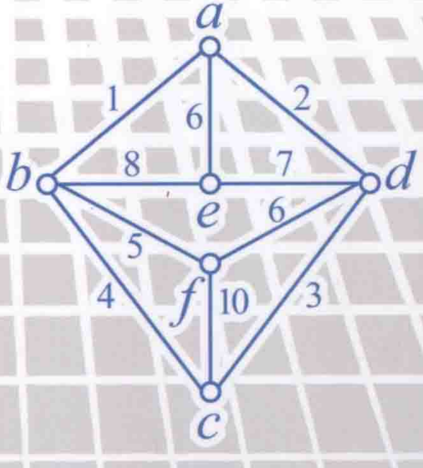
普通高等学校“十二五”规划教材

离散数学

邵学才　主　编
邓米克　副主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

离散数学

普通高等学校“十二五”规划教材

离散数学

主　编　邵学才
副主编　邓米克
参　编　蒋强荣　张　丽　沈彤英

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书根据“淡化理论，突出实用”的指导思想编写，根据培养目标的需求，对理论部分作适当取舍。书中内容包括：集合、二元关系与函数、命题逻辑、谓词逻辑、图论、组合计数初步、代数系统简介。涵盖了离散数学的各方面内容。书中的每一节都配有“例题选解”，这些例题能使学生对相应概念有深入理解，有效地提高学生的学习兴趣。最后还对部分习题给出了详细的参考解答。

本书适合作为普通高等学校计算机专业的教材，也可供数学爱好者参考学习。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/邵学才主编. —北京：中国铁道出版社，2012.8

普通高等学校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-113-14564-4

Ⅰ.①离… Ⅱ.①邵… Ⅲ.①离散数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 120803 号

书　　名：离散数学
作　　者：邵学才　主编

策划编辑：米裕民　李小军　　**读者热线：**400-668-0820
责任编辑：李小军
编辑助理：何　佳
封面设计：付　巍
封面制作：刘　颖
责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社（100054，北京市西城区右安门西街 8 号）
网　　址：http://www.51eds.com
印　　刷：中国铁道出版社印刷厂
版　　次：2012 年 8 月第 1 版　　2012 年 8 月第 1 次印刷
开　　本：720mm×960mm　1/16　　**印张：**19.75　　**字数：**391 千
书　　号：ISBN 978-7-113-14564-4
定　　价：36.00 元

前　言

离散数学是理工科高等院校计算机专业最重要的专业基础课程之一。离散数学不仅为众多的后续课程（如：数据结构、编译原理等）作必要的理论准备，而且离散数学中的综合、分析、归纳、演绎、递推等方法在计算机科学技术中有着广泛的应用，它在培养学生的逻辑思维、抽象思维和创新能力方面有着独特与显著的作用。

本书是以培养应用型人才为主的普通高等学校离散数学课程教材。根据应用型人才培养目标的特殊需求，结合编者40多年的教学实践和体会，对于教材中的理论内容作了适度的取舍，**不盲目追求“系统性”、“完整性”，而是把理论作为载体，提高学生的认知能力、学习能力和创新意识。**另外，还**注重介绍理论的应用实例**，使学生逐步增强“科学理论—技术—生产力”转化的观念和方法，提高学生毕业后在社会上的适应能力。

在教材的写作方法上，作者确立了“**以学生为主**”的编写原则和“**服务于学生**”的指导思想。学生是教材的最大读者群，在教材的编写过程中作者经常要“交换角色”，从学生的阅读角度来审视教材的编写工作，使教材更贴近学生的需求，更符合学生的认知水平，从而使教材具有很强的可读性。这是笔者几十年教学实践的感悟，也是笔者主编的几部教材受欢迎的原因。

离散数学课程内容相对比较稳定，通常由集合（包括二元关系与函数）、数理逻辑、代数系统和图论四部分组成。然而随着计算机科学技术的不断发展，离散数学课程内容也需作适应性的调整。目前有些专家提出了“**淡化代数理论**”的观点，**作者也认同这个观点**，在以培养应用型人才的大学教材中更应如此，所以在本教材中没有对代数系统的内容作详细介绍，而是改为代数系统简介，通过对群和群码的介绍作为主要线索，使学生对代数系统的内部结构及其实用意义有初步的了解。代数系统简介这部

分内容放在教材的最后一章，讲课老师可以根据实际情况决定取舍。

教材中的每一节都配有“例题选解”。其中的例题都是精心挑选的，这些例题能使学生对相应概念有深入理解，有效地提高学生的学习兴趣。所有带“*”的习题均给出了详细解答。

我们期望这本教材能成为有一定特色的、“宜教易学”的教材。

在教材编写过程中，得到亲友邵佩珍、孙方策、邵学正、程玉环以及肖珑、高莹、伊代文和陈帆的热心支持和帮助，作者深表谢意。

北京工业大学计算机学院教学副院长刘建丽教授和教务科长段红峰老师给予了悉心帮助，作者铭记在心。

还要感谢本书的责任编辑、中国铁道出版社教材研发中心副主任李小军先生，他所提出的有益的、建设性意见使教材增色不少；他的善良、宽容、厚道的品格使作者和他合作的过程成为一次愉快而令人难忘的经历。

教材中的不足之处，敬请不吝赐教。

邵学才
2012 年 3 月
于北京延庆格兰山水

目　录

第 1 章

集　　合

集合论是现代数学的基础. 集合论的内容是极其丰富的，有创建于 19 世纪后期的朴素集合论和创建于 20 世纪初的公理化集合论等. 本章主要介绍朴素集合论的基础知识，包括什么是集合，集合的两种表示形式以及子集、全集、幂集等概念；介绍集合的基本运算、有关公式和对偶原理等.

§1.1　集合的基本概念

概念可化为原始概念和派生概念两种. 通常我们所接触到的各类概念，大都是派生概念，所谓**派生概念**是指可由其他概念来定义的概念，例如，正方形可以由邻边相等的矩形来定义，矩形可由内角为直角的平行四边形来定义等. 因此，总存在着这样一类概念，它再也无法由其他概念给予定义，这一类概念称为**原始概念**，几何学中的点、线等都是原始概念，集合也是一种原始概念，不能给出确切的定义，只能给出说明性的描述.

集合就是具有某种特点的研究对象的聚合，其中每一个研究对象称为这个集合的**元素**. 例如，当需要研究中国大学生的消费状况时，清华大学的全体学生可以构成一个集合，每一个清华大学的学生就是这个集合中的一个元素；同样，复旦大学的全体学生也可以构成一个集合，复旦大学的学生就是集合中的元素. 通常用大写的英文字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示集合，用小写的英文字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示集合中的元素. 如果 a 是集合 A 中的元素，称 a **属于** A，并记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 中的元素，称 a **不属于** A，并记作 $a\notin A$.

1.1.1　集合的表示方法

集合有多种表示方法，这里介绍两种常用的表示方法.

1. 列举法

这种表示方法是把集合中的所有元素一一列举出来，元素间用逗号分开，并用花括号括起来. 如集合 A 中有 6 个元素，它们分别是：2，4，6，8，10，12. 用列举法可以把集合 A 表示成

$$A=\{2,4,6,8,10,12\}.$$

又如

$$B=\{a,e,i,o,u\},$$

表明集合 B 中有 5 个元素，它们分别是：a,e,i,o,u.

易见，$2\in A$，但 $7\notin A$；$e\in B$，但 $b\notin B$.

2. 特征法

特征法也称**叙述法**，它以某个小写的英文字母来统一表示集合的元素，并指出这类元素的共同特征. 如

$$C=\{x\mid x\text{ 是正偶数}, x\leqslant 12\}.$$

花括号内的"x"就是用来统一表示集合 C 的元素，其共同特征为：x 是正偶数，并且 $x\leqslant 12$，即集合 C 是由小于等于 12 的正偶数组成. 实际上集合 C 的元素就是：2，4，6，8，10，12. 可见集合 C 和列举法中所提到的集合 A 的元素是完全相同的. 又如

$$D=\{x\mid x\text{ 是英文字母}, x\text{ 是元音}\}.$$

易见，集合 D 中的元素就是：a,e,i,o,u. 它和列举法中所提到的集合 B 的元素是完全相同的.

定义 1.1.1 当集合 P 的元素和集合 Q 的元素相同时，称这两个集合**相等**，记作 $P=Q$；否则称为**不相等**，记作 $P\neq Q$.

显然，上面提到的集合 A,B,C,D 中，有 $A=C,B=D$.

请注意，在集合的表示中，集合中的元素应是各不相同的，或者说当集合中有相同的元素时，这些相同的元素仅视为一个元素. 例如：$\{a,b,b,c,d\}$ 和 $\{a,a,b,c,c,c,d\}$ 是同一个集合，统一表示为：$\{a,b,c,d\}$. 另外，集合与元素间的排列次序无关，例如：$\{a,d,b,c\}$ 与 $\{a,b,c,d\}$ 是同一集合.

当集合中的元素个数为有限时，称此集合为**有限集合**，否则称为**无限集合**.

显然，"列举法"适宜表示元素个数较少的有限集，但当集合中的元素有一定规律时，也可用列举法表示元素较多的有限集或无限集. 例如：

$$P=\{1,3,5,\cdots,99\},$$

$$Q=\{1,2,3,\cdots\}.$$

易见，集合 P 的元素是小于等于 99 的所有正奇数；集合 Q 则是由所有正整数作为元素构成的无限集合.

1.1.2 子集、空集和全集

定义 1.1.2 设 A,B 是集合，如果 A 中每一个元素又都是 B 中的元素，则称 A 是 B 的**子集**，也称 B **包含** A，或 A **包含于** B 中，并记作：

$$B\supseteq A\quad\text{或}\quad A\subseteq B.$$

如果 A 是 B 的子集，且集合 B 中总存在一些元素不属于 A，则称 A 是 B 的**真子集**，并记作

$$B \supset A \quad 或 \quad A \subset B.$$

如果 A 不是 B 的子集，也就是说，在 A 中至少有一个元素不属于 B，则称 B **不包含** A，或 A **不含在** B 中，并记作

$$B \not\supseteq A \quad 或 \quad A \not\subseteq B.$$

例如，设集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,5\}$，$C=\{1,3,5,7\}$. 易见，B 是 A 的真子集，即有 $A \supset B$；B 也是 C 的真子集，即有 $C \supset B$；但 C 不是 A 的子集，因为 $7 \in C$ 但 $7 \notin A$，所以 $A \not\supseteq C$；A 也不是 C 的子集，因为 $4 \in A$ 但 $4 \notin C$，所以 $C \not\supseteq A$.

由集合间的包含关系易得：

定理 1.1.1 集合 A 和 B 相等的充要条件是：$A \supseteq B$ 且 $B \supseteq A$.

上述定理在证明集合相等时，是一种基本而有效的方法.

不含有任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 例如

$$A=\{x \mid x \text{ 是实数}, x^2=-1\}.$$

由于使得 $x^2=-1$ 的实数不存在，所以 A 是空集，即 $A=\varnothing$.

由空集的定义可知，空集是任何集合的子集.

对于非空集合 A 而言，空集 $\varnothing$ 是其子集，而 A 本身也是其子集，常称这两个子集：$\varnothing$ 和 A 为 A 的**平凡子集**，A 的其他子集称为**非平凡子集**.

下面介绍全集的概念.

在实际工作中，我们所研究的对象总是限制在一定范围内，例如我们要研究北京市大学生的健康情况时，研究对象可以是清华大学的学生，也可以是北京工业大学的学生，但研究的对象总是限制在北京市大学生这个范围内，在这种情况下，我们称"北京市大学生的全体"组成的集合为**全集**. 全集常用大写英文字母 E 或 U 来表示，本书采用 E 来表示全集.

请注意，全集的概念和研究对象所处的范围是密切相关的，不同的研究范围就有不同的全集. 一般地讲，当我们讨论总是限制在某个集合的子集时，这个集合就是全集.

1.1.3 幂集

定义 1.1.3 设 A 是集合，由 A 的所有子集作为元素构成的集合称为 A 的**幂集**，记作 $P(A)$.

例如，集合 $A=\{a,b,c\}$，A 的子集有：$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$ 等，另外还有两个平凡子集：$\varnothing$ 和 A，由此可知 A 的幂集为

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}.$$

又如，$A=\{1,2,3,4\}$，则 A 的幂集为

$$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}.$$

当 A 为有限集合时，A 中元素的个数称为集合 A 的**基**，记作 $|A|$，如：$A=\{a,b,c\}$，则 $|A|=3$.

易见，当 $A=\{a,b,c\}$，即 $|A|=3$ 时，其幂集的基 $|P(A)|=8=2^3$；当 $A=\{1,2,3,4\}$，即 $|A|=4$ 时，其幂集的基 $|P(A)|=16=2^4$. 一般情况有：

定理 1.1.2 设 A 是具有 n 个元素的有限集，即 $|A|=n$，则 A 的幂集的基为 2^n，即 $|P(A)|=2^n$.

证明 由排列组合的知识可知，幂集的基为

$$|P(A)|=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n.$$

又由二项式定理可知

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}\cdot b+\cdots+C^{n-1}a\cdot b^{n-1}+C_n^nb^n.$$

特别取 $a=b=1$，则有

$$(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n.$$

由此证得

$$|P(A)|=2^n.$$

为了叙述方便，一些常用的数集用特定的字母表示：

N ——自然数集；
Z ——整数集；
$\mathbf{Z}_+$——正整数集；
$\mathbf{Z}_-$——负整数集；
Q ——有理数集；
$\mathbf{Q}_+$——正有理数；
$\mathbf{Q}_-$——负有理数；
R ——实数集；
$\mathbf{R}_+$——正实数集；
$\mathbf{R}_-$——负实数集.
C ——复数集；

在本书中，自然数集 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$，也称为**扩大自然数集**.

1.1.4 例题选解

例 1.1 求 $A=\{1,2,3,4\}$的幂集.

解 在本例中，将给出一种比较规范的求幂集的方法.

易知，当集合 A 中含有 4 个元素时，其幂集 $P(A)$含有 2^4 个元素，因此可以把幂集 $P(A)$中的元素与 4 位二进制序列：0000，0001，…，1111，建立一一对应关系，从而能比较方便地求得 A 的幂集.

具体做法是：先确定集合 A 中的元素的一种排列顺序. 在本例中，集合 A 中元素的排列顺序不妨设为：1，2，3，4. 其幂集 $P(A)$中的元素与 4 位二进制序列所建立的一

一对应关系如下所示

$$
\begin{array}{cccccl}
\underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & & \underline{P(A)\text{中的元素}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \longrightarrow & \varnothing \\
0 & 0 & 0 & 1 & \longrightarrow & \{4\} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \longrightarrow & \{3\} \\
0 & 0 & 1 & 1 & \longrightarrow & \{3,4\} \\
 & & \vdots & & & \\
1 & 1 & 1 & 0 & \longrightarrow & \{1,2,3\} \\
1 & 1 & 1 & 1 & \longrightarrow & \{1,2,3,4\}
\end{array}
$$

如果把 $P(A)$ 中与 4 位二进制序列及所对应的元素记为 A_k，则

$P(A)=\{A_{0000},A_{0001},A_{0010},A_{0011},A_{0100},A_{0101},A_{0110},A_{0111},A_{1000},A_{1001},A_{1010},A_{1011},A_{1100},A_{1101},A_{1110},A_{1111}\}$，即有

$P(A)=\{\varnothing,\{4\},\{3\},\{3,4\},\{2\},\{2,4\},\{2,3\},\{2,3,4\},\{1\},\{1,4\},\{1,3\},\{1,3,4\},\{1,2\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}\}$.

例 1.2 求下列集合的幂集.

(1) $\{a,b,\{a,b\}\}$；

(2) $\varnothing$；

(3) $\{\varnothing\}$；

(4) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

解 (1)若把集合中的元素顺序排列为：$a,b,\{a,b\}$，则其幂集为：$\{A_{000},A_{001},A_{010},A_{011},A_{100},A_{101},A_{110},A_{111}\}=\{\varnothing,\{\{a,b\}\},\{b\},\{b,\{a,b\}\},\{a\},\{a,\{a,b\}\},\{a,b\},\{a,b,\{a,b\}\}\}$.

(2)其幂集为：$\{\varnothing\}$.

(3)其幂集为：$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

(4)其幂集为：$\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

§1.2 集合的基本运算

建立集合的运算是为了便于使用代数的方法更深入地研究集合，并进一步扩大集合的应用领域.

1.2.1 交运算、并运算和取补运算

定义 1.2.1 设 A,B 是集合，由 A 和 B 的所有共同元素组成的集合称为 A 和 B 的交，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

例如，集合 A 和 B 分别为

$$A=\{1,3,5\},$$
$$B=\{1,2,3,4\},$$

则 $$A\cap B=\{1,3\},$$

又如,集合 A 和 B 分别为

$$A=\{a,b,c,d\},$$
$$B=\{b,c,d,e,f\},$$

则 $$A\cap B=\{b,c,d\}.$$

集合的运算可以用文氏图形象地表示,在图 1-2-1 中,矩形表示全集 E,两个圆分别表示集合 A 和 B,阴影部分就是 $A\cap B$.

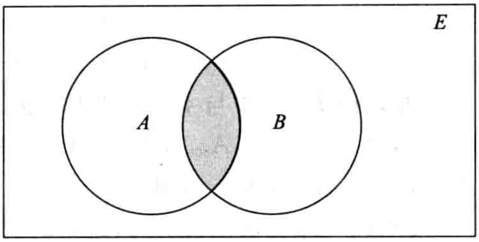


图 1-2-1

由集合交运算的定义可知,交运算具有以下性质:

(1) $A\cap A=A$;

(2) $A\cap\varnothing=\varnothing$;

(3) $A\cap E=A$;

(4) $A\cap B=B\cap A$;

(5) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

如果 $A\cap B=\varnothing$,也即 A 和 B 没有共同元素,则称 A 和 B **不相交**.

定义 1.2.2 设 A,B 是集合,由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合称为 A 和 B 的**并**,记作 $A\cup B$. 即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

例如,集合 A 和 B 分别为

$$A=\{1,3,5\},$$
$$B=\{1,2,3,4\},$$

则 $$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}.$$

又如,集合 A 和 B 分别为

$$A=\{a,b,c\},$$
$$B=\{b,c,d,e\},$$

则 $$A\cup B=\{a,b,c,d,e\}.$$

集合并运算的文氏图表示,如图 1-2-2 所示,图中阴影部分就是 $A\cup B$.

由集合的并运算的定义可知,并运算具有以下性质:

(1) $A\cup A=A$;

(2) $A\cup\varnothing=A$;

(3) $A\cup E=E$;

(4) $A\cup B=B\cup A$;

(5) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

集合的交、并运算有密切的联系，下面给出交、并运算的相关公式.

定理 1.2.1 设 A,B,C 是集合，则

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

证明 只证第一等式，第二等式的证明同理.

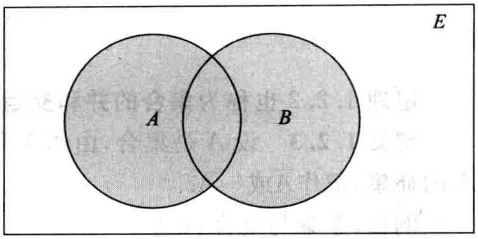


图 1-2-2

证明的方法是利用定理 1.1.1，先证

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

再证

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C),$$

从而证得

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(B\cap C).$$

对于任意的 $x\in A\cap(B\cup C)$，即有 $x\in A$ 且 $x\in(B\cup C)$，即有 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或 $x\in A$ 且 $x\in C$，这就表明 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$，所以 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，由此证得

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

再证 $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$.

对于任意的 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，即有 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$，即有 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或 $x\in A$ 且 $x\in C$，于是有 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$，所以 $x\in A\cap(B\cup C)$. 由此证得

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C).$$

综上所述，证得

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

定理 1.2.1 表明集合的交运算对于并运算是可分配的；集合的并运算对于交运算也是可分配的. 常统称**集合的交、并运算满足分配律**.

推论 设 $A,B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是集合，则

$$A\cap(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n)=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\cdots\cup(A\cap B_n);$$

$$A\cup(B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_n)=(A\cup B_1)\cap(A\cup B_2)\cap\cdots\cap(A\cup B_n).$$

定理 1.2.2 设 A、B 是集合，则

$$A\cap(A\cup B)=A;$$

$$A\cup(A\cap B)=A.$$

证明 先证第一等式，由于

$$\begin{aligned}A\cap(A\cup B)&=(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)\\&=A\cup(\varnothing\cap B)\qquad\text{(分配律)}\\&=A\cup\varnothing\\&=A.\end{aligned}$$

再证第二等式，由于

$$A\cup(A\cap B)=(A\cup A)\cap(A\cup B)\qquad\text{(分配律)}$$

$$=A\cap(A\cup B)$$
$$=A. \qquad \text{(见第一等式)}$$

定理 1.2.2 也称为**集合的并和交运算满足吸收律**.

定义 1.2.3 设 A 是集合，由属于全集 E 但不属于 A 的所有元素组成的集合称为 A 的**补集**，记作 $\overline{A}$ 或 $\sim A$.

例如，全集与集合 A 为

$$E=\{x\mid x\ \text{是正整数}\},$$
$$A=\{x\mid x\ \text{是正偶数}\},$$

则 A 的补集

$$\overline{A}=\{x\mid x\ \text{是正奇数}\}.$$

求集合的补集，也可看做一种运算，称为**取补运算**，它是一种一元运算.

取补运算的文氏图如图 1-2-3 所示，图中阴影部分即为 $\overline{A}$.

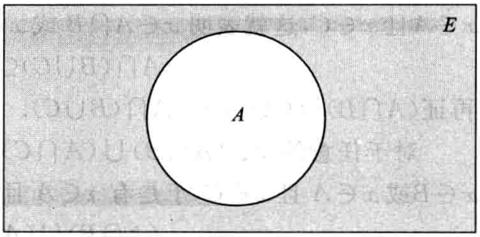


图 1-2-3

由补集的定义可知，取补运算有以下性质：

(1) $\overline{\overline{A}}=A$;

(2) $A\cup\overline{A}=E$;

(3) $A\cap\overline{A}=\varnothing$;

(4) $\overline{E}=\varnothing$;

(5) $\overline{\varnothing}=E$.

定理 1.2.3 设 A,B 是集合，如果 $A\cup B=E$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则 $B=\overline{A}$.

证明 由交、并、取补运算的性质可知

$$\begin{aligned}B&=B\cap E=B\cap(A\cup\overline{A})\\&=(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})=\varnothing\cup(B\cap\overline{A})\\&=(A\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{A})=\overline{A}\cap(A\cup B)\\&=\overline{A}\cap E=\overline{A}\end{aligned}\qquad\text{(证毕)}.$$

定理 1.2.4 设 A,B 是集合，则

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

证明 先证第一等式.

要证 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，即要证 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 是 $A\cup B$ 的补集. 由于

$$\begin{aligned}(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cup B)&=(\overline{A}\cup B\cup A)\cap(\overline{B}\cup A\cup B)\\&=(E\cup B)\cap(E\cup A)\\&=E\cap E\end{aligned}$$