高等数学疑难问题解析

李应岐 方晓峰 王静 张辉 编

国防工业出版社
National Defense Industry Press

高等数学疑难问题解析

李应岐　方晓峰
王　静　张　辉　编

国防工業出版社
·北京·

内 容 简 介

本书以问题与分析的形式解答了理工科院校高等数学教学中常见的典型问题，这些问题是笔者根据教学要求以及多年的教学经验整理和提炼出来的。全书共分8章，内容包括：函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数和微分方程。对每章在教学和学习中出现的典型问题给予了详细的分析和解答，对部分重要的知识点进行了拓展，进一步引导学生理解和掌握高等数学的概念和思想。

本书既可作为理工科院校本科各专业学生学习高等数学课程的指导书或考研参考书，也可作为相关课程教学人员的教学参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学疑难问题解析／李应岐等编．—北京：国防工业出版社，2014.2

ISBN 978-7-118-09305-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学-教学研究 Ⅳ.①O13-42

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第030115号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本787×1092 1/16 印张14½ 字数330千字

2014年2月第1版第1次印刷 印数1—3000册 **定价**32.00元

国防书店：(010)88540777 发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755 发行业务：(010)88540717

前　言

高等数学是理工科高等院校的一门重要的基础理论课程，它对学生综合素质的培养及后续课程的学习起着极其重要的作用。灵活掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本方法,对学生学好该课程至关重要。高等数学理论体系完整而严密,许多看似无关的部分,它们之间却有着千丝万缕的联系。随着授课学时缩减,授课班级大,授课速度快,许多学生在学习过程中不能很好地掌握概念的来龙去脉,对定义定理的内涵和外延也不能准确地理解,导致许多学生尤其是基础薄弱的学生对高等数学的学习望而却步,学习过程中囫囵吞枣,降低了学习效率。我们编写这本教学辅导书,旨在帮助学生较好地理解和掌握高等数学的内容。对容易出错的概念和理解困难的问题,进行针对性的分析和阐述,力求思路清晰、推证简洁并且可读性强,从而满足广大师生的教学和学习要求。

在编写过程中,我们注重针对教与学实践中常见的易混淆的概念性错误的分析,主要通过答疑及错解分析的方式编写而成。我们认为,学好高等数学首先要加强对基本知识的学习,做到概念清、理论明、计算熟;其次是注重阶梯能力的训练与培养。全书精选了近400个问题,这些问题主要涉及对高等数学基本概念与基本理论的深入理解,以及对基本方法的灵活应用;对一些概念、理论与方法做了适当延伸和拓展。在阐述过程中,侧重于对基本概念的深化理解,着眼于区分模棱两可的模糊认识,注重相关概念的区别与联系,剖析了初学者易出现的似是而非的错误解法。本书既注重理论分析,又注重通过正反两方面的例子来具体说明问题,既注重数学的严谨性,又注重对学生的启发引导及能力的培养。

本书编写和出版得到了各级领导和国防工业出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢。

本书还参考了国内外出版的一些教材和参考书,在此,对文献作者也一并表示感谢,由于编者水平有限,书中不足之处在所难免,恳请读者、同行和专家批评指正。

编者

2013 年 10 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

一、函数的概念

1. 邻域与去心邻域的区别和联系是什么？

分析　邻域指的是一个开区间，点 a 的 δ 邻域可记为 $U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$；而去心邻域是上述区间去掉邻域的中心点形成的两个小开区间的并集，点 a 的去心 δ 邻域可记为

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$$

它是点 a 的左 δ 邻域 $\{x|-\delta<x-a<0\}$ 和右 δ 邻域 $\{x|0<x-a<\delta\}$ 的并集。

两者的区别仅仅是包含点 a 与不包含点 a 的不同。

两者的联系为 $U(a,\delta)=\mathring{U}(a,\delta)\cup\{a\}$。

2. 说明映射与函数的关系。

分析　映射与函数是一般与特殊的关系，映射是定义在两个非空集合上的对应法则，而函数是定义在两个非空数集上的对应法则。因此函数是一种特殊映射，但映射不一定是函数。例如，$X=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$，$Y=\{(x,0)\,|\,|x|\leqslant 1\}$，$f:X\to Y$ 是一个映射，但不是函数。

3. 逆映射和反函数存在的条件是否一样？

分析　当一个映射既是单射又是满射，即双射时存在逆映射，而函数存在反函数的条件是函数是定义域到值域的单值函数。即当映射是双射时，存在逆映射；当函数为单射时，存在反函数。

4. 单调函数有反函数，非单调函数一定没有反函数，正确吗？

分析　不正确。一个函数是否存在反函数，由其对应规则决定。若对应规则在定义域和值域之间构成一一对应关系，则必有反函数；否则就没有反函数。函数在区间 I 上单调只是一种对应关系，单调是存在反函数的充分条件，不是必要条件。

例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbf{Q}\\ -x, & x\in\mathbf{Q}^C\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内不单调，但它存在反函数 $f^{-1}(x)\equiv f(x)$。

5. 分段函数一定不是初等函数？

分析　不一定。例如，函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$ 既是分段函数，也是初等函数。

6. 如何判断一个函数是否为周期函数？

分析　判断一个函数是否为周期函数可以通过判断该函数是否具有周期函数的一些性质来判断。方法如下。

(1) 由于周期函数满足$f(x+T)=f(x)$,因此周期函数的定义域是无界的;若一个函数的定义域有下界或有上界,则该函数一定是非周期函数。

(2) 若$f(x)$为周期函数,则$f(x)-f(x_0)$的零点必然也呈周期性。因此,若$f(x)-f(x_0)$的零点没有呈周期性,则$f(x)$为非周期函数。

(3) 通过求解$f(x)-f(x_0)$的零点$x_i(i=1,2,\cdots)$来计算$T_i=x_i-x_0(i=1,2,\cdots)$,然后逐个检验$f(x+T_i)\equiv f(x)$是否成立。若所有的$T_i$都使恒等式不成立,则$f(x)$为非周期函数。

二、极限

7. 如何理解数列极限$\varepsilon-N$定义中ε与N的关系?

分析　数列极限定义理解的关键在于如何描述x_n在$n\to\infty$时无限接近于a。定义中对于无限接近用绝对值$|x_n-a|<\varepsilon$来描述,其中ε为“任意小”的正数。对于$n\to\infty$用$n>N$表示,其中N要“充分大” $x_n\to a(n\to\infty)$的核心在于满足x_n接近于a的程度是无限小和$n>N$的所有x_n满足绝对值不等式。所以数列极限的定义把描述自变量n和因变量x_n的步骤颠倒,首先是对任意小正数ε,存在正整数N,当$n>N$时绝对值不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立。

数列极限定义理解的重点在于ε的任意给定性和N与ε的相应性。先给定任意的ε,由绝对值不等式求出满足不等式的正整数N,即N由ε决定。若绝对值不等式$|x_n-a|<\varepsilon$有解,则满足不等式的最小正整数N是唯一的,但满足不等式的正整数N有无限多个。在这里我们关注的是N的存在性,因而在定义的应用中,没有必要一定要求出满足不等式最小的正整数N。

8. 怎样表述数列极限的否定形式,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq a$?

分析　设有数列$\{x_n\}$和常数a,若对于任意的自然数N,存在某个正数ε_0和正整数$n_0>N$,使不等式$|x_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$成立,则称数列$\{x_n\}$不以$a$为极限,也称数列$x_n$不收敛于$a$,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n\neq a$$

9. 数列极限是否可以表述为:“$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当$n>N$时,有无穷多个$x_n$使$|x_n-a|<\varepsilon$”?

分析　不可以。因为“当$n>N$时,有无穷多个x_n使$|x_n-a|<\varepsilon$”并不是$n>N$所有的x_n满足$|x_n-a|<\varepsilon$。

例如,$\{x_n\}=\{(-1)^n\}$,对当$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,有无穷多个$n=2k\left(k>\left[\frac{N}{2}\right]\right)$,满足

$$|x_n-1|=0<\varepsilon$$

但数列$\{(-1)^n\}$发散。

10. 数列$\{x_n\}$与数列$\{|x_n|\}$是否具有相同的敛散性?

分析　一般不会同时收敛或同时发散。

若数列$\{x_n\}$收敛于a,则数列$\{|x_n|\}$一定收敛于$|a|$。因为,对于$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当$n>$

N时，$|x_n-a|<\varepsilon$成立，因此$\big||x_n|-|a|\big|\leqslant|x_n-a|<\varepsilon$。

反之，数列$\{|x_n|\}$收敛，但数列$\{x_n\}$不一定收敛，如$\{|(-1)^n|\}$收敛，而$\{(-1)^n\}$发散。

事实上，若数列$\{x_n\}$恒为正(或负)，则数列$\{|x_n|\}$与$\{x_n\}$具有相同的敛散性。

值得注意的是，数列$\{x_n\}$为无穷小数列的充分必要条件为数列$\{|x_n|\}$为无穷小数列。

11. 若数列$\{x_n\}$的奇子数列$\{x_{2n-1}\}$和偶子数列$\{x_{2n}\}$收敛于同一极限，那么数列$\{x_n\}$是否也收敛于该极限？

分析　是的。

证明　不妨设$\{x_{2n-1}\}$和$\{x_{2n}\}$都收敛于a，则

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1>0$，当$n>N_1$时，有$|x_{2n-1}-a|<\varepsilon$；

$\exists N_2>0$，当$n>N_2$时，有$|x_{2n}-a|<\varepsilon$。

现取$N=\max\{2N_1-1,\ 2N_2\}$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$。故数列$\{x_n\}$收敛，且极限也为a。

12. 如何理解数列$\{x_n\}$无界与数列$\{x_n\}$为无穷大的关系？

分析　数列$\{x_n\}$无界，是指对任给$M>0$，总存在一正整数n_0，使得$|x_{n_0}|>M$，它强调某一个n_0的存在性；而数列$\{x_n\}$为无穷大，是对任给$M>0$，存在正整数N，当$n>N$时，使$|x_n|>M$，它强调是对所有大于N的n成立。因此，若数列$\{x_n\}$为无穷大，则数列$\{x_n\}$一定无界，反之不一定成立，如数列$\{x_n\}=\{n\sin\frac{n\pi}{2}\}$无界但不是无穷大，这是因为当$n=2k$时，$|x_n|=|2k\sin k\pi|=0$。

值得注意的是，无界数列必有无穷大子数列。

13. 如何证明数列$\{x_n\}$是发散的？

分析　由于收敛数列的任意子列也收敛，且收敛于同一极限。因此证明数列发散的常用方法有以下两种。

(1) 找出数列$\{x_n\}$的一个发散子列。

(2) 找出数列$\{x_n\}$的两个收敛于不同极限的子列。

14. 怎么证明数列$\{x_n\}$是无界的？

分析　找出数列$\{x_n\}$的一个无穷大子数列$\{x_{n_k}\}$，即$x_{n_k}\to\infty\ (k\to\infty)$。

15. 如何证明数列$\{x_n\}$不是无穷大？

分析　常用方法是找出一个收敛子列。例如，数列$\left\{n\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$的偶子数列$\{2k\sin k\pi\}$收敛于0，则数列$\left\{n\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$不是无穷大。

16. 若数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$均发散，则数列$\{x_ny_n\}$、$\{x_n+y_n\}$和数列$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$是否也发散？

分析　都不一定。例如，数列$\{x_n\}=\{(-1)^n\}$和$\{y_n\}=\{(-1)^{n+1}\}$均发散，则有

$\{x_ny_n\}=\{(-1)^{2n+1}\}=\{-1\}$收敛于$-1$；

$\{x_n+y_n\}=\{(-1)^n+(-1)^{n+1}\}=\{0\}$收敛于0；但$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}=\{-1\}$收敛于$-1$。

17. 若数列$\{x_n\}$发散,数列$\{y_n\}$收敛,则数列$\{x_ny_n\}$、数列$\{x_n+y_n\}$和数列$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$是否也发散?

分析 (1) 若数列$\{x_n\}$发散,数列$\{y_n\}$收敛,则数列$\{x_ny_n\}$可能收敛也可能发散。例如,$\{x_n\}=\{(-1)^n\}$发散,$\{y_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$收敛,$\{z_n\}=\{n^2\}$发散,而$\{x_ny_n\}=\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$收敛,$\{z_ny_n\}=\{n\}$发散。

(2) 若数列$\{x_n\}$发散,数列$\{y_n\}$收敛,则数列$\{x_n+y_n\}$一定发散。证明如下:

利用反证法。假设数列$\{x_n+y_n\}$收敛,由于$x_n=(x_n+y_n)-y_n$,且数列$\{y_n\}$收敛,则由极限的四则运算法则可得,数列$\{x_n\}$也一定收敛,这与条件矛盾,因此数列$\{x_n+y_n\}$一定发散。

(3) 若数列$\{x_n\}$发散,数列$\{y_n\}$收敛,则数列$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$一定发散。证明如下:

利用反证法。假设数列$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$收敛,则由于$x_n=\frac{x_n}{y_n}\cdot y_n$,且数列$\{y_n\}$收敛,则根据极限的四则运算法则可得,数列$\{x_n\}$也收敛,这与条件矛盾,因此数列$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$一定发散。

18. 下列命题是否正确?

若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-1})=0$和$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}}{x_n}=1$。

分析 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}x_n-\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}=a-a=0$;

若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\neq0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}}=\frac{a}{a}=1$;

若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}$不一定为1。

例如,$\{x_n\}=\{q^n\}(0<q<1)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$,而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}=q<1$。

19. 是否可以把数列极限定义中的“无限接近”替换成“越来越接近”?

分析 不可以。“无限接近”是指$|x_n-a|$小于任意正数,表示$|x_n-a|$趋于0,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,但$|x_n-a|$不一定单调减少,而“越来越接近”只能表示$|x_n-a|$单调减少,它不能保证$|x_n-a|$趋于0。

例如,数列$x_n=\left\{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right\}$,当$n$无限增大时,$x_n$无限接近于1,但$|x_n-1|$并不是单调减少。

值得注意的是,$|x_n-a|$单调减少也不一定能保证$|x_n-a|$趋于0。

又例如$x_n=\left\{1+\frac{1}{3n}\right\}$,当$n$增加时,$x_n$越来越接近于0,即$|x_n-0|$单调减少,但$|x_n-0|>1$,因此$x_n$不可能无限接近于0。

20. 如何理解函数极限的$\varepsilon-\delta$定义中ε与δ的意义与关系?

分析 函数极限是指在自变量 x 无限接近于某个常数 a 这一特定变化过程中,因变量 $f(x)$ 与某个定数 A 无限接近的现象。自变量 x 无限接近于 a 用 $0<|x-a|<\delta$ 来描述;因变量 $f(x)$ 无限接近某个定数 A 用 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 表示。

事实上,ε 为给定的任意小正数,δ 描述满足绝对值不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 的所有 x,δ,由 ε 决定,但满足绝对值不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 的 δ 有无限多个。在 $\varepsilon-\delta$ 论证法中并不需要寻找最大的 δ,因此可以利用不等式的缩小简单求出满足条件的 δ。

21. $\varepsilon-\delta$ 定义的否定形式是什么,怎么表述 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$?

分析 设 x_0 与 A 是给定的常数,函数在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义。对于某个给定正数 ε_0,无论选择多么小的 $\delta>0$,总存在点 $x_1\in\mathring{U}(x_0,\delta)$,使 $|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$ 成立,则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 不以 A 为极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$。

22. 函数极限的几何意义是什么?

分析 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$)表示函数 $f(x)$ 在 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$)上的图形介于直线 $y=A-\varepsilon$ 与直线 $y=A+\varepsilon$ 之间。

23. 为什么说函数极限存在时,函数具有局部有界性?

分析 如果函数极限存在,即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$)成立,则由极限的定义,$\forall\,\varepsilon>0$,$\exists\,\delta>0$(或 $X>0$),当 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$)时,$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$。此时,$|f(x)|<\max\{|A+\varepsilon|,|A-\varepsilon|\}$,故 $f(x)$ 局部有界。

24. 在函数极限定义中,为什么要规定 $|x-x_0|>0$?

分析 规定 $|x-x_0|>0$ 就限制了 $x\neq x_0$,即可以不要求函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义,拓宽了研究函数极限的范围。例如,$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义,但有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

25. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在开区间 (a,b) 内均无界,则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 (a,b) 内是否也无界?

分析 不一定。例如,函数 $f(x)=\tan x$ 和 $g(x)=\cot x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内均无界,但是 $f(x)\cdot g(x)\equiv 1$,并在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有界。

26. 无穷小的阶是指什么?当 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 分别是 $x\to x_0$ 的 n 阶和 m 阶无穷小,当 $n>m$ 时,$\alpha(x)\pm\beta(x)$、$\alpha(x)\cdot\beta(x)$、$\alpha(x)/\beta(x)$ 分别是几阶无穷小?

分析 无穷小的阶的定义总是和同阶无穷小的定义相联系。

设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小。

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l\neq 0$,那么称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的同阶无穷小。

如果 $\alpha(x)$ 与 $[\beta(x)]^k$(k 为正数)是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的同阶无穷小,则称 $\alpha(x)$ 是关于 $\beta(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的 k 阶无穷小。

特别地,当 $\alpha(x)$ 是关于 $(x-x_0)$ 当 $x\to x_0$ 时的 k 阶无穷小,简称 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的 k 阶无穷小。例如,x^3 是当 $x\to 0$ 时的 3 阶无穷小。

需要注意的是,如果 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的 k 阶无穷小,则一定存在 x_0 的某个去心邻

域$\mathring{U}(x_0,\delta)$，当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时，$\alpha(x)\neq0$，否则，若在$x_0$的任何去心邻域内，总存在$\alpha(x)=0$的点，则无穷小$\alpha(x)$就没有阶数。例如，$x^3\sin\dfrac{1}{x}$当$x\to0$时是比$x^2$的高阶无穷小，但没有阶数，因为无论多么小的$\delta>0$，总存在充分大的正数$\dfrac{1}{2k\pi}\in\mathring{U}(0,\delta)$使得$x^3\sin\dfrac{1}{x}=0$。

若$\alpha(x)$、$\beta(x)$分别是$x\to x_0$的n阶和m阶无穷小($n>m$)，则

(1) $\alpha(x)\pm\beta(x)$是$x\to x_0$的m阶无穷小；

(2) $\alpha(x)\cdot\beta(x)$是$x\to x_0$的$n+m$阶无穷小；

(3) $\alpha(x)/\beta(x)$是$x\to x_0$的$n-m$阶无穷小。

27. 什么是高阶无穷小？是否有以下结论：

(1) $o(x^n)-o(x^n)=0$；　(2) $o(x^3)/o(x)=o(x^2)$。

分析　高阶无穷小的定义为：设$\alpha(x)$与$\beta(x)$都是$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷小，如果$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，那么称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$在$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时高阶的无穷小，记为$\alpha(x)=o[\beta(x)]$。

由于$o(x)$表示$x\to0$时x的高阶无穷小，$o(x^n)$表示$x\to0$时x^n的高阶无穷小，但题目中的两个结论一般来讲是不成立的。例如：

(1) 不一定。若取$x^4=o(x^2)$，$x^5=o(x^2)$，则$x^4-x^5\neq0$；

(2) 不一定。若取$x^4=o(x^3)$，$x^4=o(x)$，则$\dfrac{x^4}{x^4}=1\neq o(x^2)$。

关于高阶无穷小的运算有如下性质

(1) $o(x^n)\pm o(x^n)=o(x^n)$；

(2) $o(x^n)\cdot o(x^m)=o(x^{n+m})$；

(3) 当$n>m$时，$o(x^n)\pm o(x^m)=o(x^m)$；

(4) 若$f(x)$有界，则$f(x)\cdot o(x^n)=o(x^n)$。

28. 无穷小是绝对值比零大比任何正数都小的数？无穷大是绝对值比任何正数都大的数？

分析　都不对。无穷小是以0为极限的变量，除0以外，任何无穷小都不是固定的数。无论一个绝对值多么小的数，都是一个固定的数，它的绝对值一定大于其绝对值的1/2，不可能小于任意的正数，因此不能说无穷小是绝对值比零大比任何正数都小的数。同样，无穷大是一个绝对值能大于任意正数的变量而不是一个数，无论一个正数多么大，都是一个固定的数，它的绝对值一定小于其绝对值的2倍，不可能比任何正数都大，因此不能说无穷大是绝对值比任何正数都大的数。

29. 无穷小(大)除以非零有界函数是否仍为无穷小(大)？

分析　(1)无穷小除以非零有界函数不一定是无穷小。例如，函数$\sin x$是$x\to0$时的无穷小，且x在$(-1,1)$内有界，但$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

(2) 无穷大除以非零有界函数一定是无穷大。

设 $\lim f(x)=\infty$，且 $|g(x)|<M[g(x)\neq 0]$，则有 $\lim \dfrac{1}{f(x)}=0$，且

$$\lim \frac{g(x)}{f(x)}=\lim g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}=0。$$

由无穷小和无穷大的关系得，$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$。

30. 用等价无穷小代换求极限时应该注意什么？

分析 在求解复杂极限时，我们通常会用简单的无穷小代替式子中较复杂的无穷小简化计算。但是必须注意，一般只能替换乘积或商式中因子，而对于和或差中的无穷小项一般不能用等价无穷小代换，否则会出现错误。

例如，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$ 是错误的。对于此题可以用洛必达法则或泰勒公式求解。

解法一（洛必达法则）：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{6x}=-\dfrac{1}{6}$；

解法二（泰勒公式）：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-x}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$。

31. 下列计算正确吗？

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

分析 错误。错在计算过程使用了等价无穷小代换：

$$\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\sim x^2\sin\frac{1}{x}\ (x\to 0)$$

在等价无穷小 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ 的定义中，要求 $\alpha(x)\neq 0,\beta(x)\neq 0$，由于在 $x\to 0$ 的过程中，当 $x=\dfrac{1}{n\pi}$ 时，$x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$，因此 $\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 与 $x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 不是等价无穷小，故不能用代换。本问题正确的解法为利用夹逼法则，由于

当 $x\neq 0$ 时，$0\leqslant\left|\dfrac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}\right|\leqslant\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x|$，且 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=0$。

32. 设 $x_1=2,x_{n+1}=2+3x_n(n=1,2,\cdots)$。记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对等式 $x_{n+1}=2+3x_n$ 两边取极限，得 $a=2+3a$，于是 $a=-1$。上述计算错在哪里？

分析 计算错误的原因在于没有正确理解 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的含义和极限四则运算法则的条件是各项的极限都存在。$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 首先表示数列 $\{x_n\}$ 收敛，其次是 $\{x_n\}$ 的极限为

a。又

$$x_n = 2 + 3x_{n-1} = 2 + 3 \times 2 + 3^2 x_{n-2} = 2 + 3 \times 2 + 3^2 \times 2 + \cdots + 3^{n-1} \times 2$$

则$\{x_n\}$单增且无上界，即数列$\{x_n\}$发散。因此对等式两边同时进行极限运算是错误的。

33. 下列计算是否正确？

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+2} + \cdots + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n} = \underbrace{0+0+\cdots+0}_{n\text{个}} = 0$$

分析 错误的。极限的四则运算法则只适用于有限项的四则运算，而该式实际上是无限个无穷小的和。正确的求解方法是用夹逼准则来计算。

因为$\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{n}{n^2+k} < \frac{1}{n}(1 \leqslant k \leqslant n)$，则有

$$\frac{n}{n+1} \leqslant n\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}\right) < \frac{n}{n} = 1$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$。由夹逼准则，故有

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}\right) = 1。$$

三、连续

34. 连续性的等价定义有哪些？

分析 （1）用极限定义连续性：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$；

（2）$\varepsilon-\delta$ 定义：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当$|x - x_0| < \delta$时，$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 成立，则称函数$f(x)$在点 $x = x_0$ 处连续。

（3）增量定义：设$\Delta x = x - x_0, \Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x) = 0$。

（4）增量的 $\varepsilon-\delta$ 定义：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当$|\Delta x| < \delta$时，$|\Delta f(x)| < \varepsilon$。

（5）左右连续定义：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$。

35. 函数定义域中是否只有间断点和连续点？

分析 不一定。函数的定义中除间断点和连续点外，还有孤点，如 $y = \sqrt{\cos x - 1}$仅有孤点 $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$。

36. 间断点研究的基础是什么？

分析 函数的间断点是在研究函数在某一点是否连续时提出的，是通过否定函数在该点的连续性来定义的。讨论函数$f(x)$在点 $x = x_0$ 的连续性首先要讨论极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$的意义与存在性。只有当$f(x)$在点 x_0 的去心邻域内有定义时，才能研究极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，也就是说此极限的研究是有意义的。如果$f(x)$在点 x_0 的任意去心邻域内没有定义，也就没有研究该极限的条件，那么说函数$f(x)$在点 $x = x_0$ 是连续还是间断也就没有意义。因此间断点研究的基础是$f(x)$点 x_0 的去心邻域内有定义。

37. 第二类间断点是否只有无穷间断点和振荡间断点？

分析 函数间断点的分类是按极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$的情况分类的，左右极限都存在的点称为第一类间断点，左右极限至少有一个不存在的点称为第二类间断点。第一类间断点根据左右极限是否相等分为可去间断点（相等）和跳跃间断点（不等）。第二类间断点是左右极限至少有一个不存在的点，但单侧极限不存在的形式很多，难以完全分类，因此第二类间断点不仅包括无穷间断点和振荡间断点，也包括其他有名称或无名称的间断点。例如，函数$g(x)=e^{\frac{1}{x}}$，则有

$$g(0^+)=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty,g(0^-)=\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$$

$x=0$为第二类间断点，但不是无穷间断点。通常称此类间断点为无界间断点。

38. 对任何以a为极限的数列$\{x_n\}(x_n\neq a)$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$与$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$有什么关系？

分析 为充要条件关系。证明如下。

证明（必要性） 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，即对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-a|<\delta$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

又因$x_n\to a(x_n\neq a)$，对$\delta>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$0<|x_n-a|<\delta$，则$|f(x_n)-A|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

（充分性） 利用反证法。假设$\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq A$，则$\exists\varepsilon_0>0$，对$\forall\delta>0$，总有点

$$x_0:0<|x_0-a|<\delta,使|f(x_0)-A|>\varepsilon_0$$

取$\delta=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，随着$n$的增大，将得到一系列向点$a$缩小的去心邻域

$$0<|x-a|<\delta_n$$

在每个邻域$\mathring{U}(a,\delta_n)$内都存在点x_n，使$|f(x_n)-A|>\varepsilon_0$。

也就是说，存在数列$\{x_n\}(x_n\neq a)$，$x_n\to a$，且$|f(x_n)-A|>\varepsilon_0$，即$\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq A$。这与“任何数列$\{x_n\}(x_n\neq a)$，$x_n\to a$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$”矛盾。所以$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$。

值得注意的是，在该充要条件中要求“任何数列$\{x_n\}(x_n\neq a)$，$x_n\to a$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$”。

如果只是一些数列或一个数列$\{x_n\}(x_n\neq a)$满足$x_n\to a$，且有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，则不一定有$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$。例如，$\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在，但当$x_n=\dfrac{1}{n\pi}$时，有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$。

应用 （1）可以用于证明函数极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$不存在。

找出一个数列$\{x_n\}(x_n\neq a)$，$x_n\to a$，使$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$不存在；或找出两个数列$\{x_n\}(x_n\neq a)$，$x_n\to a$，$y_n(y_n\neq a)$，$y_n\to a$，使$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$。

（2）可以用函数的极限求数列的极限。

若数列$x_n(x_n\neq a)$，$x_n\to a$，且$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。但若$\lim\limits_{x\to a}f(x)$不存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$不一定不存在。

39. 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)$和$\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)$存在，是否$\lim\limits_{x\to a}g(x)$也存在？

分析 不一定。若$\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)g(x)}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)}{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$存在。

但$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to a}g(x)$不一定存在。例如，$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，但是$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在。

40. 什么情况下，需要用左、右极限来研究函数的极限？是否必须用极限的定义来计算函数的左、右极限？

分析 当函数$f(x)$在点$x=x_0$的两侧变化趋势可能不一致时，需要用单侧极限，即左、右极限来研究函数的极限。例如，一般对分段函数在分段点处的极限要用左、右极限去研究，也有一些初等函数在某些点的左、右极限不一致，需要分开研究。例如，$\arctan\dfrac{1}{x}$和$4^{\frac{1}{x}}$在$x\to 0$时左右极限都不一样。

值得注意的是，左、右极限的计算大都不必直接用定义计算。例如，$\lim\limits_{x\to 0}4^{\frac{1}{x}}$，因$\lim\limits_{x\to 0^+}4^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}4^{\frac{1}{x}}=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}4^{\frac{1}{x}}$不存在。

41. 下面结论是否成立？为什么？

（1）若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$。

（2）若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$y=f(u)$在点$u_0$处连续，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(u_0)$。

（3）若$u=\varphi(x)$在点x_0处不连续，$u_0=\varphi(x_0)$，且$y=f(u)$在点u_0处不连续，则$y=f[\varphi(x)]$在点x_0处不连续。

（4）若$u=\varphi(x)$在点x_0处不连续，$u_0=\varphi(x_0)$，且$y=f(u)$在点u_0处连续，则$y=f[\varphi(x)]$在点x_0处不连续。

（5）若$u=\varphi(x)$在点x_0处连续，$u_0=\varphi(x_0)$，且$y=f(u)$在点u_0处连续，则$y=f[\varphi(x)]$在点x_0处连续。

（6）若$u=\varphi(x)$在点x_0处连续，$u_0=\varphi(x_0)$，且$\lim\limits_{u\to u_0}f(u_0)$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$。

分析 （1）不一定成立。例如，函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, x\neq 0\\1, x=0\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}3, x\neq 0\\0, x=0\end{cases}$$

则$f[\varphi(x)]=\begin{cases}0, x\neq 0\\3, x=0\end{cases}$。

又因$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$，而$\lim\limits_{u\to 0}f(u)=3$，但$\lim\limits_{x\to 0}f[\varphi(x)]=0\neq\lim\limits_{u\to 0}f(u)$。

（2）成立。令$u=\varphi(x)$，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$|u-u_0|<\delta$时，使

$$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon。$$

又因$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，则对$\delta>0$，$\exists\gamma>0$，当$|x-x_0|<\gamma$时，$|\varphi(x)-u_0|<\delta$。所以，对$\forall\varepsilon>$

$0,\exists\gamma>0$，当$|x-x_0|<\gamma$时，$|\varphi(x)-u_0|<\delta$，使

$$|f[\varphi(x)]-f(u_0)|<\varepsilon。$$

（3）不一定成立。例如，函数$\varphi(x)=\begin{cases}1,x\geqslant 0\\0,x<0\end{cases}$和$f(x)=\begin{cases}1,x\geqslant 0\\0,x<0\end{cases}$均在点$x=0$不连续，但$f[\varphi(x)]=0$在点$x=0$连续。

（4）不一定成立。例如，函数$\varphi(x)=\begin{cases}1,x\geqslant 0\\0,x<0\end{cases}$在点$x=0$不连续，$f(x)=3$，在任意点$u_0$处连续，$f[\varphi(x)]=3$也在任意点连续。

（5）成立。因为$y=f(u)$在点u_0处连续，则$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0$，当$|u-u_0|<\eta$时，使得$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$；

又因$u=\varphi(x)$在点x_0处连续，对$\eta>0,\exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|\varphi(x)-u_0|<\eta$。所以$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$。

（6）成立。因为$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$存在，设$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，则$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0$，当$|u-u_0|<\eta$时，使得$|f(u)-A|<\varepsilon$；

又因$u=\varphi(x)$在点x_0处连续，对上述的$\eta>0,\exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|u-u_0|<\eta$。故有$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，$|f(u)-A|<\varepsilon$。

42. 为什么说初等函数在它的定义区间连续，而不说在定义域上连续？

分析 基本初等函数在其定义域上是连续的，但初等函数在其定义域的某些点上不一定连续，因为初等函数的定义域不只有定义区间，而且可能含有孤点，对于孤点讨论连续性是没有意义的。例如，函数$y=\sqrt{\cos^2x-1}$的定义域仅有孤点$x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，其每一个点都是孤立点。由于函数在定义域的孤立点的邻近无定义，因而不能讨论函数在该点的连续性，因此即不能说函数在该点连续，因此不能笼统地说初等函数在其定义域上连续。

但不难证明，如果初等函数$f(x)$的定义域D内的某点属于D内某一区间（该点属于$f(x)$的某一定义区间），那么$f(x)$在该点必定连续。因此说初等函数在其定义区间上连续。

43. 已知函数$f(x)$在$x=a$处连续，是否一定存在一充分小的邻域$U(a,\delta)$，使得$f(x)$在该邻域内连续？

分析 不一定。例如，令$E=\{0,\pm\dfrac{2}{(2n-1)\pi}(n=1,2,\cdots)\}$，

$$f(x)=\begin{cases}x\arctan\left(\tan\dfrac{1}{x}\right) & ,x\notin E\\[2ex]\dfrac{\pi}{2}|x| & ,x\in E\end{cases}$$

$f(x)$在$x=0$连续，而$x=\pm\dfrac{2}{(2n-1)\pi}(n=1,2,\cdots)$都是$f(x)$的跳跃间断点。于是在连续点$x=0$的任何邻域内都存在间断点。

证明 $f(0)=0$，且$|f(x)|\leqslant\dfrac{\pi}{2}|x|$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，所以$f(x)$在$x=0$连续。