

考研无忧红皮书

考研数学 辅导全书

数学
一

主编 李汉龙 缪淑贤 王金宝

- ① 最基础角度入手，详解考查要点
- ② 典型真题实例，紧扣考纲透彻深入剖析
- ③ 集中提炼要点精华，贴心提示误区失分点
- ④ 揭秘考题绝招，指点思路技巧易错点



国防工业出版社

National Defense Industry Press

考研数学学习基本教材和辅导

考研数学辅导全书(数学一)

主 编	李汉龙	缪淑贤	王金宝			
副主编	艾 瑛	孙丽华	孙常春	隋 英	王 娜	
参 编	刘 丹	闫红梅	孙 平	赵恩良		
	孙艳玲	王凤英	杜利明	顾艳丽		
	韩孺眉	畅春玲				

国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书是作者结合多年的考研数学辅导教学实践并参考有关资料的基础上,为报考硕士研究生的考生编写的数学复习备考用书,包含了全部的考研数学知识点内容题型,主要有高等数学、线性代数和概率论与数理统计知识点内容题型,适用于数学一,同时数学二和数学三也可参考使用。

本书的编排结构分为三大部分:第一篇高等数学,第二篇线性代数,第三篇概率论与数理统计.其中高等数学又分为:函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学,向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,常微分方程共8章内容;线性代数包含:行列式,矩阵,向量,线性方程组,特征值和特征向量,二次型共6章内容;概率论与数理统计包含:随机事件和概率,随机变量及其分布,随机变量的数字特征,大数定律和中心极限定理,数理统计的基本概念,参数估计与假设检验共6章内容.全书总计20章内容.

图书在版编目(CIP)数据

考研数学辅导全书. 数学一/李汉龙, 缪淑贤, 王金宝主
编. —北京:国防工业出版社, 2014. 4

ISBN 978-7-118-09330-8

I. ①考... II. ①李... ②缪... ③王... III. ①高等
数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 066215 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

涿中印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 33¼ 字数 840 千字

2014 年 4 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—3000 册 定价 59.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店: (010)88540777

发行邮购: (010)88540776

发行传真: (010)88540755

发行业务: (010)88540717



前言

本书是作者结合多年的考研数学辅导教学实践并参考有关资料的基础上,为报考硕士研究生考生编写的数学复习备考用书,包含了全部的考研数学知识点内容题型,主要有高等数学、线性代数和概率论与数理统计知识点内容题型,适用于数学一,同时数学二和数学三也可参考使用.

本书的编排结构分为三大部分:第一篇高等数学,第二篇线性代数,第三篇概率论与数理统计.其中高等数学又分为:函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学,向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,常微分方程共8章内容;线性代数包含:行列式,矩阵,向量,线性方程组,特征值和特征向量,二次型共6章内容;概率论与数理统计包含:随机事件和概率,随机变量及其分布,随机变量的数字特征,大数定律和中心极限定理,数理统计的基本概念,参数估计与假设检验共6章内容.全书总计20章内容.每一章内容都包含以下四个方面.

(1) 考点提示及大纲要求:本部分的目的是使考生明白考试常考内容和考试要求,从而在复习时有明确的目标和重点.

(2) 常考题型与范例精解:本部分对历年真题中常见的题型进行归纳分类,总结各种题型的解题方法,注重一题多解,以便能够开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,并能灵活地解决问题.针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误,每个例题都给出了详细的解题思路分析和解答,并在解答后给出相应的评注,对考试大纲所要求的知识点进行了阐述,同时对考试重点、难点以及常考知识点进行了深度剖析.

(3) 学习效果两级测试题:只有适量的练习才能巩固所学的知识,数学复习离不开做题.为了使考生更好地巩固所学知识,提高实际解题能力,本书作者在每一章都精心设计了两套练习题:一套基础测试题和一套考研训练题,供考生练习,以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上,达到轻松解答考研真题的水平.

(4) 习题答案与提示:本部分针对本书精选的练习题,给出了答案与提示,为考生解答疑难问题给出详细的指导,真正达到一书在手,犹如名师在侧的境界.

附录中提供了2010—2014年考研真题及答案,供考生自测之用.

本书主要通过具体的实例,使读者一步一步地随着作者的思路来完成考研数学知识点的学习.书中所给实例具有技巧性而又道理显然,可使读者思路畅达,所学知识融会贯通,灵活运用,达到事半功倍之效.本书将会成为读者考研的良师益友.本书所使用的部分考研真题资料来自于互联网络.我们使用这些资料,目的是想给读者提供更为完善的学习帮助.

本书第一篇:第1章由李汉龙编写;第2章由韩儒眉编写;第3章由艾瑛编写;第4章由闫

红梅编写;第5章由隋英编写;第6章由孙常春编写;第7章由王金宝编写;第8章由畅春玲编写.第二篇:第9章由王凤英编写;第10章由孙丽华编写;第11章和第14章由孙平编写;第12章由杜利明编写;第13章由缪淑贤编写.第三篇:第15章由赵恩良编写;第16章由刘丹编写;第17章和第18章由孙艳玲编写;第19章和第20章由顾艳丽编写.另外由李汉龙根据网络资料编写了附录和前言.全书由李汉龙统稿,李汉龙、缪淑贤、王金宝审稿.另外,本书的编写和出版得到了国防工业出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢!

本书参考了国内出版的一些教材和考研辅导书,见本书所附参考文献,在此表示谢意.由于水平所限,书中不足之处在所难免,恳请读者、同行和专家批评指正.

编 者
2014年1月

目 录

第一篇 高等数学

第 1 章 函数、极限、连续	2
1.1 考点提示及大纲要求	2
1.1.1 考点提示	2
1.1.2 大纲要求	2
1.2 常考题型与范例精解	2
1.2.1 函数的概念及其特性	2
1.2.2 函数极限存在性的判定	4
1.2.3 函数极限的计算	7
1.2.4 数列极限的计算和证明	12
1.2.5 无穷小量的比较	15
1.2.6 已知极限值,确定待定系数	19
1.2.7 讨论函数的连续性与间断点类型	22
1.3 学习效果两级测试	24
1.3.1 基础测试题	24
1.3.2 考研训练题	26
1.4 习题答案与提示	29
1.4.1 基础测试题	29
1.4.2 考研训练题	30
第 2 章 一元函数微分学	35
2.1 考点提示及大纲要求	35
2.1.1 考点提示	35
2.1.2 大纲要求	35
2.2 常考题型与范例精解	36
2.2.1 导数和微分的概念及判定	36
2.2.2 各类函数导数的求法	38
2.2.3 高阶导数	42
2.2.4 微分中值定理及导数应用	44
2.3 学习效果两级测试	55
2.3.1 基础测试题	55
2.3.2 考研训练题	56
2.4 习题答案与提示	58

2.4.1	基础测试题	58
2.4.2	考研训练题	60
第3章	一元函数积分学	63
3.1	考点提示及大纲要求	63
3.1.1	考点提示	63
3.1.2	大纲要求	63
3.2	常考题型与范例精解	63
3.2.1	积分的概念和性质	63
3.2.2	不定积分的计算	66
3.2.3	定积分的计算	70
3.2.4	反常积分	75
3.2.5	积分上限函数	76
3.2.6	有关定积分的证明	80
3.2.7	定积分的应用	84
3.3	学习效果两级测试	90
3.3.1	基础测试题	90
3.3.2	考研训练题	92
3.4	习题答案与提示	95
3.4.1	基础测试题	95
3.4.2	考研训练题	98
第4章	向量代数与空间解析几何	103
4.1	考点提示及大纲要求	103
4.1.1	考点提示	103
4.1.2	大纲要求	103
4.2	常考题型与范例精解	103
4.2.1	向量的概念及其线性运算	103
4.2.2	向量的数量积、向量积、三向量的混合积	104
4.2.3	利用向量的运算求面积、体积问题	106
4.2.4	两向量垂直、平行的条件	106
4.2.5	求两向量的夹角	107
4.2.6	单位向量与向量的方向余弦	109
4.2.7	曲面方程和空间曲线方程的概念	109
4.2.8	求平面方程	110
4.2.9	求直线方程	111
4.2.10	平面间、直线间、平面与直线间的关系的判断	113
4.2.11	关于平面与平面、直线与直线、直线与平面的夹角	116
4.2.12	关于点到平面和点到直线的距离问题	118
4.2.13	点关于直线、平面的对称点	119
4.2.14	关于球面	120
4.2.15	旋转轴为坐标轴的旋转曲面	121

4.2.16	母线平行于坐标轴的柱面	123
4.2.17	空间曲线以及空间曲线在坐标面上的投影曲线方程	123
4.2.18	求曲面围成的空间立体及其在坐标面上的投影区域	125
4.3	学习效果两级测试	126
4.3.1	基础测试题	126
4.3.2	考研训练题	129
4.4	习题答案与提示	131
4.4.1	基础测试题	131
4.4.2	考研训练题	136
第5章	多元函数微分学	141
5.1	考点提示及大纲要求	141
5.1.1	考点提示	141
5.1.2	大纲要求	141
5.2	常考题型与范例精解	141
5.2.1	多元函数的基本概念	141
5.2.2	多元函数的偏导数	145
5.2.3	多元函数的全微分	146
5.2.4	多元函数偏导数的计算	148
5.2.5	多元函数微分学的应用	151
5.3	学习效果两级测试	158
5.3.1	基础测试题	158
5.3.2	考研训练题	160
5.4	习题答案与提示	162
5.4.1	基础测试题	162
5.4.2	考研训练题	166
第6章	多元函数积分学	172
6.1	考点提示及大纲要求	172
6.1.1	考点提示	172
6.1.2	大纲要求	172
6.2	常考题型与范例精解	172
6.2.1	二重积分的计算与应用	172
6.2.2	三重积分的计算与应用	178
6.2.3	第一类型曲线积分的计算与应用	183
6.2.4	第二类型曲线积分的计算与应用	184
6.2.5	两类曲线积分的关系	192
6.2.6	第一类型曲面积分的计算与应用	193
6.2.7	第二类型曲面积分的计算与应用	195
6.2.8	两类曲面积分的关系	200
6.3	学习效果两级测试	200
6.3.1	基础测试题	200

6.3.2	考研训练题	202
6.4	习题答案与提示	203
6.4.1	基础测试题答案与提示	203
6.4.2	考研训练题答案与提示	205
第7章	无穷级数	207
7.1	考点提示及大纲要求	207
7.1.1	考点提示	207
7.1.2	大纲要求	207
7.2	常考题型与范例精解	208
7.2.1	正项级数敛散性的判据与常用技巧	208
7.2.2	任意项级数的敛散性的判据与常用技巧	213
7.2.3	常数项级数的有关命题的证明	217
7.2.4	幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$	219
7.2.5	傅里叶级数	226
7.3	学习效果两级测试	229
7.3.1	基础测试题(满分150分)	229
7.3.2	考研训练题(满分150分)	231
7.4	习题答案与提示	233
7.4.1	基础测试题答案	233
7.4.2	考研训练题答案	233
第8章	常微分方程	235
8.1	考点提示及大纲要求	235
8.1.1	考点提示	235
8.1.2	大纲要求	235
8.2	常考题型与范例精解	235
8.2.1	一阶微分方程	235
8.2.2	可降阶的高阶微分方程	238
8.2.3	高阶线性微分方程	240
8.2.4	欧拉方程	242
8.2.5	微分方程的应用	243
8.3	学习效果两级测试	244
8.3.1	基础测试题(满分150分)	244
8.3.2	考研训练题(满分150分)	246
8.4	习题答案与提示	248
8.4.1	基础测试题答案	248
8.4.2	考研训练题答案	250

第二篇 线性代数

第9章	行列式	254
-----	-----	-----

9.1	考点提示及大纲要求	254
9.1.1	考点提示	254
9.1.2	大纲要求	254
9.2	常考题型与范例精解	254
9.2.1	行列式的概念与性质	254
9.2.2	数字型行列式的计算	257
9.2.3	抽象行列式的计算	260
9.2.4	含参数行列式的计算	261
9.2.5	关于 $ A =0$ 的证明	262
9.3	学习效果两级测试	262
9.3.1	基础测试题	262
9.3.2	考研训练题	265
9.4	习题答案与提示	268
9.4.1	基础测试题参考答案	268
9.4.2	考研训练题参考答案	270
第 10 章	矩阵	272
10.1	考点提示及大纲要求	272
10.1.1	考点提示	272
10.1.2	大纲要求	272
10.2	常考题型与范例精解	272
10.2.1	矩阵的运算	272
10.2.2	矩阵的秩	280
10.2.3	分块矩阵的运算	282
10.2.4	初等变换与初等矩阵的关系的应用	283
10.3	学习效果两级测试	283
10.3.1	基础测试题	283
10.3.2	考研训练题	285
10.4	习题答案与提示	287
10.4.1	基础测试题答案	287
10.4.2	考研训练题答案	288
第 11 章	向量	290
11.1	考点提示及大纲要求	290
11.1.1	考点提示	290
11.1.2	大纲要求	290
11.2	常考题型与范例精解	290
11.2.1	线性组合和线性表示	290
11.2.2	线性相关和线性无关	293
11.2.3	极大线性无关组和秩	295
11.2.4	向量空间和坐标变换	298
11.2.5	标准正交基和正交矩阵	299

11.2.6	秩和直线平面的综合题	300
11.3	学习效果两级测试	301
11.3.1	基础测试题	301
11.3.2	考研训练题	303
11.4	习题答案与提示	305
11.4.1	基础测试题	305
11.4.2	考研训练题	305
第 12 章	线性方程组	307
12.1	考点提示及大纲要求	307
12.1.1	考点提示	307
12.1.2	大纲要求	307
12.2	常考题型与范例精解	307
12.2.1	线性方程组解的判定、性质与结构	307
12.2.2	数字方程组的求解	310
12.2.3	抽象方程组的求解	312
12.2.4	讨论两个方程组之间的关系	314
12.2.5	有关基础解系的证明	315
12.3	学习效果两级测试	317
12.3.1	基础测试题	317
12.3.2	考研训练题	320
12.4	习题答案与提示	323
12.4.1	基础测试题答案与提示	323
12.4.2	考研训练题答案与提示	324
第 13 章	特征值和特征向量	326
13.1	考点提示及大纲要求	326
13.1.1	考点提示	326
13.1.2	大纲要求	326
13.2	常考题型与范例精解	326
13.2.1	求矩阵的特征值与特征向量	326
13.2.2	特征值特征向量的逆问题	331
13.2.3	相似的判定及其逆问题	334
13.2.4	矩阵可对角化的判定及其逆问题	337
13.2.5	特征值特征向量的证明题	340
13.2.6	特征值特征向量的应用	342
13.3	学习效果两级测试	344
13.3.1	基础测试题	344
13.3.2	考研训练题	346
13.4	习题答案与提示	348
13.4.1	基础测试题	348
13.4.2	考研训练题	349

第 14 章 二次型	353
14.1 考点提示及大纲要求	353
14.1.1 考点提示	353
14.1.2 大纲要求	353
14.2 常考题型与范例精解	353
14.2.1 二次型及其标准形	353
14.2.2 已知二次型通过正交变换化为标准形,反求参数	356
14.2.3 合同变换与合同矩阵	360
14.2.4 二次型及其矩阵正定性的判定与证明	363
14.3 学习效果两级测试	365
14.3.1 基础测试题	365
14.3.2 考研训练题	366
14.4 习题答案与提示	368
14.4.1 基础测试题	368
14.4.2 考研训练题	369

第三篇 概率论与数理统计

第 15 章 随机事件和概率	372
15.1 考点提示及大纲要求	372
15.1.1 考点提示	372
15.1.2 大纲要求	372
15.2 常考题型与范例精解	372
15.2.1 随机事件和概率	372
15.2.2 古典概型	375
15.2.3 条件概率与积事件概率	379
15.2.4 全概率公式与贝叶斯公式	379
15.2.5 事件的独立性与独立重复试验	381
15.3 学习效果两级测试	383
15.3.1 基础测试题	383
15.3.2 考研训练题	384
15.4 习题答案与提示	385
15.4.1 基础测试题	385
15.4.2 考研训练题	386
第 16 章 随机变量及其分布	388
16.1 考点提示及大纲要求	388
16.1.1 考点提示	388
16.1.2 大纲要求	388
16.2 常考题型与范例精解	389
16.2.1 随机变量及其分布函数	389

16.2.2	离散型随机变量与连续型随机变量	391
16.2.3	一维随机变量的函数的分布	395
16.2.4	二维随机变量及其联合分布函数	397
16.2.5	边缘分布和条件分布	399
16.2.6	随机变量的独立性	403
16.2.7	两个随机变量的函数的分布	405
16.3	学习效果两级测试	408
16.3.1	基础测试题	408
16.3.2	考研训练题	410
16.4	习题答案与提示	413
16.4.1	基础测试题	413
16.4.2	考研训练题	416
第 17 章	随机变量的数字特征	419
17.1	考点提示及大纲要求	419
17.1.1	考点提示	419
17.1.2	大纲要求	419
17.2	常考题型与范例精解	419
17.2.1	求一维随机变量的数字特征	419
17.2.2	求一维随机变量函数的数学期望	421
17.2.3	求二维随机变量及其函数的数字特征	424
17.2.4	求多维随机变量的数字特征($(0,1)$ 分布分解法简介)	427
17.2.5	有关数字特征的证明题和应用题	430
17.3	学习效果两级测试	433
17.3.1	基础测试题	433
17.3.2	考研训练题	434
17.4	习题答案与提示	436
17.4.1	基础测试题	436
17.4.2	考研训练题	437
第 18 章	大数定律和中心极限定理	439
18.1	考点提示及大纲要求	439
18.1.1	考点提示	439
18.1.2	大纲要求	439
18.2	常考题型与范例精解	439
18.2.1	有关切比雪夫不等式的命题	439
18.2.2	有关大数定律的命题	441
18.2.3	有关中心极限定理的命题	443
18.3	学习效果两级测试	449
18.3.1	基础测试题	449
18.3.2	考研训练题	450
18.4	习题答案与提示	451

18.4.1	基础测试题	451
18.4.2	考研训练题	452
第 19 章	数理统计的基本概念	454
19.1	考点提示及大纲要求	454
19.1.1	考点提示	454
19.1.2	大纲要求	454
19.2	常考题型与范例精解	454
19.2.1	统计量及其分布和概率	454
19.2.2	统计量的数字特征	457
19.3	学习效果两级测试	459
19.3.1	基础测试题	459
19.3.2	考研训练题	461
19.4	习题答案与提示	463
19.4.1	基础测试题	463
19.4.2	考研训练题	463
第 20 章	参数估计与假设检验	467
20.1	考点提示及大纲要求	467
20.1.1	考点提示	467
20.1.2	大纲要求	467
20.2	常考题型与范例精解	467
20.2.1	参数的矩估计量(值)和最大似然估计量(值)	467
20.2.2	点估计量的评选	471
20.2.3	正态总体均值与方差的置信区间	471
20.2.4	有关两类错误的命题	473
20.2.5	正态总体的均值与方差的假设检验	475
20.3	学习效果两级测试	478
20.3.1	基础测试题	478
20.3.2	考研训练题	480
20.4	习题答案与提示	482
20.4.1	基础测试题	482
20.4.2	考研训练题	482
附录	2010—2014 年考研真题及答案	486
参考文献		516

第一篇

高等数学

- 第 1 章 函数、极限、连续
- 第 2 章 一元函数微分学
- 第 3 章 一元函数积分学
- 第 4 章 向量代数与空间解析几何
- 第 5 章 多元函数微分学
- 第 6 章 多元函数积分学
- 第 7 章 无穷级数
- 第 8 章 常微分方程

第1章 函数、极限、连续

1.1 考点提示及大纲要求

1.1.1 考点提示

(1) 函数的概念及表示法,函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,复合函数、反函数、分段函数和隐函数.

(2) 基本初等函数的性质及其图形、初等函数、函数关系的建立(应用题).

(3) 数列极限(转化为函数极限、单调有界、定积分、夹逼定理)与函数极限(四则变换、无穷小代换、积分中值定理、洛必塔法则、泰勒公式齐次展开)的定义及其性质(局部保号性).

(4) 函数的左极限与右极限(注意正负号)、无穷小和无穷大的概念及其关系、无穷小的性质(和性质、积性质)及无穷小的比较(求导定阶).

(5) 极限的四则运算(要在各自极限存在的条件下)、极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则.

(6) 两个重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

(7) 函数连续的概念、函数间断点的类型,初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质(零点定理、介值定理).

1.1.2 大纲要求

(1) 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立简单应用问题中的函数关系式.

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

(3) 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

(5) 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念,以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

(6) 掌握极限的性质及四则运算法则.

(7) 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

(8) 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限.

(9) 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

(10) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

1.2 常考题型与范例精解

1.2.1 函数的概念及其特性

例 1-1 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求函数 $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域.

分析 对于函数 $f(x+a) + f(x-a)$ 来说,其定义域内的变量既要满足函数关系 $f(x+a)$,又要满足函数关系 $f(x-a)$,因此,可从 $f(x)$ 的定义域入手,找满足上述关系的两个集合的交集.

解答 由函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$ 得

$$\begin{cases} 0 \leq x+a \leq 1 \\ 0 \leq x-a \leq 1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -a \leq x \leq 1-a \\ a \leq x \leq 1+a \end{cases}$$

故 $a \leq x \leq 1-a$, 因而 $0 < a \leq \frac{1}{2}$.

所以,当 $a = \frac{1}{2}$ 时,函数在 $x = \frac{1}{2}$ 点有定义;当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时,函数的定义域为 $[a, 1-a]$;当 $a > \frac{1}{2}$ 时无解,即定义域为空集.

评注 求复合函数的定义域,要注意函数关系 f 的定义域是相同的.

例 1-2 已知 $f(x+2) = 2^{x^2+4x} - x$, 求 $f(x-2)$.

分析 求复合函数的关键是先求出函数的对应法则 $f(x)$.

解答 方法一:由于 $f(x+2) = 2^{(x+2)^2-4} - (x+2) + 2$, 所以 $f(x) = 2^{x^2-4} - x + 2$, 于是 $f(x-2) = 2^{x^2-4x} - x + 4$.

方法二:令 $t = x+2$, 代入函数表达式中,得

$$f(t) = 2^{t^2-4} - t + 2$$

因此 $f(x) = 2^{x^2-4} - x + 2$, 于是 $f(x-2) = 2^{x^2-4x} - x + 4$

评注 此题用了两种方法,第一种方法是凑类型法,将给出的表达式凑成对应符号 $f(\quad)$ 内中间变量的表达形式,然后得出 $f(x)$ 的表达式;第二种方法是变量替换法.两种方法各有优劣,不能一概而论,要根据题目的具体情况作出选择.

例 1-3 若 $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形关于直线 $x = a$ 与 $x = b$, ($a < b$) 均对称,求证: $y = f(x)$ 是周期函数.

分析 根据对称以及周期函数的概念,只要找出函数的周期,即可证明函数是周期函数.

证明 由假设 $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形关于直线 $x = a$ 与 $x = b$, ($a < b$) 均对称,即有

$$f(a+x) = f(a-x), f(b+x) = f(b-x)$$

成立,于是

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a - (a - x)) = f(a + (a - x)) = f(2a - x) \\ &= f(b - (b + x - 2a)) = f(b + (b + x - 2a)) = f(x + 2(b - a)) \end{aligned}$$

所以 $y = f(x)$ 是周期函数.

评注 本题巧妙地使用了对称和周期函数的概念,最终求出了函数的周期 $2(b-a)$,从而证明了函数为周期函数.

例 1-4 函数 $f(x) = x \sin x$, ($\quad$).

(A) 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大

(B) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界

(C) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界

(D) 当 $x \rightarrow \infty$ 时有有限极限

分析 选择题可以通过排除法进行求解.

解答 取 $x = n\pi$, $n \rightarrow \infty$ 时, $f(x) = x \sin x = 0$, 因此排除 A. 取 $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \rightarrow \infty$ 时, $f(x) = x \sin x =$

$2n\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty$, 因此排除 B, 从而又可以排除 D, 因此正确答案是 C.