

应用科学学报

JOURNAL OF APPLIED SCIENCES

第五卷

VOL. 5

第一期

NO. 1

1987

《应用科学学报》编辑委员会编辑
上海科学技术出版社出版

编 辑 委 员 会

主 编	黄宏嘉				
副 主 编	邹元熾	夏道行	汤定元	方俊鑫	吴鸿适
编 委	丁维钰	王乃粒	王生洪	韦 钰	严义埧
	张美敦	陈益新	林福成	欧阳邕	姚慧海
	郭本瑜	郭嘉荣			

编 辑 部

主 任	陈锡培				
编 辑 人 员	王启华	江 华	许新民	吴国忠	林基青
	顾珊繁				
特 约 编 辑	夏国智				

应用科学学报

第五卷 第一期

目 录

含任意分布裂纹与缺陷的板条加筋结构的应力强度因子	欧阳颢 周小康	(1)
激光扫描光电显微镜	张淑仪 陈 力 徐建生	(16)
X波段固态调频雷达在半潜式钻井平台上的试验和应用	周南山 汤 卫	(22)
用传输线等效电路模型分析 pn 结	阮 刚 戎蒙恬	(30)
α -酞菁铜蒸发膜中陷阱的研究——等温衰减电流谱	钱人元 周淑琴 金祥凤 王增起 姜守仁	(37)
高频离子源中应用等离子体及非等离子体化学反应对于引出金属离子的区别	白桂彬	(41)
有效结构理论应用于液体热力学性质计算	严文兴 孙亚平	(49)
水扩链嵌段聚醚氨酯脲的合成与性能	黄祖秀 冯新德	(56)
碲镉汞晶体辐射损伤的高分辨电镜研究	宋祥云 温树林 马可军	(61)
溅射沉积 InP 薄膜的研究	黎锡强	(66)
InP 欧姆接触研究	吴鼎芬 王德宁 张 俊	(72)
生成所有不同构的根树和树	刘家壮	(79)

研 究 简 报

XPS 谱线加宽函数的测定	徐至中 董树忠	(85)
Марчук 模型和疾病痊愈	邵 剑	(89)
己二酸的低温快速单酯化	桂伟志	(92)

JOURNAL OF APPLIED SCIENCES

Vol. 5, No. 1, January, 1987

CONTENTS

Stress Intensity Factors for Periodic Stiffened Strips with Random Crack and Hole	Ouyang Chag Zhou Xiaokang	(15)
Laser Scanning Photoelectric Microscope	Zhang Shuyi Chen Li Xu Jiansheng	(21)
Experiments and Applications of X-Band FM-CW Radar System on Semi-Submerged Drilling Well Platforms.....	Zhou Nanshan Tang Wei	(29)
pn Junction Analysis with Transmission Line Equivalent Circuit Model	Ruan Gang Rong Mengtian	(36)
A Study on α -Copper Phthalocyanine Evaporated Film Trap-an Isothermal Decay Current Spectrum.....	Qian Renyuan Zhou Shuqn Jin Xiangfeng Wan Zengqi Jiang Shouren	(40)
The Difference between Metal Ions Extracted from the R. F. Ion Source by Applying Plasma Chemistry Reaction and Non-Plasma Chemistry Reaction	Bai Guibin	(48)
Application of Significant Structure Theory in Evaluation of Thermodynamic Properties of Liquids.....	Yan Wenxing Shun Yapin	(55)
Synthesis and Properties of Segmented Polyether Urethaneureas Extended with Water	Huang Zuxiu Feng Xinde	(60)
A Study of Radiation Damage in (Hg. Cd)Te Crystal by HREM	Song Xiangyun Wen Shulin Ma Kejun	(65)
RF Sputtering of InP Films	Li Xiqiang	(71)
Researches on InP Ohmic Contact.....	Wu Dingfen Wang Dening Zhang Jun	(78)
Generating All Nonisomorphic Rooted Trees and All Nonisomorphic Trees	Liu Jiahuang	(84)

RESEARCH NOTES

Measurement of XPS Line Shape Widening Function	Xu Zhizhong Dong Shuzhong	(88)
Marchuk Model and Recovery from Diseases	Shao Jian	(91)
Rapid Monoesterification of Adipic Acid at a Low Temperature	Gui Weizhi	(94)

含任意分布裂纹与缺陷的板条 加筋结构的应力强度因子*

欧阳颀 周小康
(复旦大学)

提 要

本文研究两类不同介质的板条在单向拉伸下裂纹尖端的应力强度因子的计算问题。板条内部分别含有一个任意分布的裂纹与椭圆孔,其结构为周期间隔地用筋条连接。采用复变函数及摄动方法,最后以幂级数形式给出应力强度因子的计算公式。对工程上多种实用的结构给出数值计算图表。这些结果进一步拓展了“应力强度因子手册”的工作。文中还指出了上述手册中某些结果存在的问题。

一、前 言

板条加筋结构在航空、船舶等工程领域占据很重要的地位,而对这种结构的断裂力学研究始于60年代初^[1],当初 Isida, M. 研究了含中心水平裂纹的边缘加筋的板条结构,后又相继研究两类板条的加筋结构^[2],其中一类板条含一条中心水平裂纹,而另一类板条不带任何缺陷,这在实际应用中具有一定的局限性。考虑到板条内裂纹分布的随机性,并兼顾含有各种形状缺陷的板条,本文讨论更为一般的问题,亦即两类板条分别含有一条任意分布的裂纹以及一个椭圆孔的加筋结构。采用复变函数的罗朗展开及积分表达式,所有系数由筋条处相容条件以及裂纹、椭圆孔表面的边界条件确定,在数值计算上利用摄动法,设 λ 是裂纹长与板条宽之比,以 λ 的幂级数形式给出应力强度因子的计算公式。对于实际工程中常见的裂纹-裂纹、裂纹-圆孔的加筋结构作了详细的数值计算,并绘成图表,以供工程设计应用,最后还对结果的精度进行了讨论。

二、理 论

考虑两种不同介质、不同厚度的板条,分别记为 I、II,其厚度、杨氏模量、泊松比分别为 h, E, ν 与 h', E', ν' ,两类板条宽度均为 $2d$ 。板条 I 含一条裂纹,长为 $2a$,裂纹中心的偏心距离为 e ,倾斜角为 θ_1 ;板条 II 含一个椭圆孔,其长、短半轴分别为 a_1, b_1 ,椭圆中心的偏心距为 e_1 ,长轴的倾斜角为 θ_2 。筋条的截面积、杨氏模量与平面弯曲惯性矩分别为 S, E_s, I_s ,设筋条之宽远小于 d 及 $d-e$ 或 $d-e_1$,无穷远处的拉伸应力分别为 σ, σ' ,在三块连

1935年8月20日收到,1986年4月22日收到修改稿

* 中国科学院科学基金资助的课题

续板条中分别在裂纹与椭圆中心建立局部坐标系 xoy 、 $x_1o_1y_1$ 与 $x_2o_2y_2$, 如图 1 所示, 其中 c 为 o 与 o_1 的筋向距离。

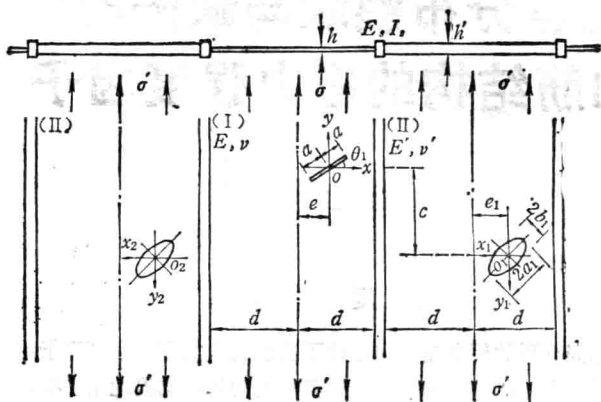


图 1

取 d 为特征长度, σ 与 σ' 分别为板条 I、II 的特征应力, 引进以下一些无量纲量

$$\left. \begin{aligned} Z &= (X + iY)/d, \quad Z_j = (X_j + iY_j)/d \quad (j=1, 2) \\ \alpha &= \frac{E'h'}{Eh}, \quad \beta = \frac{E_s}{E} \cdot \frac{S}{dh}, \quad \gamma = \frac{E_s}{E} \cdot \frac{I_s}{d^3h}, \quad \lambda = \frac{a}{d} \\ s &= \frac{c}{d}, \quad \delta = \frac{e}{d}, \quad \delta_1 = \frac{e_1}{d}, \quad \mu = \frac{a_1}{a}, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{1-\delta} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

边界条件: 在裂纹、椭圆孔表面应力自由; 在无穷远处为

$$\left. \begin{aligned} \text{板 I:} \quad & \sigma_{yy}^\infty = \sigma, \quad \sigma_{xx}^\infty = \sigma_{xy}^\infty = 0 \\ \text{板 II:} \quad & \sigma_{y_1y_1}^\infty = \sigma', \quad \sigma_{x_1x_1}^\infty = \sigma_{x_1y_1}^\infty = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

注意到无穷远处筋条两侧变形协调, σ, σ' 应满足

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma'}{E'} \quad (3)$$

板条 I、II 均作为平面应力问题, 为此, 在三个局部坐标系内各引进一组 Goursat 复势 $(\varphi(z), \psi(z))$ 、 $(\Phi(z_j), \Psi(z_j))$, $j=1, 2$, 后两组复势因为对应同一类型板条故其函数形式相同。应力、位移场可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4\sigma \operatorname{Re} \varphi'(z) \\ \sigma_{xx} - \sigma_{yy} - 2i\sigma_{xy} &= -2\sigma [\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \\ E(u - iv) &= \sigma d \{ (3-\nu)\varphi(z) - (1+\nu)[\bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z)] \} \\ \sigma_{x_jx_j} + \sigma_{y_jy_j} &= 4\sigma' \operatorname{Re} \Phi'(z_j) \\ \sigma_{x_jx_j} - \sigma_{y_jy_j} - 2i\sigma_{x_jy_j} &= -2\sigma' [\bar{z}_j\Phi''(z_j) + \Psi''(z_j)] \\ E'(u'_j - iv'_j) &= \sigma' d \{ (3-\nu')\Phi(z_j) - (1+\nu')[\bar{z}_j\Phi'(z_j) + \Psi'(z_j)] \} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

以上 $j=1, 2$ 。为了方便, 把复势作如下分解:

$$\left. \begin{aligned} (\varphi(z), \psi(z)) &= (\varphi_0(z), \psi_0(z)) + (\varphi_1(z), \psi_1(z)) + (\varphi_2(z), \psi_2(z)) \\ (\Phi(z_j), \Psi(z_j)) &= (\Phi_0(z_j), \Psi_0(z_j)) + (\Phi_1(z_j), \Psi_1(z_j)) + (\Phi_2(z_j), \Psi_2(z_j)) \quad (j=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中指标为“0”的复势对应着无穷远处的应力场, 易得

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(z) &= \frac{1}{4} z & \psi_0(z) &= \frac{1}{4} z^2 \\ \Phi_0(z_j) &= \frac{1}{4} z_j & \Psi_0(z_j) &= \frac{1}{4} z_j^2 \quad (j=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

指标为“1”的复势对应着板在原点的奇性, 设有以下的级数形式

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^{-(n+1)} & \psi_1(z) &= -D_0 \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} D_n z^{-n} \\ \Phi_1(z_j) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{F}_n z_j^{-(n+1)} & \Psi_1(z_j) &= -\tilde{D}_0 \ln z_j + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{D}_n z_j^{-n} \quad (j=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

迭加上指标为“2”的复势, 应使总复势满足裂纹与椭圆孔边缘的边界条件以及筋条处的连续性条件. 考虑到 $y \rightarrow \infty$ 时应力收敛性, 它可构造为如下积分形式

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [G \operatorname{sh} m(z+\delta) + H \operatorname{ch} m(z+\delta)] dm \\ \psi_2(z) &= \int_0^{\infty} \left[A \operatorname{ch} m(z+\delta) + B \operatorname{sh} m(z+\delta) \right. \\ &\quad \left. + \left(\delta + \frac{1}{2} z \right) (G \operatorname{sh} m(z+\delta) + H \operatorname{ch} m(z+\delta)) \right] dm \\ \Phi_2(z_j) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [U \operatorname{sh} m(z_j - \delta_1 + i\varepsilon) + V \operatorname{ch} m(z_j - \delta_1 + i\varepsilon)] dm \\ \Psi_2(z_j) &= \int_0^{\infty} R \operatorname{ch} m(z_j - \delta_1 + i\varepsilon) + T \operatorname{sh} m(z_j - \delta_1 + i\varepsilon) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} z_j - \delta_1 \right) (U \operatorname{sh} m(z_j - \delta_1 + i\varepsilon) + V \operatorname{ch} m(z_j - \delta_1 + i\varepsilon)) dm \\ &\quad (j=1, 2) \end{aligned} \quad (8)$$

以上 A, B, G, H 等系数均为 m 的函数, 连同 (7) 中 D_n, F_n 等均为复待定量, 由筋条处连续性条件及裂纹、椭圆孔边界条件确定.

首先, 考虑筋条处连续性条件. 于 $z = 1 - \delta + iy$ 及 $z = -(1 + \delta) + iy$ 即板条 I 两侧的筋条位置各选取一个微元, 由位移的连续性以及平衡方程

$$\begin{aligned} (u - iv) \Big|_{s=1-\delta+iy} + (u'_1 - iv'_1) \Big|_{s_1=1+\delta_1-i(y+\varepsilon)} &= 0 \\ h\sigma_{xy} \Big|_{s=1-\delta+iy} - h'\sigma_{x_1y_1} \Big|_{s_1=1+\delta_1-i(y+\varepsilon)} &= \frac{S}{d} \frac{E_s}{E} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \Big|_{s=1-\delta+iy} \\ -h\sigma_{xx} \Big|_{s=1-\delta+iy} + h'\sigma_{x_1x_1} \Big|_{s_1=1+\delta_1-i(y+\varepsilon)} &= \frac{E_s I_s}{d^4} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{s=1-\delta+iy} \\ (u - iv) \Big|_{s=-(1+\delta)+iy} + (u'_2 - iv'_2) \Big|_{s_2=-(1-\delta_1)-i(y+\varepsilon)} &= 0 \\ h\sigma_{xy} \Big|_{s=-(1+\delta)+iy} - h'\sigma_{x_2y_2} \Big|_{s_2=-(1-\delta_1)-i(y+\varepsilon)} &= \frac{-S}{d} \frac{E_s}{E} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \Big|_{s=-(1+\delta)+iy} \\ h\sigma_{xx} \Big|_{s=-(1+\delta)+iy} - h'\sigma_{x_2x_2} \Big|_{s_2=-(1-\delta_1)-i(y+\varepsilon)} &= \frac{E_s I_s}{d^4} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{s=-(1+\delta)+iy} \end{aligned} \quad (9)$$

把 (3) ~ (8) 代入 (9) 得到八阶实的联立方程组, 考虑到 y 的任意性, 每一个方程按 y 的奇偶性又可分离为两个方程, 进一步利用 Fourier 逆变换, 求解所得的十六阶方程组, 导出 A, B 等表达式, 代入 (8), 展开

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

并略去对应力无贡献的项,最后,得到对应板条 I、II 的总复势表达式

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{4}z + \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^{-(n+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^{n+1} \\ \psi(z) &= \frac{1}{4}z^2 - D_0 \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} D_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} K_n z^{n+2} \\ \Phi(z_1) &= \frac{1}{4}z_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{F}_n z_1^{-(n+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{M}_n z_1^{n+1} \\ \Psi(z_1) &= \frac{1}{4}z_1^2 - \tilde{D}_0 \ln z_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{D}_n z_1^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{K}_n z_1^{n+2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中

$$\begin{bmatrix} K_n \\ \tilde{K}_n \end{bmatrix} = \sum_{p=0}^{\infty} J_p^n \begin{bmatrix} D_p \\ \tilde{D}_p \end{bmatrix} \quad (11)$$

这里

$$\begin{aligned} K_n &= \begin{bmatrix} K_n \\ K_{n'} \\ M_n \\ M_{n'} \end{bmatrix} & D_n &= \begin{bmatrix} D_n \\ D_{n'} \\ F_n \\ F_{n'} \end{bmatrix} \\ \tilde{K}_n &= \begin{bmatrix} \tilde{K}_n \\ \tilde{K}_{n'} \\ \tilde{M}_n \\ \tilde{M}_{n'} \end{bmatrix} & \tilde{D}_n &= \begin{bmatrix} \tilde{D}_n \\ \tilde{D}_{n'} \\ \tilde{F}_n \\ \tilde{F}_{n'} \end{bmatrix} \\ J_p^n &= \begin{bmatrix} \alpha_p^n & 0 & \beta_p^n & 0 & \tilde{\alpha}_p^n & \tilde{\alpha}_p^n & \tilde{\beta}_p^n & \tilde{\beta}_p^n \\ 0 & {}^n\chi_p & 0 & {}^n\omega_p & \tilde{\chi}_p^n & \tilde{\chi}_p^n & \tilde{\omega}_p^n & \tilde{\omega}_p^n \\ \gamma_p^n & 0 & \delta_p^n & 0 & \tilde{\gamma}_p^n & \tilde{\gamma}_p^n & \tilde{\delta}_p^n & \tilde{\delta}_p^n \\ 0 & {}^n\xi_p & 0 & {}^n\eta_p & \tilde{\xi}_p^n & \tilde{\xi}_p^n & \tilde{\eta}_p^n & \tilde{\eta}_p^n \\ a_p^n & {}^na_p & b_p^n & {}^nb_p & \tilde{a}_p^n & 0 & \tilde{b}_p^n & 0 \\ e_p^n & {}^ne_p & f_p^n & {}^nf_p & 0 & \tilde{e}_p^n & 0 & \tilde{f}_p^n \\ c_p^n & {}^nc_p & d_p^n & {}^nd_p & \tilde{c}_p^n & 0 & \tilde{d}_p^n & 0 \\ g_p^n & {}^ng_p & h_p^n & {}^nh_p & 0 & \tilde{g}_p^n & 0 & \tilde{h}_p^n \end{bmatrix} \quad (12) \end{aligned}$$

上面矩阵中 α_p^n 等元素为含参数 α 、 β 、 γ 、 ε 、 δ 、 δ_1 、 ν 、 ν' 、 n 、 p 的关于 m 的积分式,因式子冗长,从略。

其次,考虑裂纹、椭圆孔边缘的应力自由边界条件,利用坐标变换式

$$\zeta = ze^{-i\theta_1}, \quad \zeta_1 = z_1 e^{-i\theta_1} \quad (13)$$

亦即把坐标系 xoy 、 $x_1o_1y_1$ 分别旋转 θ_1 、 θ_2 , 使得新系的横轴与裂纹、椭圆孔长轴方向一致。注意到复势相应变换为

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \varphi(z)e^{-i\theta_1} & \psi(\zeta) &= \psi(z) \\ \Phi(\zeta_1) &= \Phi(z_1)e^{-i\theta_1} & \Psi(\zeta_1) &= \Psi(z_1) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

由内部边界条件,根据文献[3],获得以下关系式

$$\begin{aligned}
 D_n &= \frac{1}{4} \lambda^{n+2} L_0^n + \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^{n+p+2} \mathcal{H}_p^n K_p \\
 \tilde{D}_n &= \frac{1}{4} \lambda^{n+2} \tilde{L}_0^n + \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^{n+p+2} \mathcal{H}_p^n \tilde{K}_p
 \end{aligned} \quad (15)$$

这里记

$$\begin{aligned}
 L_0^n &= \begin{bmatrix} I_0^n + II_0^n \\ III_0^n + IV_0^n \\ V_0^n + VI_0^n \\ VII_0^n + VIII_0^n \end{bmatrix} \\
 \mathcal{H}_p^n &= \begin{bmatrix} I_p^n & II_p^n & III_p^n & IV_p^n \\ III_p^n & II_p^n & IV_p^n & IV_p^n \\ V_p^n & V_p^n & VI_p^n & VI_p^n \\ VII_p^n & VII_p^n & VIII_p^n & VIII_p^n \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (16)$$

$\tilde{L}_0^n$ 、 $\tilde{\mathcal{H}}_p^n$ 分别记为相应于 L_0^n 、 $\mathcal{H}_p^n$ 的元素上添“ $\sim$ ”， $\mathcal{H}_p^n$ 、 $\tilde{\mathcal{H}}_p^n$ 为

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_p^n &= \begin{bmatrix} \cos n\theta_1 & & & \\ & \sin n\theta_1 & & \\ & & \cos(n+2)\theta_1 & \\ & & & \sin(n+2)\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_p^n & -P_p^n & P_p^n & -P_p^n \\ P_p^n & -P_p^n & P_p^n & -P_p^n \\ -Q_p^n & Q_p^n & -Q_p^n & Q_p^n \\ -Q_p^n & Q_p^n & -Q_p^n & Q_p^n \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \cos(p+2)\theta_1 & & & \\ & \sin(p+2)\theta_1 & & \\ & & \cos p\theta_1 & \\ & & & \sin p\theta_1 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \sin n\theta_1 & & & \\ & -\cos n\theta_1 & & \\ & & -\sin(n+2)\theta_1 & \\ & & & \cos(n+2)\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_p^n & Q_p^n & W_p^n & W_p^n \\ Q_p^n & Q_p^n & W_p^n & W_p^n \\ Q_p^n & Q_p^n & W_p^n & W_p^n \\ Q_p^n & Q_p^n & W_p^n & W_p^n \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \sin(p+2)\theta_1 & & & \\ & \cos(p+2)\theta_1 & & \\ & & \sin p\theta_1 & \\ & & & \cos p\theta_1 \end{bmatrix} \\
 \tilde{\mathcal{H}}_p^n &= \begin{bmatrix} \cos n\theta_2 & & & \\ & \sin n\theta_2 & & \\ & & \cos(n+2)\theta_2 & \\ & & & \sin(n+2)\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_p^n & -\tilde{P}_p^n & \tilde{R}_p^n & -\tilde{R}_p^n \\ \tilde{P}_p^n & -\tilde{P}_p^n & \tilde{R}_p^n & -\tilde{R}_p^n \\ -\tilde{Q}_p^n & \tilde{Q}_p^n & -\tilde{S}_p^n & \tilde{S}_p^n \\ -\tilde{Q}_p^n & \tilde{Q}_p^n & -\tilde{S}_p^n & \tilde{S}_p^n \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \cos(p+2)\theta_2 & & & \\ & \sin(p+2)\theta_2 & & \\ & & \cos p\theta_2 & \\ & & & \sin p\theta_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} \sin n\theta_2 & & & \\ & -\cos n\theta_2 & & \\ & & -\sin(n+2)\theta_2 & \\ & & & \cos(n+2)\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_p^n & \tilde{T}_p^n & \tilde{V}_p^n & \tilde{V}_p^n \\ \tilde{T}_p^n & \tilde{T}_p^n & \tilde{V}_p^n & \tilde{V}_p^n \\ \tilde{Q}_p^n & \tilde{Q}_p^n & \tilde{W}_p^n & \tilde{W}_p^n \\ \tilde{Q}_p^n & \tilde{Q}_p^n & \tilde{W}_p^n & \tilde{W}_p^n \end{bmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix} \sin(p+2)\theta_2 & & & \\ & \cos(p+2)\theta_2 & & \\ & & \sin p\theta_2 & \\ & & & \cos p\theta_2 \end{bmatrix} \quad (17)
\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{P}_{2p}^0 = [\mu^2(1-\varepsilon_1^2)]^{p+1} \frac{p+1}{2^{2p}} \begin{pmatrix} 2p+1 \\ p \end{pmatrix},$$

$$\tilde{R}_{2p}^0 = \tilde{P}_{2p}^0 \frac{R^2 + R^{-2}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tilde{P}_{2p}^{2n} \\ \tilde{T}_{2p}^{2n} \end{bmatrix} &= \frac{[\mu^2(1-\varepsilon_1^2)]^{n+p+1}}{2^{2p+2}} \left\{ \begin{bmatrix} 4(p+1) \begin{pmatrix} 2p+1 \\ p \end{pmatrix} \left(1 + \frac{1}{n}\right) A_{n,1} \\ 0 \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=0}^{n,p+1} \begin{pmatrix} 2p+2 \\ p-m+1 \end{pmatrix} [(2p+1)R^{4m} \mp 1] A_{n-m,2m} \right\}, \quad (n \geq 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tilde{R}_{2p}^{2n} \\ \tilde{V}_{2p}^{2n} \end{bmatrix} &= \frac{[\mu^2(1-\varepsilon_1^2)]^{n+p+1}}{2^{2p+1}} \left\{ \begin{bmatrix} (p+1) \begin{pmatrix} 2p+1 \\ p \end{pmatrix} (R^2 + R^{-2}) \left(1 + \frac{1}{n}\right) A_{n,1} \\ 0 \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + 2p \sum_{m=0}^{n,p} \begin{pmatrix} 2p+1 \\ p-m \end{pmatrix} R^{4m+2} A_{n-m,2m+1} \right\}, \quad (n \geq 1)
\end{aligned}$$

$$\tilde{Q}_{2p}^{2n} = [\mu^2(1-\varepsilon_1^2)]^{n+p+1} \frac{p+1}{2^{2p}} \sum_{m=0}^{n,p} \begin{pmatrix} 2p+1 \\ p-m \end{pmatrix} R^{4m+2} A_{n-m,2m+1}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tilde{S}_{2p}^{2n} \\ \tilde{W}_{2p}^{2n} \end{bmatrix} &= \frac{[\mu^2(1-\varepsilon_1^2)]^{n+p+1}}{2^{2p+1}} \left\{ (p+1) \begin{pmatrix} 2p+1 \\ p \end{pmatrix} A_{n,1} \pm \sum_{m=0}^{n,p} \begin{pmatrix} 2p+1 \\ p-m \end{pmatrix} A_{n-m,2m+1} \right. \\
&\quad \left. + 2(2p+1) \sum_{m=1}^{n+1,p} \begin{pmatrix} 2p \\ p-m \end{pmatrix} R^{4m} A_{n-m+1,2m} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tilde{P}_{2p+1}^{2n+1} \\ \tilde{T}_{2p+1}^{2n+1} \end{bmatrix} &= \frac{[\mu^2(1-\varepsilon_1^2)]^{n+p+2}}{2^{2p+3}} \left\{ \pm (p+2) \begin{pmatrix} 2p+3 \\ p+1 \end{pmatrix} A_{n,1} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=0}^{n,p+1} \begin{pmatrix} 2p+3 \\ p-m+1 \end{pmatrix} [(2p+2)R^{4m+2} \mp 1] A_{n-m,2m+1} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tilde{R}_{2p+1}^{2n+1} \\ \tilde{V}_{2p+1}^{2n+1} \end{bmatrix} &= \frac{[\mu^2(1-\varepsilon_1^2)]^{n+p+2}}{2^{2p+2}} \left\{ \pm (p+1) \begin{pmatrix} 2p+1 \\ p \end{pmatrix} (R \pm R^{-1})^2 A_{n,1} \right. \\
&\quad \left. + (2p+1) \sum_{m=1}^{n+1,p+1} \begin{pmatrix} 2p+2 \\ p-m+1 \end{pmatrix} R^{4m} A_{n-m+1,2m} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{2p+1}^{2n+1} &= [\mu^2(1-\varepsilon_1^2)]^{n+p+2} \frac{2p+3}{2^{2p+2}} \sum_{m=1}^{n+1, p+1} \binom{2p+2}{p-m+1} R^{4m} A_{n-m+1, 2m} \\
\left[\frac{\tilde{S}_{2p+1}^{2n+1}}{\tilde{W}_{2p+1}^{2n+1}} \right] &= \frac{[\mu^2(1-\varepsilon_1^2)]^{n+p+2}}{2^{2p+2}} \left\{ \pm \sum_{m=1}^{n+1, p+1} \binom{2p+2}{p-m+1} A_{n-m+1, 2m} \right. \\
&\quad \left. + 2(2p+2) \sum_{m=0}^{n+1, p} \binom{2p+1}{p-m} R^{4m+2} A_{n-m+1, 2m+1} \right\} \\
\varepsilon_1 &= \frac{b_1}{a_1}, \quad R = \sqrt{\frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}}, \quad A_{n,m} = \frac{m}{2^{2n+m}} \binom{2n+m}{n} \\
(P_p^n, Q_p^n, W_p^n) &= (\tilde{P}_p^n, \tilde{Q}_p^n, \tilde{W}_p^n) |_{\varepsilon_1=0, R=1, \mu=1}
\end{aligned} \quad (18)$$

(18)式内各计算式中 $\sum$ 的上指标取较小的一个, 且当 $n+P =$ 奇数时

$$\tilde{P}_p^n = \tilde{Q}_p^n = \tilde{R}_p^n = \tilde{S}_p^n = \tilde{T}_p^n = \tilde{V}_p^n = \tilde{W}_p^n = 0.$$

由以上分析, 导出复势展开式(10)的系数之间两组关系式, 一组关系式是负幂次系数线性组合表示正幂次系数的(11), 另一组关系式是正幂次系数线性组合表示负幂次系数的(15). 为了求解各未知系数, 采用摄动方法, 选取小参数 λ , 并假设各系数可展开为 λ 幂级数形式,

$$\left. \begin{aligned}
(D_{2n}, \tilde{D}_{2n}) &= \sum_{q=n+1}^{\infty} (D_{2n}^{(2q)}, \tilde{D}_{2n}^{(2q)}) \lambda^{2q} \\
(D_{2n+1}, \tilde{D}_{2n+1}) &= \sum_{q=n+3}^{\infty} (D_{2n+1}^{(2q)}, \tilde{D}_{2n+1}^{(2q)}) \lambda^{2q} \\
(K_n, \tilde{K}_n) &= \sum_{q=1}^{\infty} (K_n^{(2q)}, \tilde{K}_n^{(2q)}) \lambda^{2q}
\end{aligned} \right\} \quad (19)$$

代入(11)、(15), 得到下面的递推关系式

$$\left. \begin{aligned}
(D_{2n}^{(2n+2)}, \tilde{D}_{2n}^{(2n+2)}) &= \frac{1}{4} (L_0^{2n}, \tilde{L}_0^{2n}) \\
(D_{2n}^{(2q+2n+2)}, \tilde{D}_{2n}^{(2q+2n+2)}) &= \sum_{p=0}^{q-1} (\mathcal{H}_{2p}^{2n} K_{2p}^{(2q-2p)}, \tilde{\mathcal{H}}_{2p}^{2n} \tilde{K}_{2p}^{(2q-2p)}) \\
(D_{2n+1}^{(2q+2n+4)}, \tilde{D}_{2n+1}^{(2q+2n+4)}) &= \sum_{p=0}^{q-1} (\mathcal{H}_{2p+1}^{2n+1} K_{2p+1}^{(2q-2p)}, \tilde{\mathcal{H}}_{2p+1}^{2n+1} \tilde{K}_{2p+1}^{(2q-2p)}) \quad (q \geq 1) \\
\left[\begin{array}{c} K_n^{(2q+2)} \\ \tilde{K}_n^{(2q+2)} \end{array} \right] &= \sum_{p=0}^{2q} J_p^n \left[\begin{array}{c} D_p^{(2q+2)} \\ \tilde{D}_p^{(2q+2)} \end{array} \right] \quad (q \geq 0) \quad (n \geq 0)
\end{aligned} \right\} \quad (20)$$

以上定义 $D_{2n+1}^{(2n+4)} = \tilde{D}_{2n+1}^{(2n+4)} = 0, D_0^{(n)} = \tilde{D}_0^{(n)} = 0.$

根据[4], 裂纹尖端 A, B 的应力强度因子的计算公式为

$$\left. \begin{aligned}
K_{1A} - iK_{2A} &= 2\sigma \sqrt{2d} \lim_{\zeta \rightarrow \lambda} \sqrt{\zeta - \lambda} \varphi'(\zeta) \\
K_{1B} - iK_{2B} &= 2\sigma \sqrt{2d} \lim_{\zeta \rightarrow -\lambda} \sqrt{\zeta + \lambda} \varphi'(\zeta)
\end{aligned} \right\} \quad (21)$$

由(10)的坐标变换式及(20), 并利用和式

$$\left. \begin{aligned}
\sqrt{d} \lim_{\zeta \rightarrow \lambda} \sqrt{\zeta - \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_{2p}^{2n} \left(\frac{\zeta}{\lambda} \right)^{-(2n+2)} &= \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{(p+1)(2p+2)}{2^{2p+1}} \binom{2p+1}{p} \\
\sqrt{d} \lim_{\zeta \rightarrow -\lambda} \sqrt{\zeta + \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2) Q_{2p+1}^{2n+1} \left(\frac{\zeta}{\lambda} \right)^{-(2n+3)} &= \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{(p+1)(2p+3)}{2^{2p+1}} \binom{2p+1}{p}
\end{aligned} \right\} \quad (22)$$

最后导出以 λ 幂级数形式表示的应力强度因子的计算公式

$$\begin{aligned}
 (K_{iA}, K_{iB}) &= \sigma \sqrt{a} (F_{iA}, F_{iB}) \quad i=1, 2 \\
 \begin{bmatrix} F_{1A} \\ F_{1B} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta_1) + \sum_{q=1}^N \sum_{p=0}^{q-1} \frac{p+1}{2^{2p}} \binom{2p+1}{p} \\
 &\quad \times [(2p+2) (K_{2p}^{(2q-2p)} \cos(2p+2)\theta_1 - K_{2p}^{(2q-2p)} \sin(2p+2)\theta_1 \\
 &\quad + M_{2p}^{(2q-2p)} \cos 2p\theta_1 - M_{2p}^{(2q-2p)} \sin 2p\theta_1) \lambda^{2q} \\
 &\quad \pm (2p+3) (K_{2p+1}^{(2q-2p)} \cos(2p+3)\theta_1 - K_{2p+1}^{(2q-2p)} \sin(2p+3)\theta_1 \\
 &\quad + M_{2p+1}^{(2q-2p)} \cos(2p+1)\theta_1 - M_{2p+1}^{(2q-2p)} \sin(2p+1)\theta_1) \lambda^{2q+1}] \\
 \begin{bmatrix} F_{2A} \\ F_{2B} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 + \sum_{q=1}^N \sum_{p=0}^{q-1} \frac{p+1}{2^{2p}} \binom{2p+1}{p} \\
 &\quad \times \{ [(2p+2) (K_{2p}^{(2q-2p)} \sin(2p+2)\theta_1 + K_{2p}^{(2q-2p)} \cos(2p+2)\theta_1) \\
 &\quad + 2p (M_{2p}^{(2q-2p)} \sin 2p\theta_1 + M_{2p}^{(2q-2p)} \cos 2p\theta_1)] \lambda^{2q} \\
 &\quad \pm [(2p+3) (K_{2p+1}^{(2q-2p)} \sin(2p+3)\theta_1 + K_{2p+1}^{(2q-2p)} \cos(2p+3)\theta_1) \\
 &\quad + (2p+1) (M_{2p+1}^{(2q-2p)} \sin(2p+1)\theta_1 \\
 &\quad + M_{2p+1}^{(2q-2p)} \cos(2p+1)\theta_1)] \lambda^{2q+1} \} \quad (23)
 \end{aligned}$$

这里 F_{iA}, F_{iB} 为应力强度因子的修正因子, 式中 N 由计算精度的要求而定。

注意到本问题中参数的适当选择可包括如下两种重要的情况

(i) 裂纹-裂纹的加筋结构 (参见图 2)

本结构对应为 $b_1=0$, 亦即 $s_1=0$, $k=1$, 此时 (18) 中成立

$$\tilde{R}_p^n = \tilde{P}_p^n, \quad \tilde{S}_p^n = \tilde{T}_p^n = \tilde{Q}_p^n, \quad \tilde{V}_p^n = \tilde{N}_p^n$$

同理, C, D 端的应力强度因子为

$$(K_{iC}, K_{iD}) = \sigma' \sqrt{a_1} (F_{iC}, F_{iD})$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} F_{1C} \\ F_{1D} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta_2) + \sum_{q=1}^N \sum_{p=0}^{q-1} \frac{p+1}{2^{2p}} \binom{2p+1}{p} \\
 &\quad \times [(2p+2) (\tilde{K}_{2p}^{(2q-2p)} \cos(2p+2)\theta_2 - \tilde{K}_{2p}^{(2q-2p)} \sin(2p+2)\theta_2 \\
 &\quad + \tilde{M}_{2p}^{(2q-2p)} \cos 2p\theta_2 - \tilde{M}_{2p}^{(2q-2p)} \sin 2p\theta_2) \mu^{2p} \lambda^{2q} \\
 &\quad \pm (2p+3) (\tilde{K}_{2p+1}^{(2q-2p)} \cos(2p+3)\theta_2 - \tilde{K}_{2p+1}^{(2q-2p)} \sin(2p+3)\theta_2 \\
 &\quad + \tilde{M}_{2p+1}^{(2q-2p)} \cos(2p+1)\theta_2 - \tilde{M}_{2p+1}^{(2q-2p)} \sin(2p+1)\theta_2) \mu^{2p+1} \lambda^{2q+1}] \\
 \begin{bmatrix} F_{2C} \\ F_{2D} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \sin 2\theta_2 + \sum_{q=1}^N \sum_{p=0}^{q-1} \frac{p+1}{2^{2p}} \binom{2p+1}{p} \\
 &\quad \times \{ [(2p+2) (\tilde{K}_{2p}^{(2q-2p)} \sin(2p+2)\theta_2 + \tilde{K}_{2p}^{(2q-2p)} \cos(2p+2)\theta_2) \\
 &\quad + 2p (\tilde{M}_{2p}^{(2q-2p)} \sin 2p\theta_2 + \tilde{M}_{2p}^{(2q-2p)} \cos 2p\theta_2)] \mu^{2p} \lambda^{2q}
 \end{aligned}$$

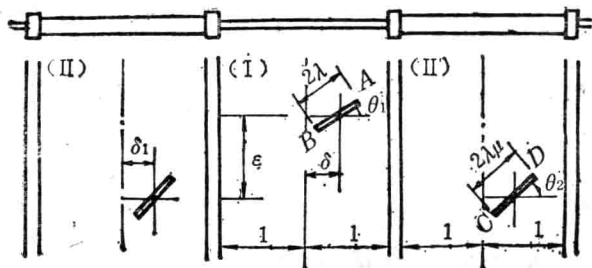


图 2

$$\begin{aligned} & \pm [(2p+3)(\bar{K}_{2p+1}^{(2q-2p)} \sin(2p+3)\theta_2 + \bar{K}_{2p+1}^{(2q-2p)} \cos(2p+3)\theta_2) \\ & + (2p+1)(\bar{M}_{2p+1}^{(2q-2p)} \sin(2p+1)\theta_2 \\ & + \bar{M}_{2p+1}^{(2q-2p)} \cos(2p+1)\theta_2)] \mu^{2p+1} \lambda^{2q+1} \end{aligned} \quad (25)$$

(ii) 裂纹-圆孔的加筋结构(参见图 9)

圆孔为椭圆孔的 $b_1=a_1$ 的特例, 然而因 $R \rightarrow \infty$, 关系式(15)中第二个式子已不适用, 须另行考虑, 利用复势展开式(10)以及应力、复势关系式(4)的后三式化为极坐标形式, 由圆孔边缘应力自由易推知

$$\left. \begin{aligned} \bar{D}_0 &= \frac{1}{2}(\mu\lambda)^2 + 2\bar{M}_0(\mu\lambda)^2 \\ \bar{D}_1 &= \bar{M}_1(\mu\lambda)^4 \\ \bar{D}_n &= \frac{1}{4}(\mu\lambda)^4 \delta_{n,2} + (n-1)\bar{K}_{n-2}(\mu\lambda)^{2n} + n\bar{M}_n(\mu\lambda)^{2n+2}, \quad (n \geq 2) \\ \bar{F}_n &= -\frac{1}{2}(\mu\lambda)^2 \delta_{n,0} - (n+2)\bar{K}_n(\mu\lambda)^{2n+2} - (n+3)\bar{M}_{n+2}(\mu\lambda)^{2n+4}, \quad (n \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

其中 $\delta_{m,n}$ 为 Kronecker 符号; 字母上“—”表示其复共轭。类似的摄动展开, 可推得相应的递推关系式, 而 A、B 端的应力强度因子计算式与(23)相同。

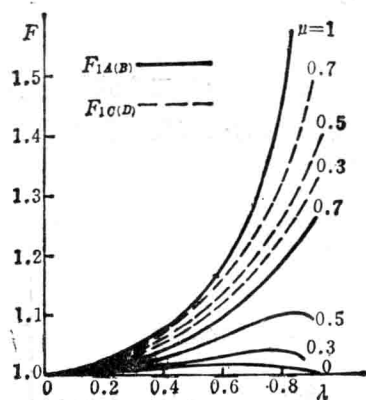
三、数值计算结果

由上面分析, 修正因子 F 依赖于 $N, \alpha, \beta, \gamma, \mu, \varepsilon, \delta, \delta_1, \lambda, \theta_1, \theta_2, \nu, \nu'$ 等参数。为了简化计算, 若无特别说明表示取 $\nu = \nu' = 0.3$ 。数值计算误差来自两方面, 一是(12)中 α_p^n 等元素的数值积分误差, 二是 F 的 λ 幂级数项 N 的选取产生的截断误差。实际计算表明, F 关于 λ 具有很好的收敛特性, 下面就若干实例给出其数值计算的曲线图表, 以说明各个参数对 F 的影响, 为了保持图象清晰, 以下图表仅给出部分端点, I 或 II 型的应力强度因子的 F 曲线。

图 3~图 8、表 1~表 3 对应图 2 的裂纹-裂纹加筋结构。其中, 图 3 是共线、不等长、中心裂纹的等厚度板条的加筋结构, 由对称性知, $F_{1B} = F_{1A}$, $F_{1D} = F_{1C}$; 当 $\mu=1$ 时, 此为等裂纹情况, 各裂纹端点的 F_1 值均相等, 从理论上可见: F 值与弯曲刚度比 γ 无关。应该指出: M. Isida 在 [5] 中的计算曲线 β 值是标得错误的。原因在于他从一块含中心裂纹的加筋板出发, 令 $\gamma \rightarrow \infty$, 得到共线、中心裂纹的连续加筋板条的裂纹应力强度因子, 但此时相应共线裂纹的加筋条拉伸刚度应增大一倍, 换句话说, M. Isida 标出的 β 值应改为 2β 值才是正确的。还应指出: 当 $\mu=0$, 即板条 II 不含裂纹, 计算结果表明 $F_{1A} \approx 1$, 这与 [5] 中的曲线有所不同。当 $0 < \mu < 1$, 图上 $F_{1C} > F_{1A}$, 但因

$$\frac{K_{1A}}{K_{1C}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{F_{1A}}{F_{1C}},$$

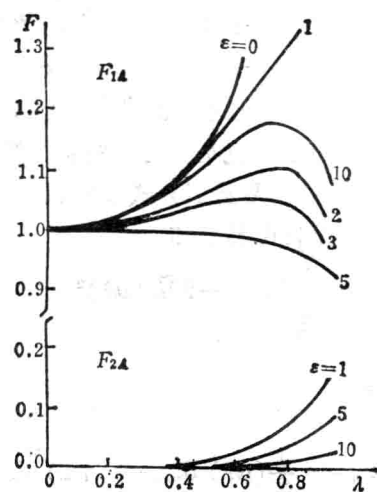
实际上 K_{1A} 稍大于 K_{1C} 。图 4 是平行中心裂纹的加筋结构, 由于裂纹等长, 各端点的 F_1 值相等、 F_2 绝对值相等, 从图上曲线看出, 当裂纹由共线到互相错开, 随着距离增大, F_{1A} 、 F_{2A} 有下降趋势, 这因为裂纹之间互相干涉, 抑制了裂纹尖端的 F_1 值, 亦即板的强度较共线情况有所提高, 但当距离增大到一定范围之后, 这种抑制性的干涉逐渐减弱, 致使



$$\alpha=1, \beta=0.1, \gamma=0.01$$

$$\varepsilon=\delta=\theta_1=\theta_2=0$$

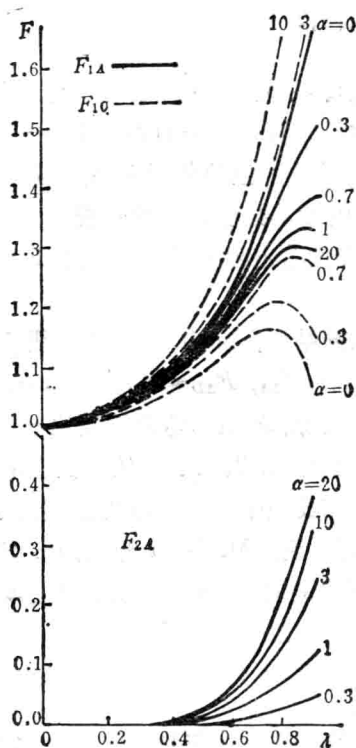
图 3



$$\alpha=1, \beta=0.1, \gamma=0.01, \mu=1$$

$$\delta=\theta_1=\theta_2=0$$

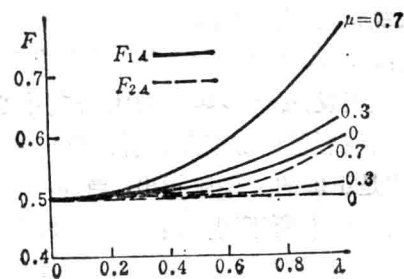
图 4



$$\beta=0.1, \gamma=0.01, \mu=\varepsilon=1$$

$$\delta=\theta_1=\theta_2=0$$

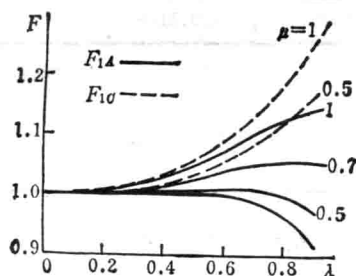
图 5



$$\alpha=1, \beta=0.1, \gamma=0.01$$

$$\varepsilon=\delta=\theta_1=0, \theta_2=45^\circ, \theta_3=0^\circ$$

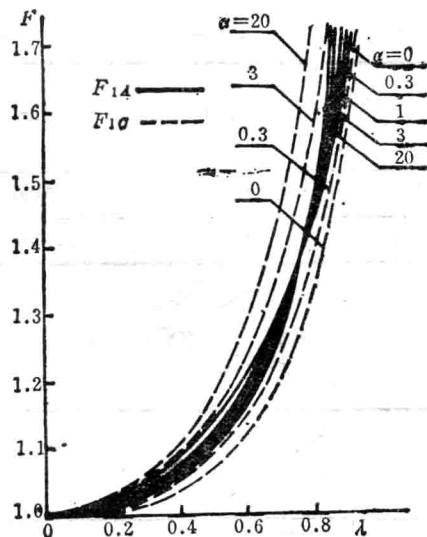
图 6



$$\alpha=1, \beta=0.1, \gamma=0.01, \varepsilon=0$$

$$\delta=0.3, \delta_1=\theta_1=\theta_2=0$$

图 7



$$\beta=0.1, \gamma=0.01, \mu=1$$

$$\varepsilon=\delta=\delta_1=\theta_1=\theta_2=0$$

图 8

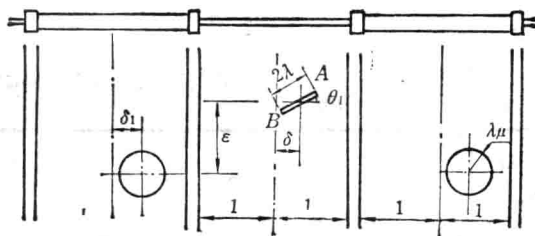


图 9

F_{1A} 又逐渐回升到一定值。注意此值不一定与 $\mu=0$ 时的相同, 因为 Saint-Venant 原理对薄壁结构可能不成立。图 5 是不同板条厚度的平行、中心裂纹的加筋结构, 对板条 I, 随 α 增大, F_{1A} 下降, 当裂纹愈长, 这现象愈明显; 对板条 II, 其情况恰恰相反。图 6 是斜裂纹与水平裂纹之间的干涉。图 7 是共线、偏心裂纹的加筋结构, 类似上面对图 3 分析, 对于同一 μ 值有 $K_{1A} > K_{1σ}$ 。图 8 是共线、中心裂纹不同厚度板条的加筋结构, 对照 [6], 由于筋条的加强作用, 使 F_1 下降, 但在长裂纹场合下效果并不明显, 图中 $\alpha=1$ 曲线与 $\alpha=0$ (取 $\nu'=0$) 曲线与 [7] 一致。表 1 为无筋条、对称斜裂纹结构, 有

$$F_{1A} = F_{1B} = F_{1σ} = F_{1D},$$

$$F_{2A} = F_{2B} = -F_{2σ} = -F_{2D}.$$

表 2 为对称偏心、共线裂纹结构, 数据结果表明筋条加强使近筋条的裂纹端点 F_1 值有较大的改善。表 3 是对称偏心、斜裂纹情况, 结构的特点与表 2 的说明相仿。图 10~图 15 为几个裂纹-圆孔加筋结构 (参见图 9) 的实例, 其图线的特点与上面相仿, 不再详细一一说明。

表 1

 $(\alpha=1, \beta=\gamma=0, \mu=1, \varepsilon=\delta=\delta_1=0, \theta_1=45^\circ, \theta_2=135^\circ)$

$F \backslash \lambda$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
F_{1A}	0.5010	0.5100	0.5317	0.5742	0.6547
F_{2A}	0.5000	0.5006	0.5046	0.5169	0.5486

表 2

 $(\alpha=1, \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \beta=\gamma=0 \\ \text{(ii)} \beta=0.1, \gamma=0.01 \end{array} \right\}, \mu=1, \varepsilon=0, \delta=0.1=-\delta, \theta_1=\theta_2=0)$

	$F \backslash \lambda_1$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
(i)	F_{1A}	1.0034	1.0334	1.1074	1.2760	1.8115
	F_{1B}	1.0034	1.0316	1.0968	1.2288	1.5425
(ii)	F_{1A}	1.0030	1.0291	1.0919	1.2265	1.5854
	F_{1B}	1.0030	1.0278	1.0843	1.1946	1.4336

表 3

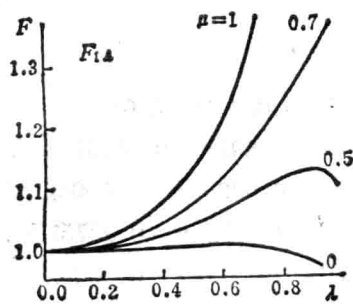
 $(\alpha=1, \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \beta=\gamma=0 \\ \text{(ii)} \beta=0.1, \gamma=0.01 \end{array} \right\}, \mu=1, \varepsilon=0, \delta=0.1=-\delta, \theta_1=45^\circ, \theta_2=135^\circ)$

	$F \backslash \lambda_1$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
(i)	F_{1A}	0.5009	0.5086	0.5277	0.5651	0.6345
	F_{1B}	0.5008	0.5075	0.5226	0.5506	0.5999
	F_{2A}	0.5000	0.4999	0.5012	0.5075	0.5266
	F_{2B}	0.5000	0.5009	0.5052	0.5161	0.5385
(ii)	F_{1A}	0.5007	0.5069	0.5230	0.5556	0.6156
	F_{1B}	0.5006	0.5058	0.5182	0.5422	0.5852
	F_{2A}	0.4999	0.4993	0.4990	0.5022	0.5146
	F_{2B}	0.5000	0.5004	0.5036	0.5121	0.5296

下面讨论数值计算的收敛性与精确度,由理论推导,端点 A 的应力强度因子为

$$K_{1A} = \sigma \sqrt{a} F_{1A}, \quad F_{1A} = C_0 + \sum_{q=1}^{2N+1} C_q \lambda^q \quad (27)$$

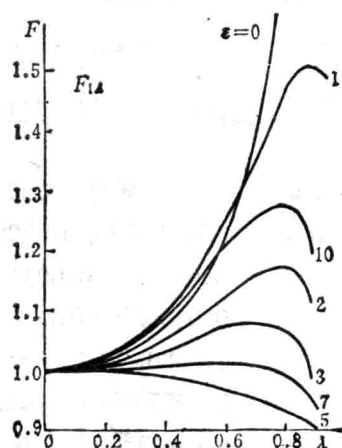
实际计算表明, F 的 λ 幂级数中系数 C_q 或 C_{2p} 其绝对值单调下降,也就是说,它具有比几何级数更快的收敛速度,对 $\{|C_q|\}$ 递减情况, (27) 的截断误差小于 $\frac{|C_{2N+1}| \lambda^{2N+2}}{1-\lambda}$; 对 $\{|C_{2q}|\}$



$$\alpha=1, \beta=0.1, \gamma=0.01$$

$$\varepsilon=\delta=\delta_1=\theta_1=0$$

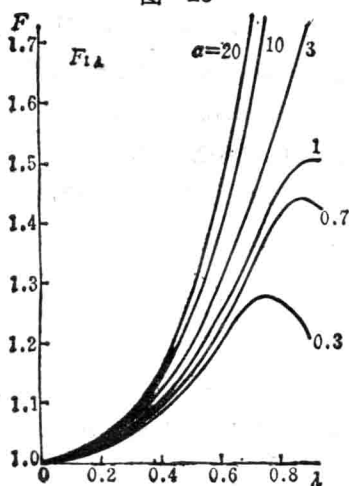
图 10



$$\alpha=1, \beta=0.1, \gamma=0.01, \mu=1$$

$$\delta=\delta_1=\theta_1=0$$

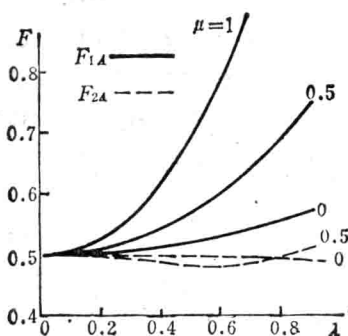
图 11



$$\beta=0.1, \gamma=0.01, \mu=\varepsilon=1$$

$$\delta=\delta_1=\theta_1=0$$

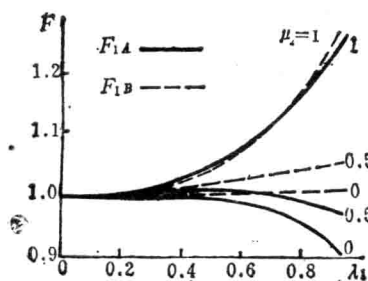
图 12



$$\alpha=1, \beta=0.1, \gamma=0.01$$

$$\varepsilon=\delta=\delta_1=0, \theta_1=45^\circ$$

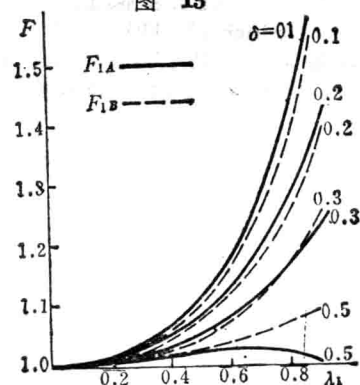
图 13



$$\alpha=1, \beta=0.1, \gamma=0.01, \varepsilon=0$$

$$\delta=0.3, \delta_1=\theta_1=0$$

图 14



$$\alpha=1, \beta=0.1, \gamma=0.01, \mu=1$$

$$\varepsilon=\delta_1=\theta_1=0$$

图 15