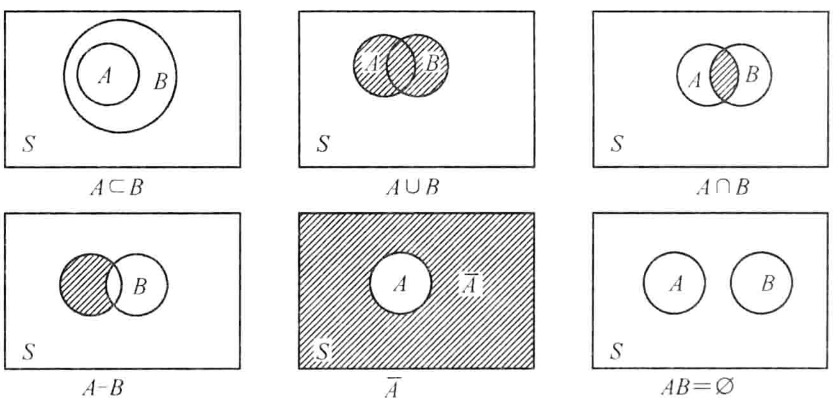


图 1-1

(1) 事件的包含与相等:若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,称 A 被 B 包含,记为 $A\subset B$;又若 $B\subset A$,则称 A,B 是相等事件,记为$A=B$.

(2) 和事件:或事件 A 发生,或事件 B 发生的事件称为 A、B 的和(并)事件,记为 $A\cup B$,即表示 A,B 至少有一个事件发生.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,表示 n 个事件至少有一个事件发生.

(3) 积(交)事件:事件 A,B 同时发生的事件称为 A,B 的积(交)事件,记为 AB 或 $A\cap B$,n 个事件的积事件记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$,表示 n 个事件同时发生.

(4) 差事件:事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与 B 的差事件,记为 $A-B$.

(5) 互不相容(互斥)事件:若 A,B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$(空事件),称 A,B 为互不相容事件.

(6) 相互对立事件：若 $A\cup B=S$，且 $AB=\varnothing$，称 A,B 是相互对立事件或互逆事件，记为 $A=\overline{B},B=\overline{A}$.

故有 $$A\cup\overline{A}=S,A\overline{A}=\overline{A}A=\varnothing,\overline{A}=S-A,$$

且有 $$A-B=A\overline{B},B-A=\overline{A}B,$$

又有
$$A=(A\overline{B})\cup(AB),B=(\overline{A}B)\cup(AB),A\cup B=(A\overline{B})\cup(AB)\cup(\overline{A}B).$$

(7) 完备事件组：若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j$，且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=S$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组或称为样本空间的一个划分.

2. 事件的运算规律

① 交换律：$A\cup B=B\cup A,AB=BA$；

② 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$，
$(AB)C=A(BC)=ABC$；

③ 分配律：$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$，
$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$；

④ 德·摩根定律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\ \overline{B}$表示 A,B 都不发生.
$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$表示 A,B 不能同时发生，但可单独发生，即 A,B 至少有一个不发生. 以上两个运算常用于概率的计算中，务必掌握.

例 1.4　设事件 $A_i(i=1,2,3)$分别表示第 i 次取得合格品，用事件表示：

(1) 3 次都取得合格品；

(2) 至少 1 次取得合格品；

(3) 恰有 2 次取得合格品；

(4) 事件 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 表示什么？

解　(1) 表示第1,2,3 次同时取得合格品，即 $A_1A_2A_3$.

(2) 表示或第 1 次或第 2 次或第 3 次取得合格品，即 $A_1\cup A_2\cup A_3$，或表示为：
$$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3.$$

(3) 表示第 1,2 次取得合格品且第 3 次取得不合格品 $A_1A_2\overline{A}_3$，表示第 1,3 次取得合格品且第 2 次取得不合格品 $A_1\overline{A}_2A_3$，表示第 2,3 次取得合格品且第 1 次取得不合格品 $\overline{A}_1A_2A_3$，则恰有 2 次取得合格品可表示为：
$$A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3.$$

(4) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 表示恰有一次取得合格品事件，$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 表示 3 次都未取得合格品事件，故
$$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$$
表示最多一次取得合格品事件.

例 1.5　掷 1 颗骰子，观察其点数：

(1) 用事件 A 表示“出现奇数点”，事件 B 表示“点数不超过 4”，事件 C 表示“大于 2 的偶数点”. 用集合表示下列事件：$A\cup B, A\cup B\cup\overline{C}, AB, A-B, ABC$.

(2) 对事件 A,B，验证德·摩根定律.

解　(1) 样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}, A=\{1,3,5\}, B=\{1,2,3,4\}, C=\{4,6\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}, \overline{C}=\{1,2,3,5\},$$

$$A\cup B\cup\overline{C}=\{1,2,3,4,5\}, AB=\{1,3\},$$

$$A-B=A\overline{B}=\{5\}, ABC=\varnothing.$$

(2) 由(1)可知

$$\overline{A\cup B}=\{6\}, \overline{A}\,\overline{B}=\{2,4,6\}\cap\{5,6\}=\{6\}.$$

故有
$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},$$

又
$$\overline{AB}=\{2,4,5,6\}, \overline{A}\cup\overline{B}=\{2,4,6\}\cup\{5,6\}=\{2,4,5,6\}.$$

故有
$$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

§ 1.2　随机事件的概率

在随机试验中，随机事件是否发生是很重要的，但更重要的是事件发生的可能性的大小. 例如，为了防洪的需要，要确定防洪坝的高度，就要知道河水流域每年最大洪水达到某一高度这一事件发生的可能性大小. 这个数的大小称为事件发生的概率，简言之，事件的概率就是事件发生的可能性大小的数量描述.

一、概率的统计意义

设在随机试验 E 中进行 n 次重复试验，若事件 A 出现了 n_A 次，则比值 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率. 频率的一般性质如下：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i). \tag{1.1}$$

在随机试验中，当试验次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 会趋于稳定，即逐渐稳定于某一常数. 这种“频率的稳定性”即为统计规律性，该数 p 可为事件 A 发生的概率，当 n 很大时，$f_n(A)\approx p$，用其表示事件 A 发生可能性的大小是合适的，也可将频率视为概率的统计意义.

二、概率的公理化定义

设随机试验 E，样本空间为 S，对于 E 中的事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，如果满足：

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(S)=1$;

(3) 对任何两两不相容事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),\tag{1.2}$$

则称 $P(A)$为事件 A 发生的概率.

三、概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$;

(2) 对于任一事件 A 及对立事件$\overline{A}$,其概率有

$$P(A)=1-P(\overline{A})\text{ 或 }P(\overline{A})=1-P(A);\tag{1.3}$$

(3) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i);\tag{1.4}$$

(4) (**加法公式**)对于任意两事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB);\tag{1.5}$$

(5) 设 A,B 是两个事件,若 $A\subset B$,则有

$$P(B-A)=P(\overline{A}B)=P(B)-P(A),$$

$$P(B)\geqslant P(A).\tag{1.6}$$

证明　仅证性质(2),(4).

(2) 由　$A\cup\overline{A}=S,A\overline{A}=\varnothing,P(S)=1$,

则　$P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$,

即　$P(A)=1-P(\overline{A})$.

该性质常用于事件至少或至多发生的概率,一般可转化为求其对立事件$\overline{A}$发生的概率.

(4) 由　$A\cup B=A\cup B\overline{A},A(B\overline{A})=\varnothing$,

则　$P(A\cup B)=P(A)+P(B\overline{A})$.

又　$B=AB\cup B\overline{A},(AB)(B\overline{A})=\varnothing$,

则　$P(B)=P(AB)+P(B\overline{A})$,

即　$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$.

代入有　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

① 加法公式证明的基本思想是将一个事件分解成两个或两个以上的互不相容的事件的和事件,这种方法常用于求一类事件的概率.

② 加法公式可以推广到多个事件的情况. 例如，A_1,A_2,A_3 为任意三个事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3). \tag{1.7}$$

一般，对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，可用归纳法证得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \tag{1.8}$$

例 1.6 设 A,B 是两个随机事件，$P(A)=0.3,P(B)=0.25,P(AB)=0.1$，求：

(1) $P(A\cup B)$；　　(2) $P(A-B),P(B-A)$；

(3) $P(\overline{A}\,\overline{B})$；　　(4) $P(A-B)\cup(B-A)$.

解 (1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
$=0.3+0.25-0.1=0.45$；

(2) $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.2$，
$P(B-A)=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=0.15$；

(3) $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.45=0.55$；

(4) $P((A-B)\cup(B-A))=P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$
$=0.2+0.15=0.35$.

例 1.7 设 A,B,C 是三个事件，$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{5},P(AC)=P(BC)=0$，$P(AB)=\frac{1}{6}$，求 A,B,C 都不发生的概率.

解 先求 A,B,C 至少有一个事件发生的概率. 由

$$ABC\subset AC,P(AC)=0,$$

故 $P(ABC)=0$，则有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{13}{30}.$$

所以 A,B,C 都不发生的概率为

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-\frac{13}{30}=\frac{17}{30}.$$

四、等可能模型（古典概型）

在概率论发展的初期，曾把具有下面两个简单性质的随机现象作为主要对象：

(1) 试验的样本空间的元素只有有限个，即 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$；

(2) 每个基本事件发生的可能性相等，即 $P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)=\frac{1}{n}$.

一般地，把这类随机试验的数学模型称为等可能概型，即古典概型. 在该概型中，对随机

试验 E，若样本空间的基本事件总数为 n，事件 A 所包含的基本事件数为 k，则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{样本空间的基本事件总数}}. \tag{1.9}$$

这是古典概型概率的定义，同时也是事件 A 的概率计算公式.

例 1.8　设有 10 件产品，其中 7 件正品，3 件次品，现从中任取 3 件，求下列事件的概率.

(1) $A=\{$没有次品$\}$；　(2) $B=\{$只有 1 件次品$\}$；

(3) $C=\{$最多 1 件次品$\}$；　(4) $D=\{$至少 1 件次品$\}$.

解　由于取产品无顺序，故用组合 $n=C_{10}^3=\dfrac{10\times9\times8}{1\times2\times3}=120$.

(1) $k_A=C_7^3=35, P(A)=\dfrac{k_A}{n}=\dfrac{35}{120}=\dfrac{7}{24}$；

(2) $k_B=C_3^1C_7^2=63, P(B)=\dfrac{k_B}{n}=\dfrac{63}{120}=\dfrac{21}{40}$；

(3) $k_C=k_A+k_B=98, P(C)=\dfrac{k_C}{n}=\dfrac{98}{120}=\dfrac{49}{60}$；

(4) $k_D=C_3^1C_7^2+C_3^2C_7^1+C_3^3C_7^0=85, P(D)=\dfrac{85}{120}=\dfrac{17}{24}$.

或由 $D=\overline{A}$，得 $P(D)=P(\overline{A})=1-P(A)=\dfrac{17}{24}$.

例 1.9　仍设有 10 件产品，其中 7 件正品，3 件次品，现从中任取两次，每次任取一件，考虑两种取产品方式：

(1) 放回抽样(即第一次取后放回去抽第二次)；

(2) 不放回抽样(即第一次取后不放回去抽第二次).

就两种情况，求取到两件是合格品的概率.

解　(1) 设该事件为 A.

放回抽样：

$$n=C_{10}^1C_{10}^1=100, k_A=C_7^1C_7^1=49, P(A)=\frac{k_A}{n}=\frac{49}{100}.$$

(2) 设该事件为 B.

不放回抽样：

$$n=C_{10}^1C_9^1=90, k_B=C_7^1C_6^1=42, P(B)=\frac{k_B}{n}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}.$$

例 1.10　将 m 只球随机放入 M 个盒子中，$M\geqslant m$，求每一个盒子至多有一只球的概率(盒子的容量不限).

解　由每一只球都可以放入 M 个盒子中的任何一个盒子，故样本空间所含基本事件总数 $n=M\times M\times\cdots\times M=M^m$，而每一个盒子中至多放一只球共有 $k=M(M-1)\cdots[M-(m-1)]$ 种方法，故所求的概率为

$$P=\frac{M(M-1)\cdots(M-m+1)}{M^m}=\frac{A_M^m}{M^m},$$

其中，A_M^m 是从 M 个元素中取 m 个元素的排列数.

有许多问题与本例具有相同的数学模型. 例如，1 年按 365 天计算，现有 m 个人聚会($m\leqslant 365$)，则至少有两人生日同一天的概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-m+1)}{365^m}.$$

经计算可得下述结果：

m	20	23	30	40	50	64	100
P	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.999 999 7

在随机试验的班级中，若有 70 人以上，则“至少有两人生日相同”这一事件几乎总会出现.

例 1.11　设有 m 件产品，其中有 k 件次品，从中任取 n 件，求其中恰有 $i(i\leqslant k)$ 件次品的概率.

解　从 m 件产品中取 n 件的所有可能取法共 C_m^n 种，因在 k 件次品中取 i 件的所有可能取法有 C_k^i 种，又在 $m-k$ 件正品中取 $n-i$ 件正品所有可能取法有 C_{m-k}^{n-i} 种，故 m 件产品中抽取 n 件，其中恰有 i 件次品取法共有 $C_k^iC_{m-k}^{n-i}$ 种.

所求概率为

$$P=\frac{C_k^iC_{m-k}^{n-i}}{C_m^n}.$$

该式是所谓超几何分布的概率分布，它在产品质量检验中有着广泛的应用.

如 100 件产品中有 2 件次品，从中任取 3 件，则其中恰有 1 件次品的概率为

$$P=C_2^1C_{98}^2/C_{100}^3=0.058\ 8.$$

§1.3　条件概率与事件的独立性

一、条件概率

1. 条件概率是概率论中一个重要而实用的概念

首先举例说明.

例 1.12　5 张彩票中有 3 张会中奖，甲、乙二人先后各抽取一张，以 A,B 分别表示甲、乙中奖事件，则

(1) 甲中奖的概率 $P(A)=\dfrac{3}{5}$.

(2) 甲、乙都中奖的概率 $P(AB)=\dfrac{3\times 2}{5\times 4}=\dfrac{3}{10}$.

(3) 乙中奖的概率，由 $B = AB \cup \overline{A}B$，又 $(AB)(\overline{A}B) = \varnothing$，

$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = \frac{3\times 2}{5\times 4} + \frac{2\times 3}{5\times 4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

该结论可推广，对非即开型抽奖，在开奖前，任一彩票获奖的概率相同.

(4) 甲中奖的条件下，乙也中奖的概率(记为 $P(B\mid A)$)$P(B\mid A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. 可见在一般情况下，$P(B) \neq P(B\mid A)$，但

$$P(B\mid A) = \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{3/10}{3/5} = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

这个结论具有普遍性，从而可定义条件概率如下.

定义 1.3.1　设 A,B 为两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B\mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.10}$$

为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率. 同样，若 $P(B)>0$，称

$$P(A\mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.11}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

条件概率与概率具有相同的性质：

(1) 对任一事件 B，有 $0\leqslant P(B|A)\leqslant 1$；

(2) $P(S|A)=1$；

(3) $B_1,B_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，则有 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(B_i\mid A)\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}P(B_i\mid A)$；

(4) 对任意事件 B_1,B_2，有

$$P(B_1\cup B_2\mid A) = P(B_1\mid A) + P(B_2\mid A) - P(B_1B_2\mid A).$$

例 1.13　某建筑物按设计要求使用寿命超过 50 年的概率为 0.8，超过 60 年的概率为 0.6. 该建筑物经历了 50 年之后，它将在 10 年内倒塌的概率有多大？

解　设事件 A 表示“该建筑物使用寿命超过 50 年”，事件 B 表示“该建筑物使用寿命超过 60 年”.

按题意，$P(A) = 0.8$，$P(B) = 0.6$，又 $B\subset A$，故

$$P(AB) = P(B) = 0.6.$$

所求条件概率为

$$P(\overline{B}\mid A) = 1 - P(B\mid A) = 1 - \frac{P(AB)}{P(A)} = 1 - \frac{0.6}{0.8} = 0.25.$$

2. 乘法公式

由式(1.10)和式(1.11)可得

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)\quad(P(A)>0),\tag{1.12}$$

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)\quad(P(B)>0),\tag{1.13}$$

称为乘法公式,一般可推广到 n 个事件的积事件的概率,例如,

$$P(A_1A_2A_3A_4)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)P(A_4\mid A_1A_2A_3).$$

例 1.14 设某商品出售电子元件,每盒装 100 只,已知每盒混有 4 只不合格品. 商家采用"坏一赔十"的销售方式:顾客买一盒元件,若任取一只发现是不合格品,商家要立刻把 10 只合格的元件放进盒子中,不合格的那只元件不再放回. 顾客在一个盒子中随机地先后取 3 只测试,求他发现全是不合格品的概率.

解 设事件 A_i 表示顾客在第 i 次测试时发现不合格品,则

$$P(A_1)=\frac{4}{100},P(A_2\mid A_1)=\frac{3}{99+10}=\frac{3}{109},$$

$$P(A_3\mid A_1A_2)=\frac{2}{108+10}=\frac{2}{118}.$$

由乘法公式得所求概率为

$$\begin{aligned}P(A_1A_2A_3)&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)=\frac{4\times3\times2}{100\times109\times118}\\&=0.000\,018\,66.\end{aligned}$$

二、事件的独立性

设有事件 A,B,一般说来,A 的发生对 B 发生的概率是有影响的,$P(B)\neq P(B\mid A)$. 若事件 A 发生对事件 B 发生没有影响,就会有 $P(B)=P(B\mid A)$,这就引出了两事件相互独立的概念.

定义 1.3.2 设有事件 A,B,如果

$$P(AB)=P(A)P(B),\tag{1.14}$$

则称事件 A,B 相互独立,简称 A,B 独立,且有

$$A,B\text{ 独立}\Leftrightarrow P(B\mid A)=P(B)\Leftrightarrow P(A\mid B)=P(A).$$

A,B 独立,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 都相互独立(这也是 A,B 独立的充要条件).

例 1.15 设甲、乙两台导弹发射器独立向一飞机各发射一枚导弹,已知甲击中的概率为 0.85,乙击中的概率为 0.8,求飞机被击中的概率.

解 设事件 A,B 分别表示甲、乙击中飞机,则 $A\cup B$ 表示飞机被击中,由独立性有

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.85+0.8-0.85\times0.8\\&=0.97.\end{aligned}$$

事件的独立性可推广到三个事件.

定义 1.3.3 设三事件 A,B,C,如果满足