高 等 学 校 教 材

实变函数 第二版

Function of Real Variable

胡适耕 编著

高等教育出版社

高等学校教材

实变函数

Shibian Hanshu

第二版

胡适耕　编著

高等教育出版社·北京

内容提要

本书系统介绍“实变函数”课程的基本内容：集与点集；测度与可测函数；Lebesgue 积分；L^p 空间（主要是 L^2 空间）及其应用；以测度为工具的微分论。中心内容是 Lebesgue 积分。本书注重所述内容的直观背景与主导思想，适度简化主要结论的形式刻画与逻辑论证，尽可能降低内容的难度与抽象性，强调实变函数方法的实用性，充实实际应用的训练。书中收集的 320 道习题依难度分为 A，B 两类，足以供不同程度的学生练习及教师选取试题之用。所有习题均给出了适当的提示，较难的问题给出了解题概要，以便于教师参考。每章之后附有“评注”，用以说明该章主要内容的背景、思想脉络、基本精神及与其他领域的关涉。

本书可用作理工科大学、高等师范院校数学及相近专业的教材或参考书，也可供有一定数学基础的读者自学之用。

图书在版编目（CIP）数据

实变函数 / 胡适耕编著 . -- 2 版 . -- 北京：高等教育出版社，2014. 8

ISBN 978-7-04-039887-8

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①胡… Ⅲ. ①实变函数 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ① O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 111556 号

策划编辑 胡 颖　责任编辑 胡 颖　封面设计 于文燕　版式设计 马敬茹
插图绘制 邓 超　责任校对 刘 莉　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	三河市宏图印务有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　本	850mm × 1168mm 1/32		
印　张	8.25	版　次	1999 年 7 月第 1 版
字　数	200 千字		2014 年 8 月第 2 版
购书热线	010-58581118	印　次	2014 年 8 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	19.80 元

物 料 号　39887-00

第二版前言

本书第一版前言提到:“(实变函数论作为)一种为分析数学带来如此巨大简化的理论,竟被当作一种复杂得令人难以接受的东西!这值得数学家们深思……有鉴于此,本书尽了最大努力来突出那些体现实变函数论基本特征的思想,简化或回避一些复杂的构造,尽可能降低难度,提高可读性。所有基本结论的证明,都作了尽可能的简化。经简化后仍很繁冗的证明,则移入各章最后一节,使对之不感兴趣的读者便于跳过它们。这样做完全不影响对实变函数核心内容的理解与掌握。”

就对实变函数课程目标及所面对挑战的理解与应对意向而言,以上解说似乎无需更多的补充了。自本书出版至今已过去了15年。今天,数学教育当然已面对完全不同的情势,没有人能自诩不必跟上潮流。但还是不能不说,写作本书的初衷并无根本改变。主要的目标仍然是:技术性的难度应力求降低,而实质性思想的高度则应予强调。当然,意识到要确立某个目标是一回事,而所选择的路径是否真能达此目标,则是另一回事。本书的许多热心读者曾就某些问题与作者进行过坦诚的讨论,他们的大量有益建议,为本书的修订提供了重要启示。所有细节都作了重新审察,凡必要而又可能的改进都作了考虑。主要的改动是:

1. 适当增加了一些解释性文字,以使书中的概念、定理与方法更容易理解与掌握,尤其使那些较艰深的内容能呈现出某种清晰的直观形象。

2. 增加了一些例子,基本上使书中的主要结果与方法的应用都有适当实例加以解释。最重要的结果则配以稍多的例题。

3. 适当增加了章末评注的条目,以使那些很典型的思想原则

更多地进入我们的视野，它们对于从多个不同角度理解实变函数论是十分有益的。

4. 适度细化了对习题的提示，以减轻读者在这方面的困难；这也许还有益于使用本书的教师。习题总量（320 道）已不算少，似不必增加，只是对少量习题作了调整或更换。为方便读者，全书习题实行了统一编序。

5. 调整了少数术语与记号，使之更加切合当代数学文献的主流选择。

此外，初版中还有某些零散疏漏与排版错误，凡已发现者都在修订时予以更正。

我们希望，上面提到的种种变动不只是“改动”，而是真正的“改进”。是否确实如此，当然只能由读者来评判了。

作者

2014 年 2 月于武汉

第一版前言

由 Newton，Leibniz 等人开创、后经 Cauchy，Riemann 等人改进的经典微积分，在 19 世纪后期已经成熟，并成为普遍应用的数学工具。然而，就在人们欢庆之际，出现了不祥的信号：经典微积分的一些重大缺陷开始为人们所注意。为革除这些缺陷所作的最初尝试，给创立新的微积分理论揭开了序幕。

人们注意的重点是积分学。经典积分即 Riemann 积分在许多方面不能令人满意。首先，Riemann 积分基本上只适用于连续函数（参看本书 3.4.1），因而其应用大受局限。其次，Riemann 积分与极限互换及两次积分互换均要求很强的条件，这使人们深感不便。还有其他一些结果（如 Newton – Leibniz 公式）所需条件过强。在 Riemann 积分的框架内，改进上述结果的努力要么收效甚微，要么导致更复杂的理论。于是出路在于创立新的积分。

新的积分也就应运而生，它就是出现于 20 世纪初的 Lebesgue 积分。Lebesgue 首先开创了测度论，然后以测度论为基础，引入了一种全新的积分。经过短暂的沉寂之后，数学家们不无惊喜地接受了 Lebesgue 积分，且最终确信它已消除 Riemann 积分的主要缺陷。新的积分很快在数学的多个领域显示出强大的威力，它的应用到处导致深刻的结果。而且，在以测度论为基础的新方法的推动下，经典微分学的面貌也为之改观。这样，以 Lebesgue 积分为中心的新的微积分理论终于形成。由于历史的原因，这一理论被称作“实变函数论”或“实分析”。实际上，它并非仅限于考虑“实变量函数”。

今天，实变函数论已成为现代分析不可缺少的理论基础。泛

函分析的诞生，在一定程度上正是受到实变函数论的推动。实变函数论的概念、结论与方法，已广泛应用于微分方程与积分方程理论、Fourier 分析、逼近论等学科。现代概率论已经完全建立在测度论与 Lebesgue 积分论的基础上。在这个意义上甚至可以说，概率论是“概率测度空间中的实函数论”。实变函数论对于现代数学的重要性，于此可见一斑。所有数学类专业及某些理工科专业将“实变函数”作为一门重要基础课，是理所当然的。

然而不幸的是，这门课程似乎名声欠佳。不少学过实变函数的学生除了留下“抽象、晦涩”的印象之外，收获不多。一种为分析数学带来如此巨大简化的理论，竟被当作一种复杂得令人难以接受的东西！这值得数学家们深思。

应当承认，实变函数论的许多概念有一定的抽象性；许多重要结论异常深刻，而为达到这些结论所需的理论推演亦不简单。问题在于，实变函数论的基本内容应当在何种形式下提供给初学者。一方面，无论是测度与积分，都免不了某些复杂的构造过程。这对于需要训练有素的分析数学研究者固然是重要的，但对于初学者未必是最重要的，对于相当一部分人则可能是完全不必要的。实变函数论本来具有的极富活力的新思想，常常被繁琐冗长的构造过程所窒息，致使初学者望而生畏。这大概是这门课程不易成功的主要原因。另一方面，有关测度与积分的基本概念完全植根于直观经验的现实土壤中，其基本特征实际上极其简单，几乎使人无法置疑；而对有关基本结果的描述也不困难，至于具体运用则更加灵活方便，应该提供给初学者的，正是这一方面，它能给学生以主要思路及实际运用方法。

有鉴于此，本书尽了最大努力来突出那些体现实变函数论基本特征的思想，简化或回避一些复杂的构造，尽可能降低难度，提高可读性。所有基本结论的证明，都作了尽可能的简化。经简化后仍很繁冗的证明，则移入各章最后一节，使对之不感兴趣的读者

便于跳过它们。这样做完全不影响对实变函数论核心内容的理解与掌握。像 Lebesgue 测度、乘积测度等的具体构造，如同实数理论一样，无疑是优美的数学创造。但今天的大多数学生没有足够的时间来欣赏这些数学遗产，他们还有更多的东西需要学习。将这些已经定型而又过于繁琐的材料放在一旁，看来是理所当然的。经过这样一些处理之后，希望本书的面貌不致过于令人憎恶。

一个普遍的误解是，实变函数论主要研究那些“病态的”、似乎远离常规思考的函数，因而缺乏实用价值。恰恰相反，实变函数论的结论与方法广泛应用于那些以“好函数”为研究对象的领域。用作证明的材料，非本课程所能尽述。但本书尽力举了微积分学中的一些例子，用以强调新方法如何有效地解决老问题。这将有助于正确认识实变函数论的价值。

为便于读者自学，本书尽可能详细地给出了必要的推导；对较难的证明则作了些启发性的导引。不过，作者并不认为应将所有细节包罗无遗。凡需要读者自己思考的地方，本书有意作了省略。当读者见了“请自证”或“何故？”之类的字样时，倘能认真思考，而不是浑然而过，必能收到非同寻常的效果。

本书准备了较多的习题。其中习题 A 是基本的，凡希望较好理解本书核心内容的读者务必完成其中的大部分。习题 B 是留给力有余裕的读者的；利用本书后面的提示，解决这些问题并无难以想象的困难，而一旦解题成功你将获益匪浅且兴趣倍增。

使用本书作为教材时，可依几种方式组合书中的材料。若选用 §1. 1—1. 5，§2. 1—2. 4，§3. 1—3. 5，§4. 1—4. 3，§5. 1—5. 3，§5. 5，则需 50 学时左右；若加上 §2. 5，§3. 6，§5. 6，§5. 7（目录中这些节打了 * 号），则需 60 学时左右；讲完全部内容（即再加上目录中打△号的节）至多 70 学时。对于内容的取舍，使用本书的教师是最权威的；他们富有创意的运用，将是对作者个人经验的极有益的补充与修正，这正是作者所期待的。

借本书出版之机，向关心、支持我编写工作的华中理工大学教务处、数学系的同事们表示衷心的感谢，他们对我的工作给予了热情鼓励和帮助。北京大学数学系刘和平教授仔细地审阅了全稿，提出了不少中肯的意见，使本书增色不少，在此向他表示万分的谢意。

胡适耕

1999 年 3 月于武汉

记号与约定

A^c：集 A 的补.

A° ：集 A 的内部.

$\bar{A}$ ：集 A 的闭包.

A'：集 A 的导集.

$|A|$：集 A 的基数.

B^A：从 A 到 B 的映射之全体.

AC：绝对连续函数类；AC$[a,b]$：$[a,b]$上的绝对连续函数类.

$B_r(a)$ ：以 a 为心，以 r 为半径的球；$\bar{B}_r(a)$ ：闭球.

BV：有界变差函数类；BV$[a,b]$：$[a,b]$上的有界变差函数类.

$C(X)$：集 X 上的连续函数之全体；$C[a,b]=C([a,b])$.

$c=|\mathbf{R}|$：连续统基数.

$d(x,A)$：点 x 到集 A 的距离.

diam A：集 A 的直径.

∂A：集 A 的边界.

f^+ ：f 的正部；f^- ：f 的负部.

Gr f：函数 f 的图形.

$\mathscr{L}$：Lebesgue 可测集类.

L^p：p 次可积函数类，$1\leqslant p<\infty$.

L^∞ ：本性有界函数类.

L 积分：Lebesgue 积分.

Lip：Lipschitz 函数类.

LS 积分：Lebesgue - Stieltjes 积分.

$M(X)$：X 上的可测函数之全体.

$M^+(X)$：X 上的非负可测函数之全体.

m：Lebesgue 测度；m_n：n 维 Lebesgue 测度.

$\mathbf{N}$：自然数集①.

$\mathbf{Q}$：有理数集.

$\mathbf{R}$：实数集；$\overline{\mathbf{R}}=[-\infty,\infty]$.

R 积分：Riemann 积分.

RS 积分：Riemann - Stieltjes 积分.

$S(X)$：X 上的简单函数之全体.

$S^+(X)$：X 上的非负简单函数之全体.

2^X：X 的所有子集之集.

$X\times Y$：X 与 Y 的积集.

$\mathbf{Z}$：整数集.

χ_A：集 A 的特征函数.

$\omega=|\mathbf{N}|$：自然数集之基数.

$A_n\uparrow A$：$\{A_n\}$ 是升列且 $A=\cup A_n$.

$A_n\downarrow A$：$\{A_n\}$ 是降列且 $A=\cap A_n$.

$f_n\uparrow f$：f_n 对 n 单调增且 $f_n\to f$.

$f_n\downarrow f$：f_n 对 n 单调减且 $f_n\to f$.

$f_n\to f$：f_n 按点收敛于 f.

$f_n\rightrightarrows f$：f_n 一致收敛于 f.

$f_n\xrightarrow{\mu}f$：f_n 依测度 μ 收敛于 f.

$f_n\to f$, a. e.：f_n 几乎处处收敛于 f.

$f_n\to f$, a. u.：f_n 几乎一致收敛于 f.

$f_n\xrightarrow{L^p}f$：f_n 依 L^p 范数收敛于 f.

$\triangleq$：定义为.

$\equiv$：恒等于.

□：定理或命题证毕.

---

① 本书自然数集为$\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$，不包含数0.

几 点 说 明

1. 引证　§1.1(1)表示§1.1中式(1)；1.1.1(i)表示定理(或命题、定义)1.1.1之(i)；[1,p.1]表示参考文献[1]中第1页.

2. 指标用法　不致误解时，出现于$\sum$，$\prod$，$\cup$，$\cap$下的指标予以省略. 下标n总表示自然数. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$依情况可写成

$$\sum_{n\in\mathbf{N}}a_n,\ \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}a_n,\ \sum_{n}a_n\ \text{或}\ \sum a_n.$$

$\prod a_n$，$\cup A_n$等仿此. $\cup A_n$总可看作无限可数并(必要时增加一些空集项)；$\cap A_n$仿此.

3. 极限记号　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$简写作$\lim\limits_{n}x_n$；$\lim\limits_{m,n\to\infty}x_{mn}$简写作$\lim\limits_{m,n}x_{mn}$；$f(x^{\pm})=\lim\limits_{y\downarrow 0}(x\pm y)$，其中$y\downarrow 0$表示$0<y\to 0$. 未作说明时，极限值包括$\pm\infty$.

4. 广义实数$\pm\infty$　∞总是指$+\infty$；$[0,\infty]=[0,\infty)\cup\{\infty\}$，$[-\infty,\infty]$仿此；$\forall a\in[-\infty,\infty]$，约定$0\cdot a=0$.

5. 上下确界　设$A\subset[-\infty,\infty]$. 则$\sup A=\infty\Leftrightarrow A\subset[-\infty,\infty)$且$A$上方无界或$\infty\in A$；$\inf A=-\infty\Leftrightarrow A\subset(-\infty,\infty]$且$A$下方无界或$-\infty\in A$.

6. 集记号　$A+B=\{a+b: a\in A,b\in B\}$，$A+x$仿此；$-A=\{-a: a\in A\}$；$X(f>0)=\{x\in X: f(x)>0\}=\{f>0\}$；$X(f\geqslant 0)$以及$X(f_n\to f)$等仿此.

7. 最大与最小　$a\vee b=\max\{a,b\}$；$a\wedge b=\min\{a,b\}$；$a^+=a\vee 0$；$a^-=(-a)^+$.

8. 当const用在式子中时，它表示某个常数，其具体数值难以或不必明确写出.

关于习题的说明

1. 习题 A 中所列问题大多是对书中结论的直接应用,或为本书主要概念提供的释例,一般稍加思考即可顺利解决,它们对于完成本课程所要求的基本训练是必不可少的.

2. 习题 B 是为有深入钻研兴趣且力有余裕的读者准备的,其中许多问题有一定难度. 但也有一些问题未必很难,只是所涉及的材料不关乎本书的核心内容,不宜放在习题 A 中.

3. 为简便起见,所有要求读者证明的问题,都只写出所要证的命题,而略去"求证"之类的词.

4. 考虑到使用本书的教师挑选习题的方便,每章的习题都是依据该章正文内容的顺序安排的;所用记号与设定也自然追随该章正文,而不另作解释.

5. 书末所附的"习题答案与提示"大概是学生与教师所欢迎的. 它虽然有些简略,但应当说已经够用. 任何代替读者思考的做法都是有害的,因此不拟提供一份详细的习题解答. 如果读者在参看"习题答案与提示"之前,能尽可能独立地解决问题,那么必将感到获益匪浅.

目　　录

第一章　集与点集

由德国数学家 Cantor 所创立的集合论,是现代数学中一个独立的分支. 按其本性而言,集合论是整个现代数学的逻辑基础;而就其发展历史而言,则与近代分析——包括实变函数论——的发展密切相关. 实变函数通常是第一门大量运用集合论知识的大学数学课程. 因此,在现代数学教育中,对集合论知识的较系统的介绍,通常构成实变函数教材的第一章. 不过,对于实变函数论来说,集合论毕竟只是一个辅助工具. 因此,本章仅介绍那些必不可少的集合论知识,并不深入它的专门课题. 而且,我们始终采用朴素的观点,不涉及任何有关集合论公理的讨论.

§1.1　集合及其运算

集合如同几何学中的**点**一样,是最基本的数学概念,对它难以严格定义,但可给予一种朴素的描述. 通常称具有一定性质的一组对象为**集**或**集合**,称其中的对象为该集的**元素**或**元**. 集的元素必须彼此互异(如$\{a,b,b\}$与$\{a,b\}$应看作同一个集),而且归属明确(如不能说"大数的集",因为究竟什么数属于这一集并不明确). 一般以大写字母 A,B,X,Y 等表示集,以小写字母 a,b,x,y 等表示集的元素. 若 a 是集 A 的元素,则说 a 属于 A,记作 $a\in A$;以 $a\notin A$ 表示 a 不属于 A. 不含任何元素的集称为空集,记作 $\varnothing$. 只含一个元素 a 的集记作$\{a\}$,称之为**单元素集**. 注意$\{a\}\neq a$!约定以专用字母表示一些最常用的集. 例如,字母 $\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 分别记自然数集、整数集、有理数集、实数集与复数集.

表示集的方法通常有两种. 其一是列举法,例如,10 以内的素数之集是$\{2,3,5,7\}$;而

$$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

这种表示法显然很受局限,不能用来表出稍复杂的集.较一般的方法是通过给出集中元素所满足的条件来表示集:若 $x\in A \Leftrightarrow x$ 满足条件 P,则将集 A 表示为 $\{x : x$ 满足 $P\}$.例如,

$$\mathbf{N}=\{k : k\in\mathbf{Z} \text{ 且 } k>0\}.$$

上式也简写作 $\mathbf{N}=\{k\in\mathbf{Z} : k>0\}$.类似地,$(a,b)=\{x\in\mathbf{R} : a<x<b\}$,$[a,\infty)=\{x\in\mathbf{R} : x\geqslant a\}$,等等.

定义 1.1.1 设 A,B 是两个集.若 A 的元素都是 B 的元素,则说 A 包含于 B 或 B 包含 A,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,且称 A 为 B 的子集.若 $A\subset B$ 且 $A\supset B$,则说 A 与 B 相等,记作 $A=B$.若 $A\subset B\neq A$,则称 A 为 B 的真子集.约定空集 $\varnothing$ 是任何集的子集.

例如,设 $A=\{1\}$,$B=\{1,2\}$,$C=\{x\in\mathbf{R} : x^2-3x+2=0\}$,则 A 有两个子集,即 A 与 $\varnothing$;$B=C$,且 B 有四个子集,即 $B,\varnothing,\{1\}$ 与 $\{2\}$,后三个集是 B 的真子集.

一般地,若 A 含 n 个元素,则 A 恰有 2^n 个子集.这启示出如下记号:任给集 A,它的子集之全体记作 2^A,称它为 A 的**幂集**.

设 I 是一非空集.若对每个 $i\in I$,指定了一集 A_i,则称 $\{A_i : i\in I\}$ 为一个集族,也简写作 $\{A_i\}$.注意集族中诸集不必互异.称集族 $\{A_n : n\in\mathbf{N}\}$ 为集列,通常简写作 $\{A_n\}$.若 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$(或 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$),则称集列 $\{A_n\}$ 为**升列**,记作 $A_n\uparrow A$,$A=\bigcup A_n$(或**降列**,记作 $A_n\downarrow A$,$A=\bigcap A_n$);升列与降列合称为**单调列**.以上概念可与实数的序列、增序列、减序列及单调列相对照,在本书中它们将被大量使用.

在运用集时,经常需要考虑集的"分解"与"合成",即将一复杂的集分解为某些较简单的集的某种"组合",或利用已知集构造特定的新集,这都依赖于集运算.下面就来给出集运算的定义.

定义 1.1.2 给定集 $A,B,A_i(i\in I)$,令

$$A\cup B=\{x : x\in A \text{ 或 } x\in B\};\tag{1}$$

$$A\cap B=\{x : x\in A \text{ 且 } x\in B\};\tag{2}$$