21世纪高职高专规划教材
公 共 基 础 课 程 系 列

应用数学（第一册）

YING YONG SHU XUE

主编　傅建军
主审　张　丽

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

21 世纪高职高专规划教材
公共基础课程系列

应用数学

（第一册）

Ying yong shu xue

主　编　傅建军
副主编　宿　昱
主　审　张　丽
编　者　聂　弢　文秋丽

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书是供三年制(五年制)高等职业院校各类专业使用的《应用数学》试用教材。本套教材共分两册出版,本书为第一册。全册共4章,包括复合函数、初等函数、函数的极限与连续性、函数的导数与微分、导数的应用。本套教材配有与教材同步发行的习题册,各章配有用于复习和巩固本章知识的复习题,习题册供课上和课外作业使用。本书可作为三年制(五年制)高等职业院校各类专业教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学. 第1册/傅建军主编. —上海:上海交通大学出版社,2012

21世纪高职高专规划教材公共基础课程系列

ISBN 978-7-313-08855-0

Ⅰ. 应... Ⅱ. 傅... Ⅲ. 应用数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第175406号

应 用 数 学

(第一册)

傅建军 **主编**

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路951号 邮政编码200030)

电话:64071208 出版人:韩建民

常熟市文化印刷有限公司 印刷 全国新华书店经销

开本:787mm×960mm 1/16 印张:9.5 字数:176千字

2012年8月第1版 2012年8月第1次印刷

印数:1～3030

ISBN 978-7-313-08855-0/O 定价:24.00元

前　言

为适应现代化科技和经济建设发展对高素质劳动者及高、中级专门人才的需求，深化高等职业教育改革，加强数学课程建设，落实高等院校培养高素质技能型人才的需要，更好地贯彻教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》文件，我们组织编写了供三年制（五年制）高等职业院校各类专业使用的《应用数学》教材.

本套教材共分两册出版，各册内容是：

第一册为第一模块（实用微分学），全册共4章.包括复合函数、初等函数、函数的极限与连续性、函数的导数与微分、导数的应用.

第二册包含第二模块（实用积分学）和第三模块（应用数学），全册共4章.包括函数的不定积分、定积分及其应用，线性规划初步，数理统计初步.

本套教材贯彻以素质教育为基础、以能力为本位的指导思想，按照“加强基础，注重能力培养，突出应用，增强弹性，适度更新，兼顾体系”的原则编写.本套教材具有以下特点：

(1) 根据培养目标的需要和学生实际，精选在现代社会生活和各类专业学习中得到广泛应用的基础知识作为必学内容，以保证与高中知识的衔接.

(2) 教材采用模块式结构组合编排，便于各类学校根据不同专业、不同要求和学生的实际学习水平灵活选择内容，使教材具有一定的弹性和适用性，较好地体现高等职业教育的特色.

(3) 突出应用，注重应用意识和能力的培养，从实际问题抽象出数学概念，再应用相关知识解决简单的实际问题，采取分散与集中相结合的形式编排了有应用价值的例题、练习题和习题册，使应用意识和能力的培养贯穿教学的主要过程.

(4) 内容编排贯彻深入浅出的原则，重视运用数形结合方法，突出图形的直观教学，例题、练习、习题主要用于理解掌握基础知识和基本技能，使教材易教易学.

(5) 教材适度增加了小栏目、知识回顾、知识链接、数学故事等环节，使得教材生动、活泼，易于增加学生学习的灵感.

本套教材的课时分布是：第一册教材约64课时，第二册教材约72课时.

本套教材配有练习册与教材同步发行，教材中各节配有练习，供教师、学生课上练习使用，各章配有用于复习和巩固本章知识的复习题，习题册供课上或课外作业使用.

教材在编写过程中得到了教育主管部门、上海交通大学出版社有关领导的热情关心与指导,得到了其他高职院校的大力支持,在此向他们表示衷心的感谢.

由于编写时间仓促和编写水平有限,对教材中不妥之处,诚恳地希望从事职业教育的教师批评指正.

编　者

2012年6月

目　录

1　初等函数

函数是微积分研究的对象，是刻画变量关系的数学模型，是为专业技能训练打下坚实基础的知识，同时也是最重要的数学概念之一. 本章将在中学数学已掌握函数知识的基础上，进一步理解函数的概念、函数的性质、复合函数、初等函数.

1-1　函数

一、常量与变量

定义　在某个变化过程中，保持不变的量叫做常量；发生变化的量叫做变量.

【例 1】　汽车以每小时 80km 的速度匀速行驶，则路程 s 与时间 t 具有以下关系 $s = 80t$.

式中，80 为常量，t 与 s 为变量.

【例 2】　如果圆的半径为 R，面积为 A，则圆的面积等于 $A = \pi R^2$.

式中，π 为常量，R 与 A 为变量.

二、函数的概念

定义　若 D 是一个非空实数集合，设有一个对应法则 f，使得每一个 $x \in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$，$x \in D$.

x 称为自变量，y 称为因变量(函数)；集合 D 称为函数的定义域.

若 $x_0 \in D$，则称 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处有定义.

x_0 所对应的 y 值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，称为当 $x = x_0$ 时，函数 $y = f(x)$ 的函数值.

全体函数值的集合 $\{y \mid y = f(x), x \in D\}$，称为函数 $y = f(x)$ 的值域，记作 M.

注意　函数的定义域和对应法则是确定函数关系的两个要素.

在函数的定义域中，要求对于定义域中的每一个 x 值，都有唯一的 y 值与之对应，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数.

例如，以原点为圆心，1 为半径的圆的方程为 $x^2 + y^2 = 1$，由这个方程所确定的函数就是多值函数.

函数相同的条件：
函数的相等主要看：定义域及其对应法则是否相同.

【例 3】 判断下列函数是不是相同的函数关系.

(1) $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$；　　(2) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$.

解 (1) 函数 $y=x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 因此，$y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是定义域不同的两个函数，如图 1-1-1 与图 1-1-2 所示.

(2) 函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，但是对应法则不同. 函数 $y=x$，当 $x>0$ 时，$y>0$；当 $x<0$ 时，$y<0$. 函数 $y=\sqrt{x^2}$，当 $x>0$ 时，$y>0$；当 $x<0$ 时，$y>0$. 因此，两者是定义域相同而对应法则不同的函数，如图 1-1-3 所示.

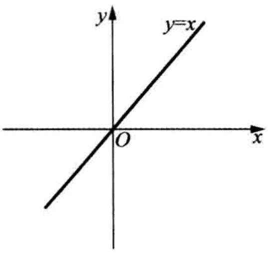

图 1-1-1

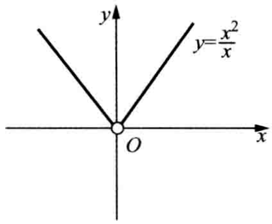

图 1-1-2

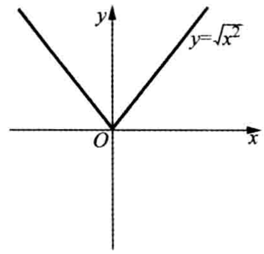

图 1-1-3

【例 4】 (1) 已知 $f(x)=x^2$，求 $f(0)$，$f(a)$，$f(x+2)$，$f[f(x)]$.

(2) 已知 $f(x+1)=x^2+2x+2$，求 $f(x)$.

解 (1) $f(0)=0^2=0$

$f(a)=a^2$

$f(x+2)=(x+2)^2=x^2+4x+4$

$f[f(x)]=[f(x)]^2=(x^2)^2=x^4$.

(2) 换元法，令 $x+1=t$，则 $x=t-1$. 代入 $f(x+1)=x^2+2x+2$，得

$$\begin{aligned} f(t)&=(t-1)^2+2(t-1)+2\\ &=t^2+1. \end{aligned}$$

因为函数由定义域、对应法则确定，与变量用哪个字母表示无关，所以 $f(x)=x^2+1$.

【例 5】 求函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$；

(2) $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$.

解 (1) 给定函数的定义域要求满足：

$$\begin{cases}3x-2>0\\3x-2\neq 1\end{cases}\quad 即\begin{cases}x>\dfrac{2}{3}\\x\neq 1\end{cases}$$

因此，$f(x)=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域为 $D=\left(\dfrac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$，如图 1-1-4 所示.

(2) 给定函数的定义域要求满足：

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1\\x^2<25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x-1|\leqslant 5\\|x|<5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 6\\-5<x<5\end{cases}\Rightarrow$$

$-4\leqslant x<5$.

因此，$f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域为 $D=[-4,5)$，如图 1-1-5 所示.

知识回顾：

A. 当函数为偶次根式，被开放式必须大于等于零；

B. 当函数为分式，分母不等于零；

C. 当函数为对数式，真数必须大于零.

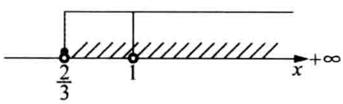

图 1-1-4

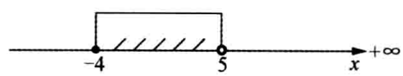

图 1-1-5

练习 1-1

1. 下列给出的变量与变量的关系是不是函数关系？

(1) $y=\sqrt{-x}$； (2) $y=\lg(-x^2)$； (3) $y=\sqrt{-x^2-1}$；

(4) $y=\sqrt{-x^2+1}$； (5) $y=\arcsin(x^2+2)$； (6) $y^2=x+1$.

2. 下列给出的各对函数是不是相同的函数？

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$；

(2) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$；

(3) $y=\sqrt{x^2(1-x)}$ 与 $y=x\sqrt{1-x}$；

(4) $y=\sqrt[3]{x^3(1-x)}$ 与 $y=x\sqrt[3]{(1-x)}$；

(5) $y=\sqrt{x(1-x)}$ 与 $y=\sqrt{x}\sqrt{1-x}$；

(6) $y=\sqrt{x(x-1)}$ 与 $y=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$.

3. 已知 $f(x)=x^2-3x+2$,求:$f(0)$,$f(2)$,$f\left(\frac{1}{x}\right)(x\neq 0)$,$f(x+1)$.

4. 已知 $f(x)=\frac{x}{1-x}$,求 $f[f(x)]$,$f\{f[f(x)]\}$.

5. 确定下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{9-x^2}$;

(2) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;

(3) $y=-\frac{5}{x^2+4}$;

(4) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$;

(5) $y=1-2^{1-x^2}$;

(6) $y=\frac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$.

1-2 分段函数

一、分段函数

首先,观察函数:$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x & x>1.\end{cases}$

它的定义域为 $D=[0,+\infty)$,当 $x\in[0,1]$ 时,对应的函数值由 $f(x)=2\sqrt{x}$ 确定;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,对应的函数值由 $f(x)=1+x$ 确定.

所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$;$f(1)=2\sqrt{1}=2$;$f(3)=1+3=4$.

定义 在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的一个函数叫做分段函数.

【例 1】 函数 $y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0.\end{cases}$

它的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $C=[0,+\infty)$,如图 1-2-1 所示.

【例 2】 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0.\end{cases}$

叫做符号函数,它的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $C=\{-1,0,1\}$,如图 1-2-2 所示.

【例 3】 设 x 为任意一实数,不超过 x 的最大整数叫做 x 的最大整数,记作$[x]$.

例如，$\left[\frac{5}{6}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[\mathrm{e}]=2$.

$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.3]=-4$，$[-\pi]=-4$.

函数 $y=[x]$ 叫做取整函数，它的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $C=Z$，如图 1-2-3 所示.

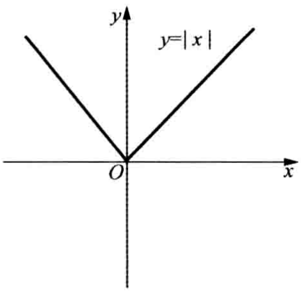

图 1-2-1

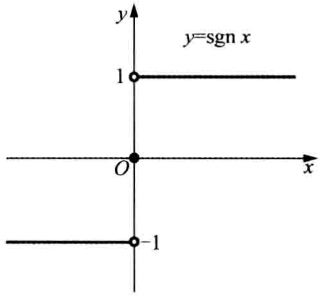

图 1-2-2

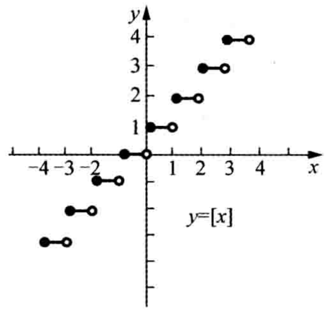

图 1-2-3

二、举例

【例 4】 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50kg 时，按基本运费计算，如从重庆到某地每公斤收 0.3 元. 当超过 50kg 时，超重部分按每公斤 0.5 元收费，试求运费 y(元) 与重量 x(kg) 之间的函数关系式，并且画出这个函数的图形.

解 当行李重量 $x\leqslant 50$kg 时，运费 $y=0.3x$；如果行李重量超过 50kg 时，运费

$$\begin{aligned} y &= 0.3\times 50+(x-50)\times 0.5 \\ &= 0.5x-10 \end{aligned}$$

所以运费 y(元) 与重量 x(kg) 之间的函数关系是：

$y=\begin{cases} 0.3x, 0<x\leqslant 50 \\ 0.5x-10, x>50. \end{cases}$ 函数的图形见图 1-2-4.

【例 5】 脉冲发生器产生一个单三角脉冲，如图 1-2-5 所示. 写出电压 U 与时间 t 的函数关系式.

解 由图形 1-2-5 看到：电压 U 随时间 t 变化的规律在各段时间 $\left(0\leqslant t<\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\leqslant t<\tau,\tau\leqslant t\right)$ 不同. 所以，这里要分三段时间进行考察.

当 $0\leqslant t<\frac{\tau}{2}$ 时，函数的图形是连接原点 $(0,0)$ 与点 $\left(\frac{\tau}{2},E\right)$ 的直线段，于是

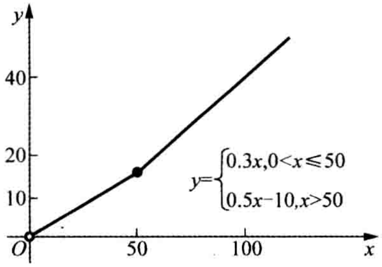

图 1-2-4

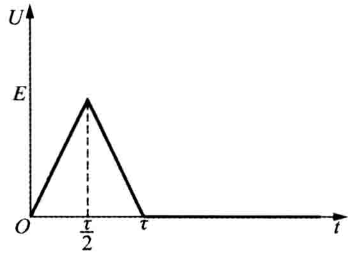

图 1-2-5

$$u=\frac{2E}{\tau}t.$$

当$\frac{\tau}{2}\leqslant t<\tau$时,函数的图形是连接点$\left(\frac{\tau}{2},E\right)$与点$(\tau,0)$的直线段,于是

$$u-0=\frac{E-0}{\frac{\tau}{2}-\tau}(t-\tau),\text{ 即 } u=-\frac{2E}{\tau}(t-\tau).$$

当$t\geqslant\tau$时,函数的图形是横轴的一部分,因此$u=0$.

综上所述,得

$$u=\begin{cases}\frac{2E}{\tau}t & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant\frac{\tau}{2}\\ -\frac{2E}{\tau}(t-\tau) & \text{当 } \frac{\tau}{2}\leqslant t<\tau\\ 0 & \text{当 } t\geqslant\tau.\end{cases}$$

一般说来,实际问题是各种各样的,但可以遵循对事物进行具体分析的原则,分析问题中的数量关系,选定自变量与函数,并且用字母将它们表示出来;再根据问题中给出的条件,运用数学、物理、化学、专业方面的知识,确定等量关系,从而列出函数关系式.

练习 1-2

1. 作出下列函数的图像:

(1) $f(x)=\begin{cases}x-1,0\leqslant x\leqslant 1\\2-x,1<x\leqslant 3\end{cases}$;　　(2) $f(x)=\begin{cases}2x+1,x\leqslant 0\\x^2,x>0\end{cases}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-1,0\leqslant x<1\\x+3,x\geqslant 1.\end{cases}$

(1) 求函数的定义域;(2) 求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$,$f(1)$,$f(2)$;(3) 作出函数的图像.

1-3 函数的性质

一、奇偶性

1. 偶函数

我们知道函数 $f(x)=x^2(x\in\mathbf{R})$ 的图像(图 1-3-1)关于 y 轴对称,在数值上具有以下关系:由 $f(-1)=1, f(1)=1$ 得 $f(-1)=f(1)$;由 $f(-2)=4$, $f(2)=4$ 得 $f(-2)=f(2)$;…

一般的,对定义域中任意 a,由 $f(-a)=a^2, f(a)=a^2$,得 $f(-a)=f(a)$,即当自变量 x 取两个相反数时,对应的函数值恰好相等.

体现在函数的图像上就是:若任意点 (x,y) 在函数图像上,则这点关于 y 轴的对称点 $(-x,-y)$ 也在函数的图像上.

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,若 $x\in D$,总有 $-x\in D$ 且 $f(-x)=f(x)$,那么函数 $y=f(x)$ 叫做偶函数.

显然,偶函数 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称.

2. 奇函数

我们讨论函数 $f(x)=\frac{1}{x}[x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)]$ 的图像(图 1-3-2),函数的图像关于原点对称,在数值上具有以下关系:由 $f(-1)=-1, f(1)=1$ 得 $f(-1)=-f(1)$;由 $f(-2)=-\frac{1}{2}, f(2)=\frac{1}{2}$ 得 $f(-2)=-f(2)$;…

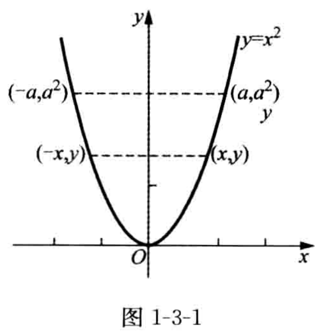

图 1-3-1

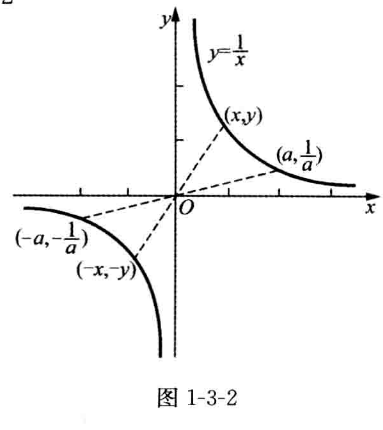

图 1-3-2

一般的,对定义域中任意 a,由 $f(-a)=-\frac{1}{a}, f(a)=\frac{1}{a}$,得 $f(-a)=-f(a)$,即当自变量 x 取两个相反数时,对应的函数值也是相反值.体现在函数的图像上就

是:若任意点(x,y)在函数图像上,则这点关于原点的对称点$(-x,-y)$也在函数的图像上.

定义 设函数$y=f(x)$的定义域为D,若$x\in D$,总有$-x\in D$,且$f(-x)=-f(x)$,那么函数$y=f(x)$叫做奇函数.

显然,奇函数$y=f(x)$的图像关于原点对称.

【例 1】 下列函数中,哪些是奇函数?哪些是偶函数?

(1) $f(x)=2^{-x^2}$;(2) $f(x)=\sin^2 x, 0\leqslant x\leqslant \pi$.

解 (1) 因为函数$f(x)=2^{-x^2}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且$f(-x)=2^{-(-x)^2}=2^{-x^2}=f(x)$,故$f(x)=2^{-x^2}$为偶函数.

(2) 因为函数$f(x)=\sin^2 x$的定义域为$[0,\pi]$,所以函数的定义区间不对称于原点.所以$f(x)=\sin^2 x, 0\leqslant x\leqslant \pi$既不是奇函数,也不是偶函数.

既不是奇函数,也不是偶函数的函数也叫做非奇非偶函数.

【例 2】 证明$f(x)=\log_4(\sqrt{x^2+1}+x)$是奇函数.

证明 因为函数$f(x)=\log_4(\sqrt{x^2+1}+x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且

$$\begin{aligned}
f(-x)&=\log_4\left[\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)\right]\\
&=\log_4(\sqrt{x^2+1}-x)\\
&=\log_4\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\\
&=\log_4\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\\
&=\log_4(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}\\
&=-\log_4(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x).
\end{aligned}$$

由奇函数定义得$f(x)=\log_4(\sqrt{x^2+1}+x)$是奇函数.

注意 判断一个函数是不是偶函数需要考查:是否是对称区间,是否满足$f(-x)=f(x)$;而判断一个函数是不是奇函数需要考查:是否是对称区间,是否满足$f(-x)=-f(x)$.

二、单调性

观察函数$f(x)=x^2$的图像(如图 1-3-3 所示)的变化趋势,在y轴右侧$[x\in(0,+\infty]$图像从左到右是上升的,也就是说,随着x值增大,相应的y值也增大.这种情况反映到数值上,可以归纳出以下结论:

若 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $x_1^2<x_2^2$，即 $f(x_1)<f(x_2)$（如图 1-3-3）.

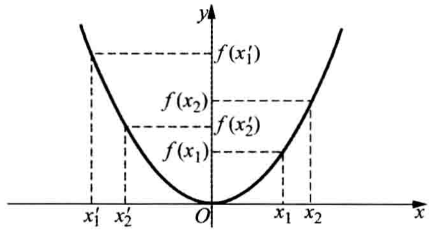

图 1-3-3

在 y 轴左侧 $[x\in(-\infty,0)]$ 图像从左到右是下降的，也就是说，随着 x 值增大，相应的 y 值反而随着减少. 这种情况反映到数值上，可以归纳出以下结论：

若 $x'_1,x'_2\in(-\infty,0)$，且 $x'_1<x'_2$，则 $x'^2_1>x'^2_2$，即 $f(x'_1)>f(x'_2)$（如图 1-3-3 所示）.

【例 3】 证明函数 $f(x)=2x+1$ 在定义区间内是增函数.

证明 函数 $f(x)=2x+1$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且设 $x_1<x_2$.

因为
$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=(2x_1+1)-(2x_2+1)\\&=2x_1-2x_2\\&=2(x_1-x_2)<0\end{aligned}$$

所以 $$f(x_1)<f(x_2).$$

所以，函数 $f(x)=2x+1$ 在定义区间内是增函数.

三、周期性

定义 对于函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 T，使得 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称此函数为周期函数，满足这个等式的最小正数 T，称为函数的周期.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，函数 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 都是以 $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ 为周期的周期函数，函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$，$y=A\cot(\omega x+\varphi)$ 都是以 $\dfrac{\pi}{|\omega|}$ 为周期的周期函数.

【例 4】 求下列函数的周期

(1) $y=10\sin\left(4x+\dfrac{3\pi}{7}\right)$；(2) $y=4\tan\left(3x-\dfrac{2\pi}{5}\right)$；(3) $y=\cos^4x-\sin^4x$.

解 (1) 因为 $\omega=4$，所以 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\dfrac{\pi}{2}$；

(2) 因为 $\omega=3$，所以 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}=\dfrac{\pi}{3}$；

(3) 因为 $y=\cos^4x-\sin^4x$

> **知识链接：**
> $\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$

$= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$
$= (\cos^2 x - \sin^2 x)$
$= \cos 2x,$

所以 $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|} = \pi.$

四、有界性

定义 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义((a,b) 可以是函数 $y = f(x)$ 的整个定义域,也可以是定义域的一部分). 如果存在一个正数 M,对于所有的 $x \in (a,b)$,恒有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界. 如果不存在这样的正数 M,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界.

例如,函数 $y = \sin x, y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 都是有界函数,因为对于任意实数 x,恒有 $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$,函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,2)$ 内无界,在 $[1, +\infty)$ 内有界.

【例 5】 证明函数 $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ 是有界函数.

证明 因为 $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$,

所以 $|y| = \left|\dfrac{1}{1+x^2}\right| = \dfrac{1}{1+x^2}.$

因为 $1 + x^2 \geqslant 1$,

所以 $|y| = \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1.$

因此函数 $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ 是有界函数.

练习 1-3

1. 根据下列条件求值:

(1) 已知 $y = f(x)$ 是偶函数,且 $f(1) = 2, f(2) = -8$,求 $f(-2) + f(-1)$ 的值 1;

(2) 已知 $y = f(x)$ 是奇函数,且 $f(1) = 2, f(2) = -8$,求 $f(-2) + f(-1)$ 的值 1.

2. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$; (2) $f(x) = 2^x$; (3) $f(x) = x^2 \cos x$; (4) $f(x) = x + \sin x$.