实用回归分析

方开泰　全　辉　陈庆云　编著

科学出版社

实用回归分析

方开泰　全　辉　陈庆云　编著

科学出版社

1988

内 容 简 介

回归分析是数理统计中很重要的方法．本书重点介绍回归分析的基本思想和常用方法，有些方法是近十几年才发展起来的，并且很有实用价值（如岭回归、压缩估计、最优回归子集等）．书中介绍的方法均用例子来说明，以便读者理解和使用．

本书可供工程技术人员、管理干部、科学工作者阅读，也可供大专院校有关专业师生参考．

实 用 回 归 分 析

方开泰　全　辉　陈庆云 编著

责任编辑　毕　颖

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1988 年 10 月第 一 版　开本：787×1092 1/32

1988 年 10 月第一次印刷　印张：11 1/2

印数：0001—5,040　字数：260,000

ISBN 7-03-000544-9/O·140

定价：4.30 元

序　言

数理统计诸方法中以回归分析应用最为广泛，早在 19 世纪回归分析就以最小二乘法的面貌出现，并在实际中开始应用. 100 多年来它的理论和方法日益丰富，应用面越来越广，并且回归分析的思想已渗透到数理统计的其它分支之中，如时间序列分析、主成分分析、试验设计、判别分析等. 从应用的角度，最近又发展了回归诊断一套理论.

本书的目的是想用不大的篇幅向读者既介绍回归分析的思想和常用方法，又介绍回归分析的一些近代发展，如变量选择、岭回归、稳健回归、非线性回归等. 凡具有大学二年级以上数学水平的人均可阅读本书. 本书可作为大专院校数理统计课程的参考书、回归分析课程的教料书，也可作为实际工作者学习使用回归分析的自修课本. 书中的主要方法均用数值例子来说明，便于读者理解和使用.

矩阵代数是回归分析中的主要数学工具，为了方便读者，第一章介绍了本书需要的矩阵代数知识. 第二章讲述了一元线性回归，这是最简单的回归模型，也可以说是最重要的内容，因为将这个模型的处理理解透彻了，也就不难学习更复杂的模型了. 因此，在多元线性回归一章中，类似一元线性回归的处理我们就比较简略，而将重点放在多元模型所特有的问题上. 第四章介绍了有约束的回归模型，这个模型不仅本身有强烈的实际背景，而且与回归系数的假设检验有十分密切的关系. 该章还进一步讨论了有非负约束的模型——配方回归，这是实际中常见而一般回归分析书中几乎很少介绍的模

型．非线性回归主要有四种处理方法，第五章介绍了其中的三种，第四种方法(多项式回归)单独组成了第六章．回归模型中自变量的选择由两章组成，第七章介绍在我国比较流行的逐步回归，第八章重点说明最优回归子集的求法，它是随着电子计算机技术的飞速发展而产生的一套算法，目前已有取代逐步回归的趋势．为了解决设计矩阵的退化问题，产生了岭回归和压缩估计，它打破了无偏估计在统计学中占绝对统治的地位，证明在一定的条件下有偏估计反比无偏估计好，这是近代回归分析中具有突破性的进展之一，它的内容将在第九章介绍．随着近代稳健统计的发展，产生了各种形式的稳健回归，其中的一种形式是最小化残差绝对值和，第十章讨论了在这种意义下的稳健回归，并用线性规划的单纯形法来求得它的解．

回归分析的内容十分丰富，在一本书中很难将所有方面都涉及到，我们的选材是否得当，有待广大读者批评指正，对书中的缺点和错误也请读者不吝指正．

方开泰　全　辉

(中国科学院应用数学研究所)

陈庆云

(苏州大学)

1987年7月24日

目　录

序言 …… i
第一章　引论 …… 1
　第一节　相关关系 …… 1
　第二节　向量和矩阵 …… 2
　第三节　矩阵的分解和微商 …… 14
　第四节　随机矩阵的矩 …… 17
第二章　一元线性回归 …… 20
　第一节　回归方程的建立 …… 20
　第二节　回归方程的显著性检验 …… 29
　第三节　回归模型的矩阵表示 …… 38
　第四节　残差分析、预报和控制 …… 43
　第五节　加权回归 …… 60
第三章　多元线性回归 …… 64
　第一节　引言 …… 64
　第二节　回归方程的求法 …… 65
　第三节　高斯消去法与消去变换 …… 69
　第四节　多元回归最小二乘估计的性质 …… 78
　第五节　回归方程和回归系数的显著性检验 …… 84
　第六节　添加变量与添加试验的回归 …… 94
第四章　有约束的回归 …… 104
　第一节　线性约束 …… 104
　第二节　有随机约束的混合回归模型 …… 117
　第三节　配方回归 …… 121
第五章　非线性回归 …… 141
　第一节　能化为线性回归的曲线回归 …… 141

第二节 分段回归……………………………………………… 160
第三节 一般非线性模型的曲线拟合……………………… 168
第六章 多项式回归和正交多项式…………………………… 184
第一节 多项式回归……………………………………………… 184
第二节 正交多项式……………………………………………… 185
第三节 正交多项式回归的例子……………………………… 191
第七章 逐步回归…………………………………………………… 204
第一节 逐步回归的基本思想…………………………………… 204
第二节 逐步回归的数学模型…………………………………… 204
第三节 逐步回归的计算方法…………………………………… 209
第四节 逐步回归算例…………………………………………… 219
第八章 自变量的选择…………………………………………… 233
第一节 引言……………………………………………………… 233
第二节 产生一切可能的回归…………………………………… 235
第三节 选择变量的原则………………………………………… 243
第四节 只产生比较好的回归…………………………………… 265
第九章 岭回归……………………………………………………… 274
第一节 最小二乘估计与岭回归估计………………………… 274
第二节 岭回归估计的基本性质……………………………… 279
第三节 k 值的选择……………………………………………… 286
第四节 应用岭回归选择变量…………………………………… 290
第五节 广义岭回归……………………………………………… 294
第十章 最小化残差绝对值和的回归分析……………… 301
第一节 引言……………………………………………………… 301
第二节 简单线性回归…………………………………………… 302
第三节 简单线性回归的其它估计方法……………………… 310
第四节 最小化残差绝对和在多元回归中的应用………… 313
第五节 最小化残差绝对和回归的单纯形算法…………… 320
附表………………………………………………………………… 333
1．相关系数检验表 ………………………………………… 333

2. 正态分布函数 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ 的数值表………… 334
3. t 检验的临界值(t_α)表 ……………………………… 336
4. F 检验的临界值(F_α)表 ……………………………… 338
5. 正交多项式表($N=2—30$) ……………………………… 348
参考文献……………………………………………… 357

第一章　引　　论

第一节　相 关 关 系

回归分析方法是最常用的数理统计方法．它用来处理变量之间的关系，解决预测、控制、生产工艺优化等问题．回归分析方法在工农业生产、科学研究、管理科学中，以及在物理、化学、生物等学科中均有广泛的应用．

一切客观事物都是相互联系和具有内部规律的．在一些实际问题中，我们经常遇到一些变量共处于一个统一体中，它们相互联系，相互制约，在一定条件下相互转化．

变量之间的关系，常见的有两种类型．

一、确 定 性 关 系

例如，矩形的面积 S 与矩形的两条边长 a 和 b 有关系

$$S = ab$$

又如著名的欧姆定律指出电压 V，电阻 R 与电流 I 之间有关系

$$V = IR$$

三个量中有两个量已知，其余一个就可以完全确定．

这两个例子都是说明变量之间的确定性关系．在许多场合下，变量之间存在确定性的关系，并且可以用数学表达式来表示这种关系．然而，在大量实际问题中变量之间虽有某种关系，但是这种关系很难找到一种精确的表示方法．

二、相 关 关 系

例如,人的身高与体重之间有一定关系,知道一个人的身高可以大体估计出体重,但是不能精确地算出体重,其原因是人有较大的个体差异. 象人的身高与体重的关系，是既密切又不是完全确定的，我们称之为相关关系. 在实际问题中存在相关关系的变量大量存在,如人的年龄与血压的关系,炼钢的溶毕碳(铁水经过初炼后碳的含量)与精炼时间的关系，棉纱的回潮率与原棉含水量之间的关系，家俱销售量与新房落成套数、新结婚人数、国民平均收入等之间的关系等等.

回归分析方法是研究相关关系的一种有力的数学工具. 它是建立在对客观事物进行大量试验和观察的基础上的，用来寻找隐藏在那些看上去是不确定的现象中的统计规律性的数理统计方法.

应该指出的是，确定性关系和相关关系之间没有一道不可逾越的鸿沟. 由于存在测量误差等原因，确定性关系在实际问题中往往通过相关关系表现出来. 许多物理、化学的定律(确定性关系),在被发现之前往往先得到相关关系,在相关关系的启发下,物理学家、化学家才逐步发现了这些定律. 这就是说,当对事物的内部规律了解得更加深刻的时候,相关关系可能转化为确定性关系.

第二节　向 量 和 矩 阵

矩阵理论是回归分析的有用工具，为了使没有学过矩阵代数的读者能够顺利地阅读本书，我们将书中需要的内容作一个梗概的介绍，并希望读者能在此基础上参考有关的教科

书.

由于本书只需要实数矩阵，故本章不涉及复数矩阵.

一、定　义

将 $n\times m$ 个实数 a_{11}, a_{12}, $\cdots$, a_{nm} 排成一个长方形

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times m$ **矩阵**, a_{ij} 称为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的**元素**. 常记成 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$. 若 $m=1$, $\boldsymbol{A}$ 只有一列, 称 $\boldsymbol{A}$ 为**(列)向量**,并用 $\boldsymbol{a}$ 代替 $\boldsymbol{A}$;若 $n=1$, $\boldsymbol{A}$ 只有一行,此时 $\boldsymbol{A}$ 也叫做**(行)向量**. $\boldsymbol{A}$ 的 m 个列组成的向量记作 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$,它的 n 个行组成的向量记成 $\boldsymbol{a}_{(1)},\boldsymbol{a}_{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}_{(n)}$,于是$\boldsymbol{A}$又可表示成

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)=(\boldsymbol{a}_{(1)},\boldsymbol{a}_{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}_{(n)})' \tag{1.2}$$

其中

$$\boldsymbol{a}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_{(i)}=\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{im} \end{pmatrix}$$

$$j=1,2,\cdots,m; \qquad i=1,2,\cdots,n$$

$(\boldsymbol{a}_{(1)},\boldsymbol{a}_{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}_{(n)})'$ 表示 $(\boldsymbol{a}_{(1)},\boldsymbol{a}_{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}_{(n)})$的**转置**.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的行和列对换所得的 $m\times n$ 阵叫做 $\boldsymbol{A}$ 的**转置**,记作 $\boldsymbol{A}'$. 令 $\boldsymbol{A}'=(a_{ij}^*)$,则 $a_{ij}^*=a_{ji}$, $i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$. 易见,列向量的转置是行向量,行向量的转置是列向量.

若 $n=m$, $\boldsymbol{A}$ 称为(n 阶)**方阵**. 若 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为 0, 则

$\boldsymbol{A}$ 称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$. 若 $n=m$,

$$a_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & 当\ i=j,\\ 0 & 当\ i\neq j,\end{cases}$$

即
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\cdots 0\\ 0 & 1\cdots 0\\ \vdots & \vdots\ \ddots\ \vdots\\ 0 & 0\cdots 1\end{pmatrix}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为(n 阶)单位阵，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$ 或简记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$. a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn} 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角元素，$\{a_{ij}, i\neq j\}$为 $\boldsymbol{A}$ 的非对角元素. 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的非对角元素全为零，称 $\boldsymbol{A}$ 为对角阵，记作 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵. 对称阵在本书极为有用，希读者注意它的有关性质.

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 对角线的左下方元素全为零，即为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ 0 & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \vdots & \vdots\ \ddots\ \vdots\\ 0 & 0\cdots a_{nn}\end{pmatrix} \tag{1.3}$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为**上三角阵**. 类似地，若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角线右上方元素全为零，称 $\boldsymbol{A}$ 为**下三角阵**. 显然，上(下)三角阵的转置是下(上)三角阵. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$既是上三角阵又是下三角阵，则它必然是对角阵.

两个 $n\times m$ 阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$的**和**的定义为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij}) \tag{1.4}$$

它仍为 $n\times m$ 阵.

若 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times l$ 阵，定义 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的**积**为 $n\times l$ 阵，记作 $\boldsymbol{AB}=(c_{ij})$，这里

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj} \tag{1.5}$$

一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与常数 c 的乘积定义为

$$c\boldsymbol{A} = (ca_{ij})$$

容易验证，矩阵运算有下列性质

$$\boldsymbol{A} + (-1)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$$

$$(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$$

$$(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$$

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$,称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交阵**,此时 $\boldsymbol{AA}' = \boldsymbol{I}$. 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ 的方阵称为**幂等阵**. 对称的幂等阵叫做**投影阵**.

矩阵的分块运算在回归分析中非常有用. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n \times m$ 阵,将 $\boldsymbol{A}$ 分成四块

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}$ 为 $p \times q$ 阵,不言而喻, $\boldsymbol{A}_{12}$ 为 $p \times (m-q)$阵, $\boldsymbol{A}_{21}$ 为 $(n-p) \times q$ 阵, $\boldsymbol{A}_{22}$ 为 $(n-p) \times (m-q)$阵. 若 $\boldsymbol{B}$ 也为 $n \times m$ 阵,且与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的分块形式

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} + \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

若 $\boldsymbol{C}$ 为 $m \times l$ 阵,分为四块

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} \\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{C}_{11}$ 为 $q\times r$ 阵，于是有

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{C}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{C}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{C}_{22}\\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{C}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{C}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{C}_{22}\end{pmatrix}$$

这就是说，可以把 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的每个子块看成一个元素，按通常的矩阵乘法规则去计算。

二、行　列　式

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，它的**行列式** $|\boldsymbol{A}|$ 是一个数，其值由下面的公式决定

$$|\boldsymbol{A}|=\sum(-1)^{k}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n} \tag{1.8}$$

式中 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的任一置换，$\sum$ 号表示对 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 取遍 $(1,2,\cdots,n)$ 的一切置换，k 为由 $(1,2,\cdots,n)$ 经过多少次相邻元素的置换而获得 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 的置换数.

有时我们也用 $\det\boldsymbol{A}$ 或 $\det(a_{ij})$ 表示 $|\boldsymbol{A}|$. 行列式可用下面的方法来定义和计算：若将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 j 列去掉，余下元素的方阵的行列式叫做 a_{ij} 的**余子式**，$(-1)^{i+j}$ 乘以 a_{ij} 的余子式称为 a_{ij} 的**代数余子式**，记作 α_{ij}，于是

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\alpha_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_{ij} \tag{1.9}$$

例如

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

行列式有如下基本性质：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 有一行(列)向量为零，则 $|\boldsymbol{A}|=0$.

(2) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}'|$.

(3) 若将 $\boldsymbol{A}$ 的某一行(列)乘以常数 c，则变化后的矩阵的行列式为 $c|\boldsymbol{A}|$.

(4) $|c\boldsymbol{A}|=c^n|\boldsymbol{A}|$. 这一点如不注意经常会犯错误，而误为 $|c\boldsymbol{A}|=c|\boldsymbol{A}|$.

(5) 互换 $\boldsymbol{A}$ 的任意两行(列)，行列式变号. 例如

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13}\cdots a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=-|\boldsymbol{A}|.$$

(6) 将 $\boldsymbol{A}$ 的一行(列)乘以常数 c 后加到另一行(列)相应的元素上，行列式的值不变. 例如

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ca_{12} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}+ca_{22} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ a_{n1}+ca_{n2} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=|\boldsymbol{A}|$$

(7) $$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12}\cdots c_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(8) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

(9) $|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'| \geqslant 0$.

(10) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵(即 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{I}$), 因为 $|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{I}| = 1$, 则 $|\boldsymbol{A}| = \pm 1$.

(11) 若 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$, 则 $|\boldsymbol{A}| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(12) 若 $\boldsymbol{A}$ 为上(下)三角阵, 则 $|\boldsymbol{A}| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(13) 若 $\boldsymbol{A}$ 的分块有如下的特殊形式

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_{11}||\boldsymbol{A}_{22}| \qquad (1.10)$$

式中 $\boldsymbol{A}_{11}$ 和 $\boldsymbol{A}_{22}$ 均为方阵.

(14) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $p \times q$ 和 $q \times p$ 阶阵, 则

$$|\boldsymbol{I}_p + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{I}_q + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|. \qquad (1.11)$$

三、矩阵的逆

若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$是 n 阶方阵,且$|\boldsymbol{A}| \neq 0$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**非退化阵**. 此时存在一个唯一的 n 阶方阵 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_n$,且

$$b_{ij} = \alpha_{ji}/|\boldsymbol{A}| \qquad (1.12)$$

式中 α_{ji} 为 a_{ji} 的代数余子式. 则称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆,记作 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$. 下面是关于逆的一些基本性质.

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

(2) $(\boldsymbol{A}^{-1})' = (\boldsymbol{A}')^{-1}$.

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶非退化方阵, 则 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1}$

$\cdot A^{-1}$.

(4) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

(5) 若 A 是正交的，则 $A^{-1} = A'$.

(6) 若 $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$非退化(即 $a_{ii} \neq 0$, $= 1,2,\cdots,n$)，则 $A^{-1} = \mathrm{diag}(a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \cdots, a_{nn}^{-1})$.

(7) 若 A 为上三角非退化阵，则 A^{-1} 仍为上三角非退化阵，且 A^{-1}的对角元素为$\{a_{ii}^{-1}, i = 1,2,\cdots,n\}$.

下面关于分块矩阵求逆的公式是十分有用的，我们给予证明.

(8) 设 A 为 $n \times n$ 非退化方阵，记 $B = A^{-1}$. 将 A 和 B 剖分为相同的形式

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

式中 A_{11}, A_{22}, B_{11}, B_{22} 为方阵，则

$$\left.\begin{aligned} B_{11} &= A_{11\cdot 2}^{-1} \equiv (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} \\ B_{12} &= -A_{11\cdot 2}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ B_{21} &= -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11\cdot 2}^{-1} \\ B_{22} &= A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}A_{11\cdot 2}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

$$\left.\begin{aligned} B_{22} &= A_{22\cdot 1}^{-1} \equiv (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ B_{12} &= -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22\cdot 1}^{-1} \\ B_{21} &= -A_{22\cdot 1}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \\ B_{11} &= A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}A_{22\cdot 1}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

证 我们证明第二组即可. 由于

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22\cdot 1} \end{pmatrix}$$

由性质(3)得