

振动量测及分析

石 沅

同济大学结构理论研究所

一九八三年十二月

前 言

《振动量测及分析》是工程力学专业的一门必修课程。主要内容是介绍测振设备的基本原理、振动测试及数据分析方法。

本教材试图着重讲清激振设备，测振传感器的力学原理；正弦稳态、瞬态、随机激振的基本原理、测试方法及试验资料的分析。以及测振技术在实际工程中的应用。为避免在教材中过多的介绍各种仪器设备及其使用方法，这些内容均编写于《振动试验指导书》中。

本教材是在《振动测试技术》教材（为编者于80年6月与陈康元同志合编）的基础上改编。在改编过程中有关章节请吴月明、沈宏甫、俞寿鹏同志审阅，他们均热情地给予帮助，并提出许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，内容及叙述中有不当之处，恳请读者指正。

编 者

83年12月

目 录

第一章 振动量测的基本概念	1
§ 1.1 概述	1
一、振动量测的意义	1
二、振动量测的任务	1
§ 1.2 机械振动分类及描述	2
一、确定性振动	3
二、随机振动	6
三、各态历经随机振动的基本特性	8
四、各态历经随机振动的联合特性	13
§ 1.3 振动基本参量表示方法及常用测量方法	16
一、振动基本参量表示方法	16
二、振动量测常用方法	19
三、测试设备分类	20
第二章 激振设备	22
§ 2.1 概述	22
一、激振设备分类	22
二、激振设备的基本技术参数	22
§ 2.2 机械式激振设备	23
一、机械式振动台	23
二、机械式激振器	26
§ 2.3 电动式激振设备	28
一、电动式激振设备工作原理	28
二、电动式振动台	28
三、电动式激振器	30
§ 2.4 电动式激振设备计算模型及频率特性	31
一、激振设备空载时的计算模型及频率特性	31
二、激振设备在承载时的计算模型	34
三、激振器可动部件的质量、固有频率对试验结果的影响	35
四、激振器的安装问题	37
§ 2.5 电气液压式振动台	39
一、电液振动台的主要组成部分及工作原理	39
二、电液伺服阀工作原理	40

三、电液振动台特点	40
四、大型模拟地震振动台	41
五、各种振动台比较	42
§ 2.6 其他激振设备	42
一、反冲激振器	42
二、压电晶体片激振器	43

第三章 惯性式速度型传感器 45

§ 3.1 惯性式速度型传感器的力学模型	45
一、结构	45
二、运动微分方程及其解	45
三、幅频及相频特性曲线	47
四、阻尼对测振仪性能的影响	48
§ 3.2 惯性式速度传感器	49
一、结构及原理	49
二、主要技术指标	50
三、典型的速度传感器	51
四、低频速度传感器	53
五、相对式速度传感器举例	55
§ 3.3 测振传感器的标定	56
一、灵敏度	56
二、频率响应	58
三、线性范围	58
§ 3.4 测试系统	58
一、位移、速度及加速度的测量	58
二、微分与积分网络	58
三、测试系统	62

第四章 惯性式加速度型传感器 64

§ 4.1 加速度计的力学原理	64
§ 4.1 压电晶体加速度计	65
一、压电晶体及压电效应	65
二、压电晶体加速度计的结构及工作原理	65
三、幅频特性曲线及相频特性曲线	67
§ 4.3 压电晶体加速度计的性能指标	69
一、谐振频率	69
二、灵敏度	71
三、横向灵敏度比	72
四、频率响应	72

五、幅值线性度(动态范围)	73
§ 4.4 加速度计的安装	73
§ 4.5 压电加速度计的测量线路	75
一、压电加速度计的等效电路及其对测量电路的要求	75
二、电压放大器	76
三、电荷放大器	78
四、电荷放大器之组成部分和主要技术指标	81
§ 4.6 其他加速度传感器及力传感器	81
一、电阻应变片式加速度传感器	81
二、压阻式加速度计	84
三、差容式加速度计	85
四、伺服式加速度计	87
五、压电晶体力传感器	90
第五章 记录及分析设备	92
§ 5.1 记录设备概况	92
§ 5.2 光线示波器	93
一、光线示波器的工作原理	93
二、光线示波器的主要组成部分	93
三、振子	94
§ 5.3 磁带记录仪	95
一、概述	95
二、原理与结构	96
三、记录方式	98
§ 5.4 分析设备概况	100
§ 5.5 模拟信号处理系统简介	103
§ 5.6 数字信号处理系统简介	104
一、数据准备	104
二、7 T08 S 信号分析设备简介	106
第六章 振动特性参数的常用测量方法	108
§ 6.1 振动基本参数的测量	108
一、简谐振动频率的测量	108
二、振动幅值的测量	110
三、相位的测量	112
§ 6.2 结构动力特性参数测量	113
一、结构固有频率	114
二、阻尼参数	116
三、振型	117

§ 6.3 稳态正弦激振	119
一、稳态正弦激振的理论根据	119
二、测试方法	120
三、由幅频特性曲线分析阻尼比值	121
四、由动力系数 $\mu(\omega)$ 求阻尼比值	122
五、通过测定共振频率推算衰减系数	123
§ 6.4 瞬态激振	123
一、瞬态激振有关理论	123
二、测试方法	125
三、用自由振动法测阻尼比 ζ 、对数衰减率 λ	125
§ 6.5 随机激振	126
一、概况及基本假设	127
二、由时程曲线分析结构动力特性	129
三、结构模态分析理论根据	130
四、结构模态参数识别	133
§ 6.6 数据分析技术	134
一、随机数据分析中的统计误差	134
二、记录时间 T 的确定	136
三、分段数 q 的确定	138
§ 6.7 利用激光测大位移	138
§ 6.8 强震观测简介	140
一、概述	140
二、强震观测的任务与特点	141
三、强震仪简介	142
四、强震台站网布点原则	143
五、强震记录的分析与处理简介	144
附 录 结构动力特性测定实例	146
附录一: 斜张桥结构动力特性测量及分析	146
提 要	146
前 言	146
一、测试方法、设备及测点布置	147
二、测试分析结果	153
三、结论	155
附录二: 在风力作用下高层建筑动力特性测试及分析	157
前 言	157
一、台风的特点及参数	158
二、空气弹性现象——流体和结构的相互作用	160
三、对风输入、结构位移响应输出的实际测定举例	160
四、讨论	165

第一章 振动量测的基本概念

§ 1.1 概 述

一、振动量测的意义

随着生产及科学技术的发展,越来越多的振动课题要求人们研究解决,以达到减小不利的振动,及利用振动为人类服务的目的。解决振动问题,可通过理论分析及实验研究二种手段进行。振动量测就是通过实验的方法对振动进行分析研究,它是振动学科的一个重要组成部分。量测工作可对实际结构物在实际工作状态下进行,这称实测,或在给定的试验条件下进行量测;也可以对不同尺度、不同特点的模型(几何相似、物理相似等模型)进行激振试验,然后可通过相似原理等模型理论把结果换算到实际结构上去,这种称模型试验。

通常在进行理论分析计算前,都要进行调查研究或振动试验,以作实际观察,提炼出简化的计算模型,而这模型是否反映事物的本质又需通过试验来验证,此外,各种不同的计算方法往往也需通过试验来确定其是否可靠,并为提出更合理的计算理论提供依据;而在计算时需用到的一些参数,如阻尼、刚度等需通过试验来获得。

二、振动量测的任务

工程中常遇到的需进行振动试验的课题,归纳起来有以下几个方面:

1. 测定被研究结构在实际工作时的振动水平(幅值、频率)及性状(振动特点)。例如机器运转、锻锤冲击对厂房结构的作用;车、船飞机等运输设备运行时振动;高耸构筑物、高层建筑、悬索桥、斜张桥等在风荷作用下振动;海上平台等海上建筑物在海浪作用下的振动;建筑物在地震及爆炸冲击波作用下的振动;机器设备在正常运转时振动;精密机器设备、精密仪表所在周围环境的振动;……等等。这些资料可以用来观察被研究对象工作是否正常、安全、存有何种问题,以对原计算、设计及施工进行评价。

2. 对实际结构或模型进行振动的试验研究。采用激振手段对实际结构或模型进行试验,用以测定系统的振动特性参数,如系统的固有频率、振型、阻尼系数以及广义质量、广义刚度等;对计算方法考核验证;模型试验可以用来对各种设计方案进行比较。例如在桥梁设计中,为采用新型结构一般总要进行模型试验,如斜张桥、板桁组合钢桥等,除了进行理论分析外,还对模型进行了静、动载试验,以确定承载能力、动态特性。对桥位处风荷较大的桥,有时还得进行气动分析和节段模型的风洞试验,以选择合理截面、改善气动稳定性,提高抗风荷能力。对某些运载工具,更是离不开试验研究,例如新设计的飞机,在研制过程中,需作大量的地面模拟试验,然后才能进行飞行试验考核。大量的地面模拟试验包括振动试验,即在上天前,必须进行全机地面共振试验,试验时为模拟飞机在空中飞行时的悬浮状态,可用橡皮绳把整架飞机悬挂起来,或安放在刚度很小的气动平台上,然后进行振动测

量,测试出全机的各阶固有频率及相应的振型,为颤振计算提供确切的数据,防止飞机在规定的速度范围内发生颤振破坏现象。

有时通过振动测量还可修正理论上无法考虑到的因素或克服理论上难以克服的困难。

例如冷凝管冷凝管的振动,冷凝管两端是与机箱电焊连接的,见图1.1,其边界的连接,较刚性固定的刚度要小一些,但小多少就无法知道。在理论分析与计算时,可先把两端当作刚性固定,计算其固有频率,再通过振动测量测出其实际的固有频率值,把它与理论计算值相比较确定一修正系数。

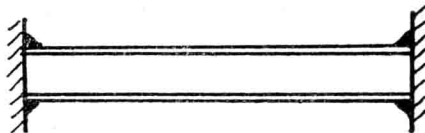


图 1.1 冷凝管的边界连接

3. 模拟振动条件,进行环境试验。某些特殊的产品,必须考虑受到振动或冲击后的影响,例如精密仪表、易损之器皿,在运输途中会否因包装的隔振效果欠佳而受损,弹药等易爆物品运输中的冲击会否引爆,运输工具及飞行器中的仪表设备,在振动环境下是否能正常工作等等均需进行试验后才能给出答案。试验可在不同路面上进行实地运输试验,或更多的是在振动台上进行环境试验。

4. 标定试验,即对振动测试用的仪器设备进行各种参数的标定,以确定仪器的使用范围及灵敏度等参数。

5. 各种试验理论及方法的研究,鉴于试验研究工作具有直观可靠等优越性,从三十年代开始,由于电子技术的发展,导致各种试验理论及试验方法的迅速发展,例如在航空工业中曾应用过相位共振法、矢量分析法,附加质量法,复数功率法,多点激振法,机械阻抗法等等。而所有振动试验理论及试验方法的研究,均离不开振动试验工作。

§ 1.2 机械振动分类及描述

振动是物质运动的一种形式,它是指运动着的某个参量在某一基准值附近作随着时间反复增减的振荡现象。

在工程实际中遇到的振动是形形色色各不相同的,在研究和分析时往往要加以归纳分类,根据其规律,归纳它们的共性。研究分析的出发点不同,分类的方法也不同,例如在振动理论中常把物体的振动分成单自由度振动、多自由度振动及弹性体振动;从其运动规律看又可分成自由振动与强迫振动;从振动特性看又常分为线性振动与非线性振动等。

而振动量测是在某些特定条件下量测被研究对象的某些振动参数,其结果可用数学表达式或图表来表示。

对一振动问题的描述可以在时间域进行,也可以在频率域上进行。对某些较为复杂的振动波形,在频率域中进行分析可使问题简便、明瞭、易看出问题的本质。例如我们知道在有限区间上的一个复杂的周期信号,在一定条件下,总可以分解为许多简谐波的叠加,这在数学上称为富里叶级数。这种把时域函数变换为频域函数的方法称为富里叶变换,当然变换后要求这两种函数所包含的信息完全相同。换句话说,富里叶变换的实质是把一个复杂的连续波形分解成许多不同频率的简谐波之和,如果这些简谐波叠加起来与原来的波形相同,则就确定了这一波形的富里叶变换。

除了用数学表达式来说明一振动特性外,还可以用更为直观的图示方法来表示。对应于时域及频域的分析,其图形有时间历程图及幅值频率图。时间历程图是在时间域内描述振动,即把振动的某个值表示为时间的函数:如果研究振动的幅值,则在时间历程图中横座标为时间轴,纵座标为幅值轴,其图形简称为时程曲线。幅值频率图是在频率域内描述振动,是把振动的幅值表示为频率的函数,此图形横座标为频率,纵座标为幅值,图形简称为频谱图。

通常把机械振动按信息与数据的形式分成确定性振动及随机振动两大类。

一、确定性振动

确定性振动亦称定型振动或有规则振动,它的运动规律可用精确的数学表达式加以描述。如果重复作一试验,只要一切条件完全相同,并且不考虑仪器的偶然误差的话,则可以得到完全相同的试验结果。

确定性振动又可分为周期振动及非周期振动两类。周期振动可用数学表达式

$$f(t) = f(t + T)$$

来表示,它还可以进一步分为简谐振动及复杂周期振动两类。非周期振动又可分为准周期振动及瞬变振动两类。图 1.2 表示确定性振动的分类。

对确定性振动,通常要确定其主要谐波分量的频率值及其对应的幅值。

下面对每一种确定性振动作简单介绍。

1. 简谐振动

简谐振动是一种最简单、最基本的振动形式。如无阻尼质量——弹簧系统的振动、偏心质量块绕定轴等速转动时引起的振动等。其时变函数为

$$\begin{aligned} y(t) &= A \sin(\omega_0 t + \omega) \\ &= A \sin(2\pi f_0 t + \omega) \end{aligned} \quad (1.1)$$

式中: A —— 振幅;

ω_0 —— 圆频率, 单位: 弧度/秒;

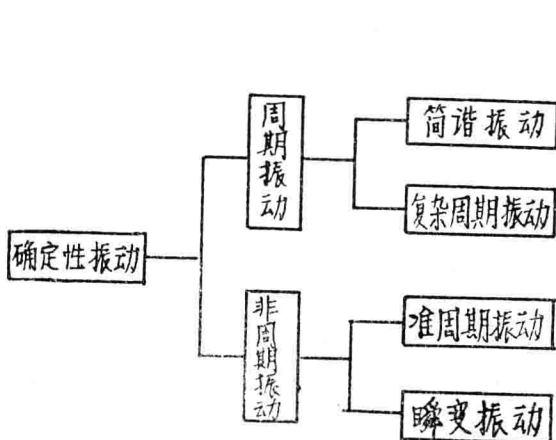


图 1.2 确定性振动分类

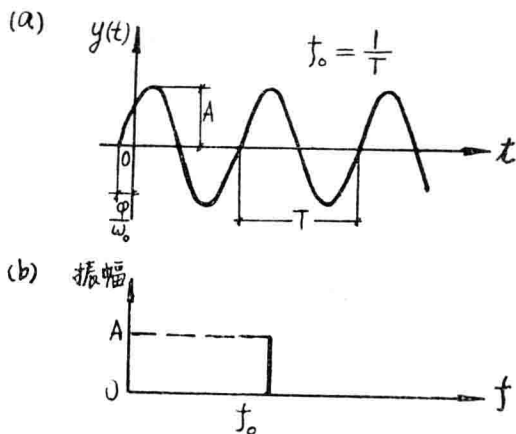


图 1.3 简谐振动图例

a) 时间历程曲线 b) 频率幅值图

f_0 ——频率, 单位: 赫芝, HZ ;

φ ——相对于时间原点的初相角, 单位: 弧度;

$y(t)$ ——为 t 时刻的瞬时幅值。

以上方程所描述的波形称为正弦波, 图 1.3 (a) 为其时间历程曲线。

从图中可看出, 只要确定振幅、频率、初始相位三个参数简谐振动就完全确定。

方程 (1.1) 的振幅频率图见图 1.3 (b), 它是位于 f_0 处、高为 A 的一根直线。此图形称为线谱或离散谱。

2. 复杂周期振动

复杂周期振动能用如下的周期性时变函数表示:

$$y(t) = y(t \pm nT), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

它由与基波成为整数倍的波形所组成。

在实践中经常可以遇到复杂周期振动现象, 例如多台不同转速的机器在同一楼板上激起的振动; 内燃机活塞杆上某点的振动。图 1.4 (a) 为复杂周期振动的时程图, 其幅值频率图如图 1.4 (b)。

任一复杂周期振动一般均可按下式展开成富里叶级数。

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_1 t + b_n \sin 2\pi n f_1 t) \quad (1.3)$$

式中

$$f_1 = \frac{1}{T_1}$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} y(t) \cos 2\pi n f_1 t dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} y(t) \sin 2\pi n f_1 t dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

其中 $\frac{a_0}{2}$ 称为直流分量; $2\pi f_1 = \omega_1$ 称为基频; $2\pi n f_1$ 称为 n 阶谐频, 与其对应的

$$(a_1 \cos 2\pi f_1 + b_1 \sin 2\pi f_1 t)$$

称为基波,

$$(a_n \cos 2\pi n f_1 t + b_n \sin 2\pi n f_1 t)$$

称为 n 阶谐波。

复杂周期振动还可以用另一种形式表达,

即
$$y(t) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cos (2\pi n f_1 t - \varphi_n) \quad (1.4)$$

式中

$$y_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$y_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\varphi_n = \operatorname{tg}^{-1}(b_n/a_n) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

从 (1.3) 及 (1.4) 式可看出, 复杂周期振动是由静态分量 (y_0) 项与无穷多个振幅、初相角不相同, 频率与基频成整数倍的简谐波分量叠加而成, 当然其中有些项的幅值可以为零。

在实际分析数据时, 相角常常可以忽略, 这样式 (1.4) 可用离散谱未表征, 其幅频图见图 1.4 (b)。由此图可以看出, 复杂周期振动的幅频图是由无数根离散的谱线组成, 每一根

谱线代表一个谐波分量，各谐波频率均与基频成整数倍。

3. 准周期振动

如果若干个频率不成比例关系的简谐振动叠加在一起，合成后的振动不呈现周期性，这即称为准周期振动。例如：

$$y(t) = y_1 \sin(t + \varphi_1) + y_2 \sin(5t + \varphi_2) + y_3 \sin(\sqrt{7}t + \varphi_3)$$

式所表示的振动，由于其频率比分别为 $\sqrt{7}$ ， $\sqrt{7}/5$ ，都不是有理数，找不到一个与各个谐波频率为倍数的基频，所以不成为周期振动，表现在时程曲线不呈现周期性。准周期振动的时变函数可由(1.5)式表示：

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin(2\pi f_n t + \varphi_n) \quad (1.5)$$

其中任意两项，例如任意项 k 、 l 的频率比 f_k/f_l 不是有理数。准周期振动的频谱图亦是无数根离散的谱线组成。例如图(1.5)。

4. 瞬变振动

除了周期振动及准周期振动以外的所有确定性振动，均为瞬变振动。瞬变振动的幅值随

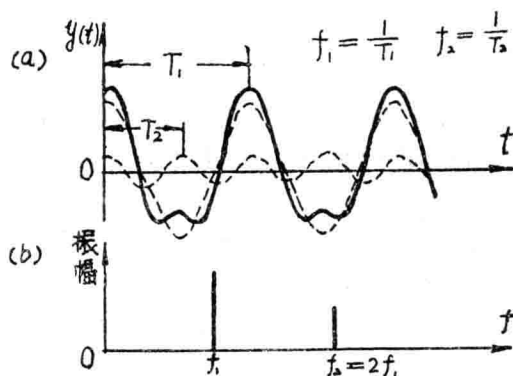


图 1.4 复杂周期振动图例

(a) 时间历程曲线 (b) 频谱图

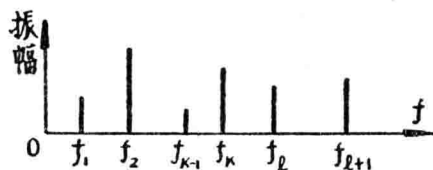


图 1.5 准周期振动幅频图

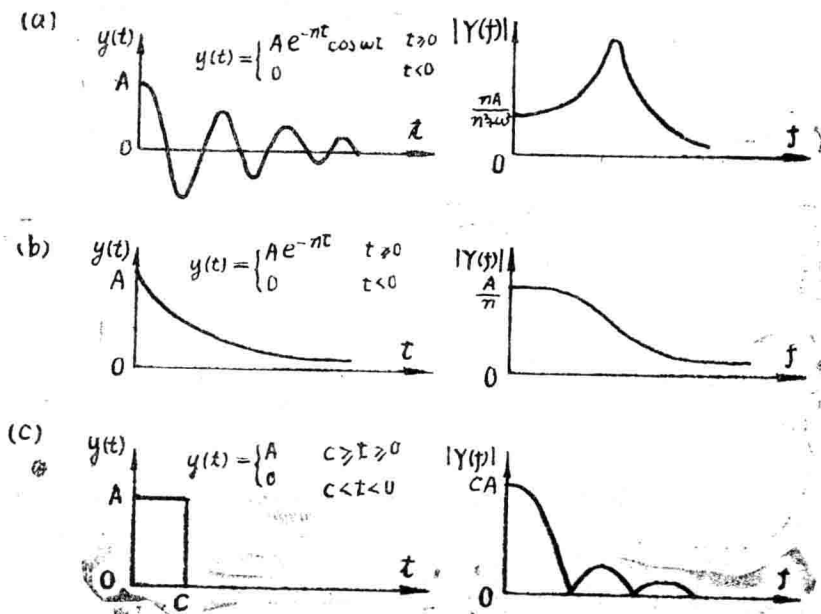


图 1.6 几种瞬变振动的时程曲线及频谱曲线

(a) 有阻尼自由衰减振动

$$y(t) = Ae^{-\pi t} \cos$$

(b) 过阻尼条件下运动

$$y(t) = Ae^{-\pi t}$$

(c) 矩形

$$y(t) = A$$

时间增长而趋于零，所以它是在有限的时间内完成的振动。

例如具有粘滞阻尼系统的自由振动。当激振力解除以后阻尼振动系统的运动为自由衰减振动，其运动方程为

$$y(t) = Ae^{-\gamma t} \cos \omega t \quad (1.6)$$

它是一种：振幅按指数规律衰减、频率为 ω 的伪简谐运动。

当系统的阻尼为过阻尼情况，受干扰后不产生振动，其运动方程为

$$y(t) = Ae^{-\gamma t} \quad (1.7)$$

瞬变振动信号在频率域内，它的谱图已不是离散的谱线，在大多数情况下可以用富里叶积分表示成连续谱。

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-2\pi j f t} dt \quad (1.8)$$

富里叶谱 $Y(f)$ 一般是个复数，它也可以用复数极座标记号表示成

$$Y(f) = |Y(f)| e^{-j\varphi(f)} \quad (1.9)$$

其中 $|Y(f)|$ 是 $Y(f)$ 的模， $\varphi(f)$ 是幅角，均为频率 f 的函数。

图 1.6 列出几种典型的瞬变振动的时程曲线及其对应的幅频曲线。

二、随机振动

1. 随机振动的基本概念

随机振动是一种非确定性振动，它普遍地存在于各个方面，例如车辆在不平整的路面上行驶时产生的振动；风、地震作用于建筑物所产生的振动；海浪引起海上建筑的振动，等等。这种振动的共同特点是：振动的瞬时值是无法精确予测的；此外，即使在相同的条件下重复做多次试验，也不会出现完全相同的结果。例如用一辆汽车在环形路面上作长时间、等速行驶，不时地对车架上某一点竖向加速度值进行记录。图 1.6 为记录所得加速度的时程曲线。由图中看出，每次记录得到曲线 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$... $x_n(t)$...不会完全重复，并且其中任一次记录，仅仅代表许多种可能产生的结果中的一个。

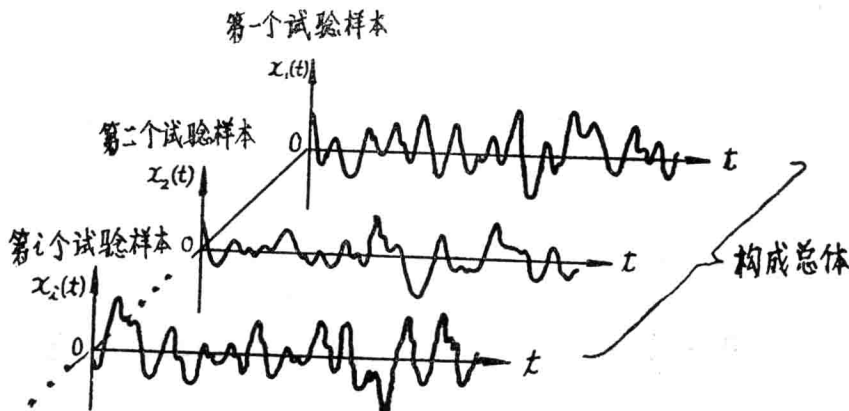


图 1.6 组成随机过程的样本函数总体图例
汽车作路面试验时车架上某点加速度时程曲线

在实际试验中,记录的时间一般总是有限的,在有限时间区间内的试验记录称为样本记录。相应地,在无限时间区间内的记录 $x_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$, 称为随机振动的样本函数。而这些样本函数的总体称为随机过程 $X(t)$ 。记以

$$X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$$

故随机过程 $X(t)$, 不是指某个确定时间 t 的函数 $x(t)$, 而是指试验时所有可能出现的样本函数的集合。

随机振动是由连续分布在一定频带内所有频率上的正弦波组成,故它的频谱是在一定频率范围内的连续谱。

随机振动虽然无法用一精确的数学关系式来描述,但是在大量的观测中,随机振动在任一段时间的状态都具有一定的统计规律性,利用概率论中的随机过程理论,来描述这种规律性,是随机振动理论的一个重要方面。随机振动它可以用概率统计特性参数——例如平均值、均方值、均方根值、幅值概率密度函数、相关函数、功率谱密度等——来描述。

一个随机过程最基本的特征参数是均值(为幅值域参数)及自相关函数(为时延域参数)。参考图 1.8 所示随机过程样本函数集合 ($t \rightarrow \infty$), 此集合也称总体。

均值: 随机过程在某一时刻 t_1 上的均值,是指在 t_1 瞬时, 总体中各样本函数瞬时值 $x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_i(t_1)$ 作平均得到。令均值符号为 $\mu_x(t)$

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t_1) \quad (1.10)$$

从上式可看出,这儿均值是指总体平均、或称集合平均。

自相关函数: 为考虑随机过程两个不同时刻的瞬时值的相关性,可用 t_1 时刻瞬时值与 $t_1 + \tau$ 时刻瞬时值相乘再作总体平均而得到,自相关函数用 $R_{xx}(t, t + \tau)$ 表示。

$$R_{xx}(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t_1) x_i(t_1 + \tau) \quad (1.11)$$

如果式 (1.10)、(1.11) 中的均值 $\mu_x(t_1)$ 、自相关函数值 $R_{xx}(t_1, t_1 + \tau)$ 都随 t_1 的改变而变化的话,则此随机过程称为非平稳的。如果仅是均值、自相关函数值不随 t_1 变化,则称此随机过程为弱平稳随机过程。此时均值为常数,即 $\mu_x(t_1) = \mu_x$ 。自相关函数仅与时间位移 τ 有关,即 $R_{xx}(t_1, t_1 + \tau) = R_{xx}(\tau)$ 。

在随机振动的试验和分析中,发现欲获得总体的参数有一定的困难,因为事实上不可能进行大量的重复 N 次 ($N \rightarrow \infty$) 的现场试验。如果只对总体中某一个样本记录进行时间平均,例如考虑图 1.8 中相应于第 k 个样本函数,即 $i=k$ 时,它的均值自相关函数值可表达为下式:

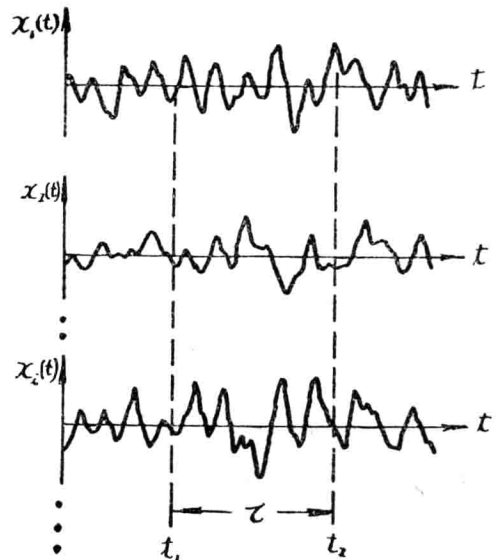


图 1.8

$$\mu_x(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt \quad (1.12)$$

$$R_{xx}(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) x_k(t + \tau) dt \quad (1.13)$$

如果随机过程是平稳的，且取不同样本函数计算 $\mu_x(k)$ 及 $R_{xx}(\tau, k)$ 其结果均相同的话，则称此随机过程为各态历经的。由数理统计理论可知，一个各态历经的随机过程，由单个样本记录所作时间平均得到的均值与自相关函数值，与总体平均所得到的这两个统计值相等。即

$$\mu_x(k) = \mu_x, R_x(\tau, k) = R_{xx}(\tau)。$$

这就意味着允许我们用足够长时间的单个样本记录，来确定平稳随机振动的特性。换句话说，只要过程是各态历经的，就可以用一个单个样本函数在整个时间上的平均，来代替总体平均，从而可使振动的测试和分析工作大为简化。

要判定一个随机过程是否平稳，是否是各态历经的，这要作大量的数据记录及分析检查工作。但在工程问题中，我们可根据被研究对象的物理特性来判定是否为各态历经的过程，或者凭经验给出一些初步意见。或者有时可予先假定所研究的对象具有各态历经的性质，然后再作分析、处理，看其结论是否与实际符合，如果不符则再修改假设，重新处理。由于在工程上所遇到的随机振动近似为各态历经的，所以往往不作细致的判定，就按各态历经过程的要求来进行测试及分析工作。下面也仅讨论各态历经随机振动的基本特性。图 1.9 为随机振动的分类简图。

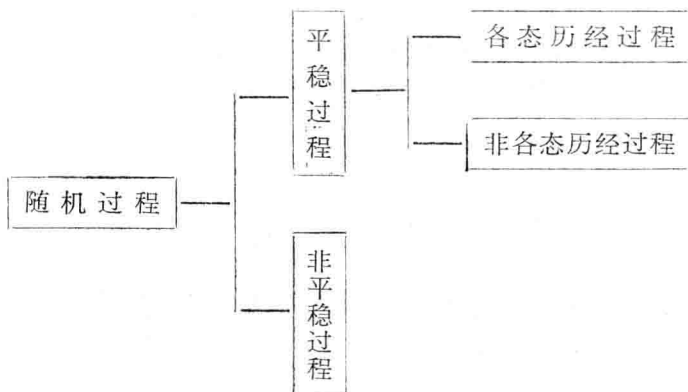


图 1.9 随机振动分类例图

三、各态历经随机振动的基本特性

通常用四种主要的统计函数描述随机数据的基本特性，它们是：均方值、概率密度函数、自相关函数及功率谱密度函数。下面对此四个特性作概括的介绍，假定数据是各态历经的，从而可以用单个样本记录的时间平均来确定其特性。

1. 均方值：均方值是时间历程平方值的算术平均值，它是与随机振动的能量或功率有关的值。样本时间历程 $x(t)$ 的均方值 ψ_x^2 可表示为：

$$\psi_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (1.14)$$

式中 T 称为样本记录长度或采样长度。

均方值的平方根 ψ_x 称为均方根值或有效值，它是一个重要的描述量，因为它与振动能量有直接关系，又能表达出现次数最多的振动峰值。

我们在数据处理中，常希望把振动数据分解为静态分量（即不随时间变化的分量）和动态分量（即随时间变化的分量）二部分，而静态分量可用均值来描述，动态分量可用方差来描述。

均值 μ_x ：即为时间历程 $x(t)$ 上所有值的算术平均值。即

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.15)$$

方差 σ_x^2 ：方差是 $x(t)$ 关于均值的简单均方值，它表示随机数据偏离平均值的程度，亦是随机数据在均值附近分散的程度。

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \mu_x]^2 dt \quad (1.16)$$

方差的正平方根称为标准差或均方差，

展开 (1.16) 式可知方差 σ_x^2 等于均方值 ψ_x^2 减去均值的平方。即

$$\sigma_x^2 = \psi_x^2 - \mu_x^2 \quad (1.17)$$

2. 概率密度函数：

图 1.10 为实测得到的在 T 时间内的时程曲线 $x(t)$ 。由于幅值 $x(t)$ 随机地变化，如能给出 $x(t)$ 值落在某指定范围内的概率，则又进一步描述了此随机振动。随机数据的概率密度函数表示瞬时数据值落在某指定范围内的概率。如考虑图中的时间历程记录 $x(t)$ 。 $x(t)$ 值落在 x 和 $(x + \Delta x)$ 范围内的概率，为时间 T_x 与整个时间 T 的比值。时间 T_x 即是在观察时间 T 内， $x(t)$ 落在 $(x, x + \Delta x)$ 范围内的总时间。当 T 趋于无穷时，此比值将趋于正确的概率值。

$$P_{rob}[x < x(t) \leq x + \Delta x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T} \quad (1.18)$$

如果 Δx 值很小的话，则 (1.8) 式所示概率与 Δx 之比即为概率密度函数 $p(x)$ 。

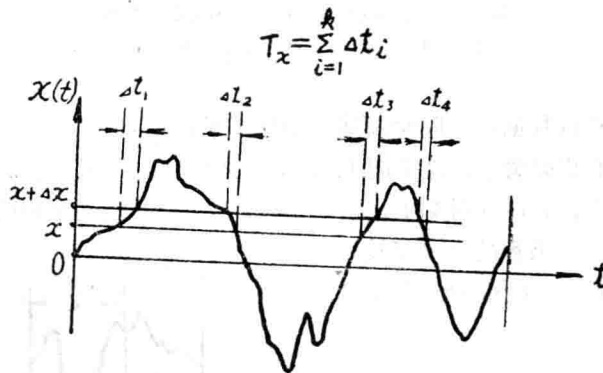


图 1.10 概率测量

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P_{rob}[x < x(t) \leq x + \Delta x]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T} \right] \quad (1.19)$$

概率密度函数 $p(x)$ 恒为实值非负函数。

瞬时值 $x(t)$ 小于或等于某值 x 的概率定义为 $P(x)$ ，它称概率分布函数。等于概率密度函数从 $-\infty$ 到 x 的积分。分布函数 $P(x)$ 的值应在 0 和 1 之间。

为了较直观地理解概率密度函数，下面给出四种实际可能存在的样本时间历程记录及其对应的概率密度函数图。见图 1.11。为简便起见，假定各记录的均值为 0。

令正弦波是初相角 φ_k 为随机变量的一种随机过程。即

$$x(t) = X \sin(2\pi f_0 t + \varphi_k)。$$

其概率密度函数是盆状。而窄带随机噪声及宽带随机噪声具有铃状概率密度图。从图中可看出从正弦波到宽带随机噪声各概率密度曲线的明确变化趋势。由此可以用图来区分正弦与随机数据。

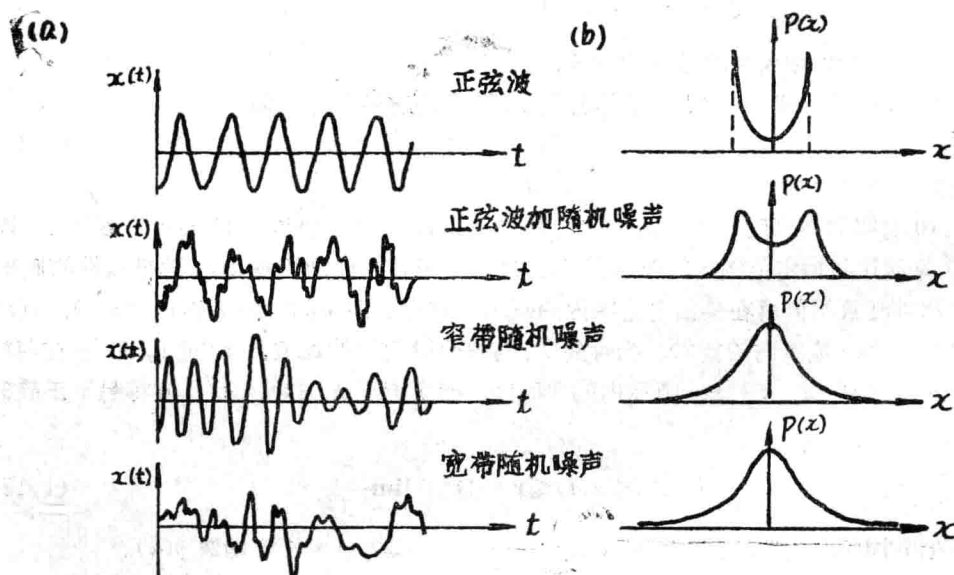


图 1.11 时程曲线及其对应的概率密度函数图例

(a) 时程曲线 (b) 概率密度函数

3. 自相关函数：

自相关函数表示随机数据在不同时刻间的相互关系，也即是描述一个时刻的数据值与另一个时刻数据值之间的相似关系。考虑图 1.12 所示样本时间历程记录 $x(t)$ 。自相关函数定义为在观察时间 T 内， $x(t)$ 在时刻 t 、和时刻 $(t+\tau)$ 上的值之乘积的时间平均。当观察时间 T 趋于无穷时，平均乘积的极限将接近于一个正确的自相关函数。自相关函数 $R_{xx}(\tau)$ 为：

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t+\tau) dt \quad (1.20)$$

自相关值 $R_{xx}(\tau)$ 恒为实值偶函数，可正可负，且在 $\tau=0$ 时有最大值。

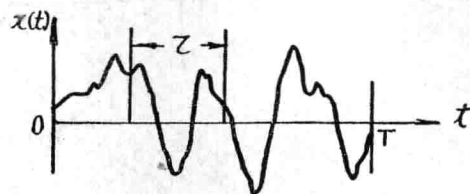


图 1.12 自相关测量

下面给出与图 1.11 相同的四种时间信号的自相关函数图形。见图 1.13。同理熟悉了不同波形自相关图的特点,便于鉴别不同的信号。

由图 (a) 可看出正弦信号的自相关函数图形也为一简谐信号,频率与原正弦波相同。而宽带随机信号的自相关图,见图 (d), 其峰值很快衰减到零。正弦波加随机噪声的自相关曲线如图 (b) 所示,它相当于 (a) 与 (d) 之和。当 $\tau \rightarrow \infty$ 时,随机噪声的自相关函数为零,仅留下正弦波的自相关函数。图 (c) 为窄带随机噪声。由正弦波到宽带随机噪声,自相关曲线亦有明确的变化趋势。

4. 功率谱密度函数:

任何振动数据,除了可以进行时域分析外,还可以进行频域分析。频域分析即是研究信号的频率结构,即讨论信号含有那些频率分量、这些分量的大小如何、等等。

功率谱密度函数是随机振动在频域分析中的重要特征参数,它是整个频域分析中最重要的部分,它反应振动能量在每个频率上的分布。

我们知道,简谐运动的功或能量与其振幅平方或均方值成正比。例如:质点动能的最大

值为 $\frac{1}{2} m x^2 \omega^2$; 弹簧变形位能最大值为 $\frac{1}{2} k x^2$; 阻尼在每周期内所耗散的能量为 $c x^2 \pi \omega$; ..., 由此可看出动能、位能及阻尼耗散能量均与振幅 x 的平方成正比。

在随机振动中,随机振动的能量与时间历程 $x(t)$ 的平方成正比。在时间 T 内的能量 E_T 为:

$$E_T = \int_0^T x^2(t) dt \quad (1.21)$$

在时间 T 内的平均功率 P_T 为

$$P_T = \frac{E_T}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (1.22)$$

对于平稳随机过程来说,当 $T \rightarrow \infty$ 时

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} P_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (1.23)$$

这即是时间历程 $x(t)$ 的平方值的时间平均,亦即是均方值 ψ_x^2 。它与式 (1.14) 所表示的均方值 ψ_x^2 完全相同。

为了分出均方值的不同频率成分及其对应的能量,例如要求出 $x(t)$ 在 f 到 $f + \Delta f$ 频率范围内的均方值 $\psi_x^2(f, \Delta f)$, 可以应用具有精确截止频率特性的理想带通滤波器,对 $x(t)$ 进行滤波,然后将滤波后所输出的 $x(t)$ 平方,再除以积分时间 T , 即可获得所需之值。当观察时间 $T \rightarrow \infty$ 时,这一时间平均的均方值将趋于真实的均方值。以公式表示为:

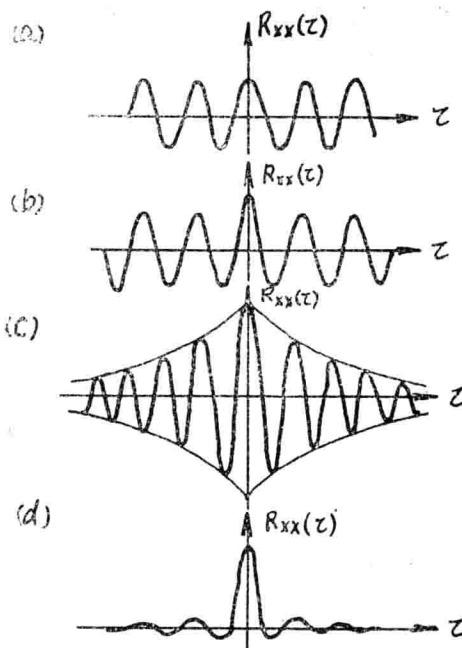


图 1.13 自相关函数图

(a) 正弦波 (b) 正弦波加随机噪声
(c) 窄带随机噪声 (d) 宽带随机噪声